



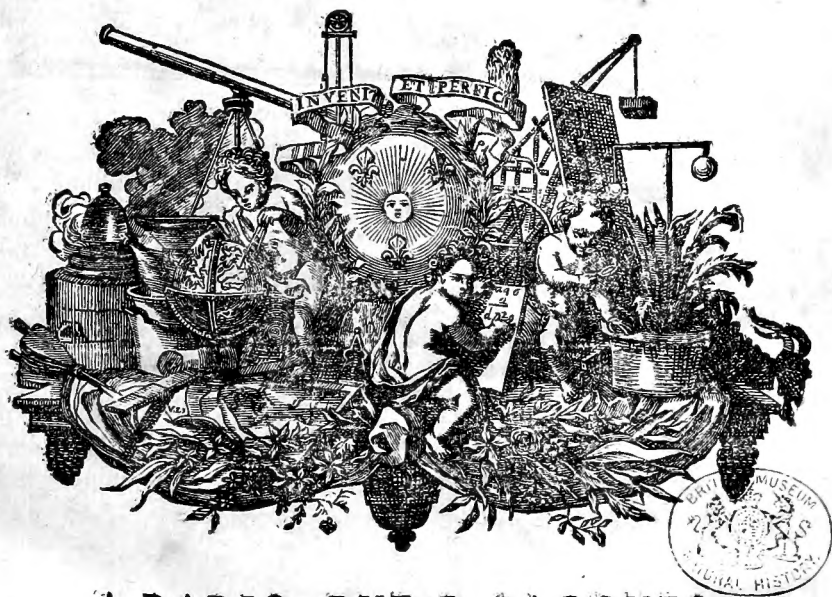


HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCXXIII.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique
pour la même année.

Tirés des Registres de cette Académie.



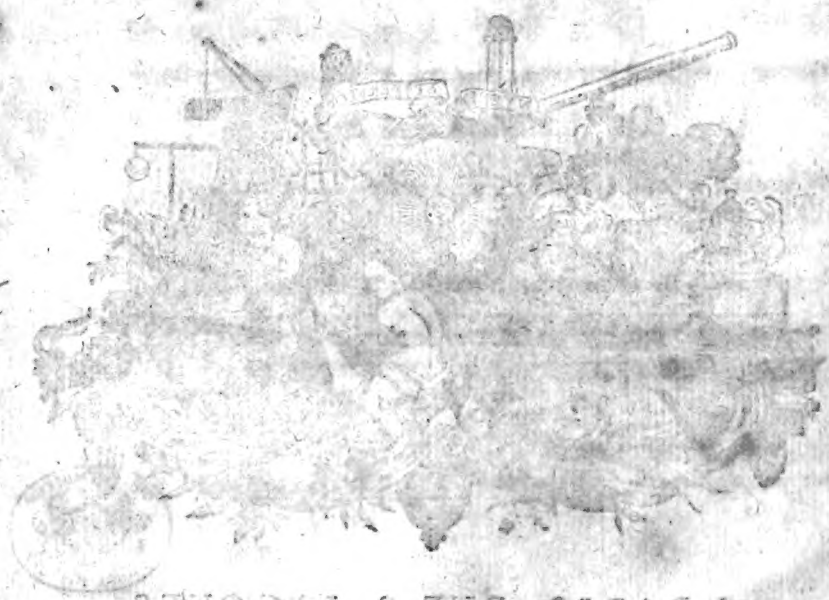
A PARIS, RUE S. JACQUES;
Chez DURAND, Libraire, à S. Landry & au Griffon.

M. DCCCLIII.

ET STORIE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES

Année 1700 CCXXII

Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique
pour la même année.
Paris chez l'Imprimeur de l'Académie.



A PARIS, RUE S. JACQUES,
Chez le Grand Libraire, à S. Benoît & au Palais.

M. DCCXXII

T A B L E
P O U R
L' H I S T O I R E

P H Y S I Q U E G E N E R A L E.

<i>Sur la maniere dont le fer s'aimante.</i>	Page 1
<i>Sur la lumiere des dails.</i>	8
<i>Sur la rondeur des pierres & des cailloux.</i>	9
<i>Sur le phosphore du barometre.</i>	13
<i>Sur les pierres de foudre, les yeux de serpent, & les crapaudines.</i>	15
<i>Observations de physique générale.</i>	17

A N A T O M I E.

<i>Sur les deux espaces que l'humeur aqueuse occupe dans l'œil.</i>	19
<i>Sur la formation des hydatides.</i>	23
<i>Diverses observations anatomiques.</i>	27

C H I M I E.

<i>Sur un verd-de-gris naturel.</i>	36
<i>Sur le sel ammoniac.</i>	38

T A B L E.

B O T A N I Q U E.

41

A L G E B R E.

<i>Sur le calcul des différences finies , & des sommes des suites.</i>	42
<i>Sur une méthode pour la transformation des nombres irrationels en rationels.</i>	50

G E O M E T R I E.

<i>Sur une propriété des polygones inscrits ou circonscrits au cercle.</i>	59
<i>Sur l'universalité des figures.</i>	61

A S T R O N O M I E.

<i>Sur l'apogée & le périée , ou l'aphélie & le périhélie des planètes.</i>	66
<i>Sur une comete.</i>	73
<i>Sur la conjonction de Mercure avec le Soleil , du 9 Novembre.</i>	76

O P T I Q U E.

<i>Sur les ombres des corps.</i>	90
----------------------------------	----

TABLE

MECHANIQUE.

Sur le choc des corps à ressort. 101

Sur la réflexion & la réfraction. 107

Machines ou inventions approuvées par l'Académie en 1723. 120





T A B L E

P O U R

L E S M E M O I R E S .

O *bservations météorologiques, faites en 1722.* Par M. MARALDI. Page 1

De l'origine & des usages de la pierre de foudre. Par M. DE JUSSIEU. 6

Sur les figures inscrites & circonscrites au cercle. Par M. SAURIN. 10

Examen d'une matiere cuivreuse, qui est une espece de verd-de-gris naturel. Par M. DE REAUMUR. 12

Seconde partie du calcul des différences finies. Par M. NICOLE. 20

Mémoire sur les yeux gelés; dans lequel on détermine la grandeur des chambres qui renferment l'humeur aqueuse. Par M. PETIT Medecin. 38

Méthode générale pour transformer les nombres irrationnaux en series de fractions rationnelles les plus simples & les plus approchantes qu'il soit possible. L'on explique à cette occasion un endroit important d'Archimede, qui paroît n'avoir par été entendu par ses commentateurs. Par M. DE LAGNY. 55

Observations anatomiques sur quelques mouvemens extraordinaires des omoplates & des bras. Et sur une nouvelle espece de muscles. Par M. WINSLOW. 69

T A B L E.

Proposition élémentaire sur les triangles. Par M. DE BEAUFORT. 79

Expériences qui montrent avec quelle facilité le fer & l'acier s'aimantent, même sans toucher l'aimant. Par M. DE REAUMUR. 81

Sur le dernier passage attendu de Mercure dans le Soleil, & sur celui du mois de Novembre de la présente année 1723. Par M. DELISLE le Cadet. 105

Diverses expériences d'optique. Par M. MARALDI. 111

Des diverses méthodes de déterminer l'apogée & le périée, ou l'aphélie & le périhélie des planetes. Par M. CASSINI. 143

Etablissement d'un nouveau genre de plante, sous le nom de RICINOCARPOS. Par M. MARCHANT. 174

Seconde section de la seconde partie du Calcul des différences finies, où l'on traite des grandeurs exprimées par des fractions. Par M. NICOLE. 181

Des merveilles des dails, ou de la lumière qu'ils répandent. Par M. DE REAUMUR. 198

De l'origine des pierres appelées YEUX DE SERPENS ET CRAPAUDINES. Par M. DE JUSSIEU. 205

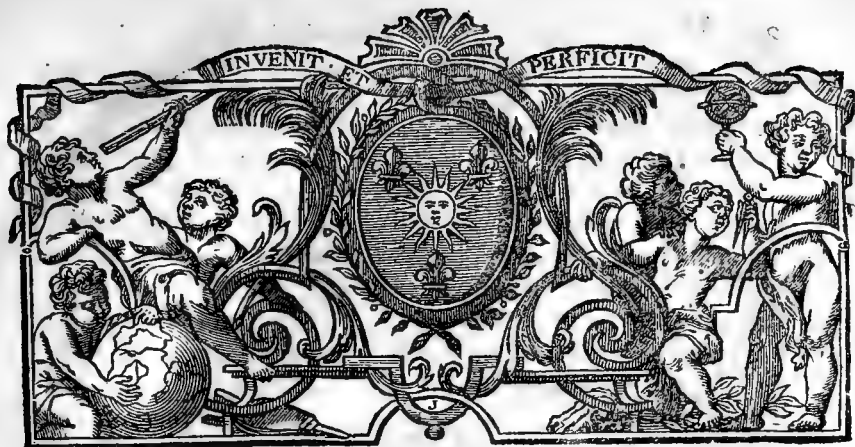
Suite des observations sur la fabrique du sel ammoniac, avec sa décomposition pour en tirer le sel volatil, que l'on nomme vulgairement SEL D'ANGLETERRE. Par M. GEOFFROY le Cadet. 210

Dernières remarques sur un cas singulier du problème des tangentes. Par M. SAURIN. 222

Observations & réflexions sur la comète qui a paru au mois

- d'Octobre 1723.* Par M. MARALDI. 250
- Observation du passage de Mercure dans le Soleil. Du 9 Novembre 1723.* Par M. CASSINI. 259
- Sur la rondeur que semblent affecter certaines especes de pierres, & entr'autres sur celle qu'affectent les cailloux.* Par M. DE REAUMUR. 273
- Observation de Mercure sur le disque apparent du Soleil.* Par M. MARALDI. 285
- Mémoire sur les barometres lumineux.* Par M. DU FAY. 295
- Observation du passage de Mercure sur le Soleil ; faite à Paris dans l'Observatoire Royale, le 9 Novembre 1723, au soir.* Par M. DELISLE le Cadet. 306
- Suite des recherches physico-mathématiques sur la réflexion des corps.* Par M. DE MAIRAN. 343
- Arachidnoides Americana, arachidna quadrifolia villosa, fl. luteo. nov. plant. Americ. gen. plum. 49. pistache du Terre. 2. 121. Manobi. Labat. 4. 59.* Par M. NISSOLE, de la Société Royale de Montpellier. 387





HISTOIRE

DE

L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCXXIII.

PHYSIQUE GENERALE.

*SUR LA MANIERE
dont le Fer s'aimante.*



L'AIMAN est si fécond en prodiges, que V. les M.
chacun de ses phénomènes principaux, dès P. 81.
qu'il est approfondi, en devient une source
presque inépuisable, & se subdivise, pour
ainsi dire, en une infinité de prodiges nou-
veaux. Telle est la manière dont le Fer
s'aimante, c'est-à-dire, acquiert la propriété qu'il n'avoit
pas d'attirer d'autre fer aussi-bien que l'Aiman. M. de
Hist. 1723. A

Reaumur, qui a étudié cette propriété, l'a trouvée & beaucoup plus étendue, & beaucoup plus variée, en un mot beaucoup plus surprenante qu'on ne pensoit.

Pour aimanter une aiguille de boussole, un couteau, &c. on les fait toucher à une pierre d'Aiman, en les conduisant le long de cette pierre selon la ligne qui joint ses deux poles, il n'en faut pas davantage. Il est étonnant que le fer ait acquis une nouvelle vertu par le simple contact de l'Aiman : mais il l'est encore plus que ce contact ne soit pas nécessaire, non pas même l'Aiman, & que le fer s'aimante uniquement par d'autre fer. C'est ce qui arrive à chaque moment dans des boutiques, où l'on n'y fait pas d'attention ; presque tous les outils dont les ouvriers se servent pour couper ou pour percer le fer à froid, ciseaux, burins, poinçons, &c. se sont aimantés, ils attirent la limaille de Fer, dès qu'on les en approche, ils s'en chargent & s'en couvrent, & quelquefois enlèvent de petits clouds, comme s'ils avoient été touchés par un Aiman médiocre.

Tous ces outils ont été trempés : mais M. de Reaumur s'est bien assuré par des expériences que la trempe ne leur a pas donné cette vertu, ils ne la tiennent que de ce qu'ils ont travaillé sur le fer. Un poinçon ou un ciseau sont aimantés par le premier coup de marteau qu'on leur donne sur un morceau de fer ; un second, un troisième coup les aimantent encore mieux : mais cela a des bornes, après quoi ils n'acquierent rien de plus.

Il faut que le fer sur lequel ils ont travaillé ait été froid, & même ils perdroient sur le fer rougi au feu la force attractive qu'ils auroient prise sur le fer froid.

Ils n'en prennent qu'une très-foible sur d'autres matières, telles que le bois, la pierre, le cuivre.

Ils en prennent aussi un peu par de simples coups de marteau donnés à vuide.

Ils la perdent de la même façon, & même celle qu'ils auroient prise en travaillant sur le fer, ou en touchant un Aiman foible.

Les outils qui avec une même masse ont une figure plus allongée, s'aimantent mieux, les poinçons, par exemple, mieux que les ciseaux.

Tout cela est constant par des expériences exactes de M. de Reaumur, autant réitérées ou variées qu'il l'a fallu.

Tous les Physiciens reconnoissent autour de l'Aiman un tourbillon de matiere magnetique, qui a deux poles où la matiere est beaucoup plus ferrée. Nous avons dit en 1717 * combien ce tourbillon est sensible. On reconnoît d'ailleurs le fer pour un Aiman imparfait. M. de Reaumur fait consister cette imperfection, en ce que quoi qu'il circule beaucoup de matiere magnetique au dedans & au dehors du fer, elle n'y a pas un cours régulier, qui forme un tourbillon bien construit à la maniere de celui de l'Aiman. Le tourbillon magnetique du fer, au lieu de deux poles uniques, en a un grand nombre placés çà & là sans ordre. Et comme la vertu attractive de l'Aiman vient de la régularité de son tourbillon, il ne faut pour changer à cet égard le fer en Aiman, que rendre son tourbillon régulier.

* p. 5.
& suiv.

C'est ce que peuvent faire de simples coups de marteau, l'ébranlement qu'ils causeront à toutes les parties de la masse forcera la matiere magnetique qui la pénètre & y circule à prendre un autre cours, toute la merveille est que cet autre cours soit justement celui qu'il faut. Pour cela on doit concevoir qu'il s'en falloit bien peu qu'il ne le fût, que la cause générale qui fait circuler la matiere magnetique dans le fer, tend par elle-même à l'y faire circuler aussi régulièrement que dans l'Aiman, qu'elle n'en est détournée que par quelque légère opposition qui vient de la structure intérieure du Fer, & qu'elle profite du moindre secours pour reprendre sa régularité naturelle. Aussi le fer ne prend-il qu'une très-foible vertu par les simples coups; aussi la perd-il de même, le tourbillon se retrouve dérangé.

Mais si un outil d'acier coupe ou perce du fer, il a pour s'aimanter un grand avantage, outre celui qu'il peut tirer des percussions. Il fait sortir par son action, il exprime du fer de

la matière magnetique qui se joignant à la sienne propre ; augmente la force qu'elle avoit pour se mettre en tourbillon régulier.

Si le fer sur lequel l'outil travaille est rougi au feu , la matière magnetique n'est plus exprimée du fer , parce que ses pores étant dilatés par le feu , elle y circule avec une entière liberté. Peut-être même celle de l'outil passe-t-elle dans le fer rouge , à cause de la facilité plus grande qu'elle trouvera à s'y mouvoir , ce qui est précisément le contraire de ce qu'il faudroit pour aimer l'outil.

Les outils d'une figure allongée s'aimantent mieux , parce que pour être aimantés , il faut qu'ils aient leurs Poles vers leurs deux bouts : or plus ces bouts sont éloignés l'un de l'autre , la masse étant la même , plus le lit , pour ainsi dire , où coule la matière magnetique est serré , & plus par conséquent elle prend de force en y coulant.

Une expérience que M. de Reaumur fit par hasard , lui prouva bien la communication des tourbillons de deux morceaux de fer entre eux , & l'augmentation de force que cette communication cause au tourbillon le plus foible. Il essayoit la vertu de quelques outils aimantés par le travail , il étoit tout proche d'une enclume , & il y posoit les petits morceaux de fer qu'il faisoit attirer & enlever par ces outils. Il s'aperçut que quand il ne les posoit pas sur l'enclume , ils n'étoient plus attirés , ni enlevés , qu'il leur en falloit substituer de moins pesants , & que cela arrivoit même , mais avec moins de différence , lorsqu'ils étoient posés sur quelque morceau de fer moins gros que l'enclume. Le tourbillon de l'enclume s'unissoit donc à celui des outils , & le fortifioit. Nous avons rapporté quelque chose de semblable en 1717 à l'endroit cité.

Une vûe fournie par des expériences en fait naître d'autres qui demandent des expériences nouvelles , & il n'y auroit à craindre que de ne pas finir si on vouloit tout suivre jusqu'au bout. M. de Reaumur conçut que puisqu'il ne manquoit autre chose au fer pour être aimanté , sinon que ses dis-

férents tourbillons se réunissent pour n'en faire qu'un , qui alors auroit nécessairement ses deux poles, & n'en auroit que deux , ce pourroit être un moyen de parvenir à cet effet que de tourmenter le fer , de le secoüer , de l'agiter intérieurement , en le pliant & le repliant diverses fois. Il le fit sur une verge de fer qui n'avoit que la grosseur requise , & il vit qu'étant cassée à l'endroit qui avoit été plié & replié, les deux bouts de la cassure attiroient de la limaille, s'en chargeoient, & enfin étoient mieux aimantés qu'ils ne l'eussent été par un aiman mediocre. Voilà du fer aimanté par lui-même.

Les deux bouts qui avoit la verge avant que d'être cassée ne sont point aimantés, il n'y a que les deux bouts de la cassure qui le soient. C'est-là que les différents Tourbillons ont été forcés à se réunir, parce que des parties comprimées ont chassé d'entre leurs interstices la matiere magnétique , & que d'autres qui se sont écartées les unes des autres l'ont reçue.

Un fil de fer trop menu ne s'aimante presque pas dans sa cassure. La matiere du fer a été trop également comprimée par les plis & replis , & les tourbillons sont demeurés tels qu'ils étoient.

De plus grosses verges s'aimantent mieux , mais non pas dans l'exacte proportion de leur grosseur.

Il faut que les deux bouts cassés ayent une certaine longueur. Un bout trop court ne se seroit pas aimanté. Cela revient à ce qui a déjà été dit.

Le fer le plus doux est celui qui s'aimante le mieux par cette operation. Il se laisse mieux plier & replier.

Il ne faut pourtant pas qu'il l'ait été trop. Un trop grand nombre de plis & de replis lui fait perdre la vertu acquise par un nombre suffisant. Cela revient aux coups de Marteau dont on a parlé.

La vertu acquise par cette operation s'affoiblit peu-à-peu, & quelquefois ne dure qu'un jour. Apparemment les parties du fer se remettent par leur ressort dans leur premier état. Elles ne s'y remettent pas soudainement , parce qu'elles ont

6 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
à vaincre le nouveau cours que la matière magnétique a pris.

Il étoit naturel de juger que si après avoir cassé une verge par cette operation , on en prenoit une des deux parties , & pour plus de commodité la plus grande , dont par conséquent un bout seroit aimanté , & qu'on recommençât l'opération sur cette partie en la pliant & repliant , le bout aimanté viendroit à l'être encore mieux. C'est aussi ce que M. de Reaumur pensa , & dont il fut pleinement assuré par l'expérience. Le bout aimanté en fut quatre fois plus fort , la verge ayant été tourmentée en huit endroits différents.

Il faut bien remarquer que ces huit endroits avoient été pris entre le milieu de la verge , & le bout aimanté. M. de Reaumur s'avisa de prendre de l'autre côté les endroits où il plioit & replioit : le bout non aimanté qui étoit de ce côté-là s'aimanta à mesure que les plis & replis se répétoient , l'autre s'affoiblissoit en même temps , & enfin presque toute sa vertu passa dans le bout qui d'abord n'en avoit aucune. Cela n'arrive pourtant pas toujours si juste , on ne fait souvent que diminuer la force du bout aimanté d'abord , sans en donner autant à l'autre.

Si on prend une verge de fer , & qu'on la tourmente d'abord par son milieu , ensuite de part & d'autre de ce milieu à de petites distances égales , les deux bouts ne sont pas sensiblement aimantés , ils ne viennent à l'être que quand les plis & replis ont été faits environ au tiers ou au quart de la distance qui est entre le milieu , & chaque bout ; encore sont-ils beaucoup plus foiblement aimantés que si l'operation n'avoit regardé qu'un seul des deux , c'est-à-dire que la verge n'eût été tourmentée que de son côté. M. de Reaumur a poussé encore plus loin ses expériences sur cette matière , & l'on trouve toujours des phénomènes singuliers , extrêmement délicats , sujets à de grands changements par de légers changements de circonstances. Il n'est pas impossible d'en entrevoir les causes physiques : mais il seroit du moins très-difficile de les mettre dans une assez grande évidence. Il faut que dans ces sortes d'occasions la raison relâche un peu de sa rigueur ordinaire.

La grande facilité du fer à s'aimanter est prouvée depuis assez long-temps par l'expérience des pincettes, qui ayant demeuré pendant un Été posées verticalement & immobiles dans un coin de cheminée, se trouvent aimantées desorte que leur bout inférieur attire la pointe méridionale d'une aiguille de bouffole, & le bout supérieur la pointe Septentrionale. M. de Reaumur, qui a répété cette expérience, & observé les circonstances nécessaires pour la rendre sûre, au lieu qu'on la croyoit incertaine, abrége bien le temps qu'il faut à une barre ou verge de fer pour s'aimanter. Je dis *barre* ou *verge*, parce qu'il a trouvé que le fer dont on fait les pincettes est le moins propre de tous à ce qu'on attend, & que d'ailleurs il suffit d'avoir un fer long, & qu'il vaut mieux qu'il soit tout droit. Il faut tenir toujours ce fer verticalement; si on en présente le bout inférieur à la pointe méridionale de l'aiguille, on voit qu'il attire cette pointe, & si on baisse la barre de fer toujours verticale jusqu'à ce que son bout supérieur se présente à la même pointe de l'aiguille, il la repoussera. Ce sera la même chose renversée, si c'est le bout supérieur que l'on présente le premier. Ce n'est pas encore là la merveille. Mais si cette barre ainsi aimantée, & qui a acquis deux poles, est retournée de haut en bas, ce qui ne demande qu'un instant, & qu'on présente son bout devenu inférieur à la pointe méridionale de l'aiguille, il l'attirera, au lieu qu'auparavant il la repoussoit; on voit assez quel sera le reste du phénomène. Voilà donc les poles de la barre changés en un instant; & apparemment on n'eût pas cru qu'un tourbillon régulier bien formé eût pû se renverser en sens contraire avec tant de facilité & de promptitude.

La nécessité que la situation de la barre soit verticale, semble prouver que le cours de la matiere magnetique dans le grand tourbillon qu'elle forme autour de la Terre est plus vertical qu'horisontal, mais ce seroit là un point à examiner plus à fond. La Philosophie auroit lieu d'être bien contente de son travail, si elle avoit seulement découvert tous les phénomènes de l'aiman.

SUR LA LUMIERE DES DAILS.

V. les M.
p. 198.

* p. 14. &
suiv.

L Es Dails sont une espece de coquillage dont nous avons parlé en 1712 *. Pline leur a donné une lumiere qu'il appelle *miraculeuse*, ils luisent dans l'obscurité, & d'autant plus qu'ils sont plus frais, ils luisent dans la bouche de ceux qui les mangent, dans les mains de ceux qui les touchent, les gouttes qui tombent de leur corps, soit à terre, soit sur les habits, sont luisantes. M. de Reaumur qui en 1712 avoit nié cette propriété aux Couteliers, autre coquillage assez semblable aux Dails, veut bien avoir tort à l'égard de Pline, parce qu'il avoüe qu'il l'auroit niée aussi aux Dails, à qui il ne la connoissoit point alors. S'il a fait une faute, il la diminue mieux en l'augmentant volontairement, qu'en tâchant de la diminuer avec art, & par des détours.

Tout ce que Pline a dit des Dails a été verifié par M. de Reaumur. Differents Poissons étant pourris, & pareillement des chairs d'animaux terrestres, luisent dans l'obscurité, c'est tout le contraire des Dails, il faut qu'ils soient frais, & leur lumière s'affoiblit à mesure qu'ils le sont moins, & cesse quand ils sont corrompus. Il n'y a que leurs chairs, & non leur coquille, qui soient lumineuses : mais elles le sont, & le sont également dans toute leur substance.

Leur lumiere tient à leur humidité, elles n'en ont plus quand elles sont seches : mais on la fait revivre, quoique plus foible, quand on les humecte d'eau simple, ou d'eau salée. L'eau de vie les éteint sur le champ.

L'humidité qui se détache du corps des Dails est si luisante, que M. de Reaumur qui en avoit touché, ayant ensuite lavé ses doigts dans de l'eau, cette eau parut dans l'obscurité comme du lait en plein jour.

Il soupçonne que des Dails pourris, mêlés avec d'autres frais, les avoient empêchés de paroître lumineux.

Peut-être aussi, comme il le conjecture, y a-t-il des temps
pour

pour la lumiere des Dails, & ce feroient ceux de quelque fermentation, comme celle qui arrive dans les temps destinés par la nature à l'accouplement des animaux. Il confirme cette pensée par l'exemple des vers luisants. Ils ne le font que dans les temps chauds, qui sont apparemment ceux de leur accouplement.

Il est bon de sçavoir que les Vers luisants sont les femelles de l'espece; les mâles ne font point luisants, & ils ont des aîles. Un jour que M. de Reaumur tenoit une femelle dans sa main, un mâle vint la trouver, & ils s'accouplèrent. La lumiere de la femelle est un petit phare qui guide le mâle au lieu où elle est. Des expressions poétiques que nous employons dans le langage de l'amour, feroient employées au propre par ces insectes.

SUR LA RONDEUR DES PIERRES ET DES CAILLOUX.

IL manquoit au Siftème de la formation des pierres, donné par M. de Reaumur en 1721 * l'explication de la rondeur qu'affectent certaines especes de pierres, & principalement les cailloux. On n'entend point par-là une rondeur parfaite, ni approchante, elle est très-rare, ce n'est qu'un arrondissement grossier, des contours toujours courbes, & différens en différentes parties, des angles émouffés & abattus; jamais de lignes droites qui terminent des surfaces.

V. les M.
P. 273.
* V. l'Hist.
de 1721.
pag. 12. &
suiv.

Si, comme il a été dit en 1721, on pouvoit supposer que tous les cailloux ont roulé dans des rivières, ou dans la mer, cette figure n'embarrasseroit pas: mais la supposition seroit trop violente; on trouve des cailloux ronds dans des lits de pierre d'une grande profondeur, & quelque grands bouleversemens qui soient arrivés autrefois sur la terre, il est trop difficile de concevoir ni qu'ils aient produit les figures de tous ces cailloux sans exception, qui sont maintenant si ensevelis, ni qu'il

Hist. 1723,

B

ne se soit point formé de cailloux depuis ces bouleversemens. Il est sûr qu'il se forme encore aujourd'hui des crysiaux & des pierres. Tout est encore également animé, également vivant.

* p. 21.
& suiv.

On a vû en 1721 * quelle étoit la pensée de M. de Mairan sur des pierres, rondes aussi dans le sens que nous avons dit, trouvées à Breuil-pont. L'idée sera vraie pour des cas particuliers comme celui dont il s'agissoit; des pierres se feront formées comme des crysiaux à des voûtes de Grottes souterraines, le pedicule qu'on leur a remarqué étoit fort favorable à cette hypothese; mais cela ne peut pas être commun. Les congelations faites à des voûtes, prennent ordinairement des figures plus allongées que ne sont celles des cailloux; ce sont souvent des cylindres, & quelquefois des tuyaux creux. Il auroit fallu une infinité de voûtes renversées pour faire un grand nombre de lits très-étendus où se trouvent les cailloux & les pierres rondes; il auroit fallu encore qu'elles se fussent accordées malgré la violence du bouleversement, à se mettre dans une même disposition horisontale; & enfin une voûte ne fourniroit qu'un lit de cailloux, au lieu qu'on en voit plusieurs étendus les uns sur les autres, sans compter la grande profondeur où ils sont assez souvent.

Les nouvelles lumieres que nous avons dit en 1721 qu'il valoit mieux attendre sur ce sujet, sont venues presque d'elles-mêmes s'offrir à M. de Reaumur, & se sont liées très-naturellement avec son système général sur la formation des pierres. Dans un banc de sable que l'on coupoit auprès de sa maison de campagne, il a trouvé une très-grande quantité de petits tas de ce même sable, distingués du reste par être liés, plus compactes, & arrondis presque tous irrégulièrement. Il les a nommés des *marrons de sable*, à l'exemple des Ouvriers qui appellent *marrons* de glaise de semblables corps qu'ils trouvent dans la glaise. Ces marrons de sable étoient de toutes sortes de grosseurs, depuis celle d'un pois jusqu'à celle de la tête, & quelquefois plus. Ils étoient de

tous âges entr'eux, & souvent même leurs parties étoient entr'elles de tous âges, l'âge étant réglé sur ce que le sable devient pierre, & la pierre caillou. Plusieurs, sur-tout les gros, n'avoient qu'une enveloppe extérieure de sable, après quoi ils étoient pierre & déjà caillou dans le centre. La couleur générale du banc de sable étant verdâtre, elle s'alteroit dans les marrons selon le degré de leur transformation, elle s'éclaircissoit & blanchissoit lorsqu'ils étoient pierre, & brunissoit lorsqu'ils étoient devenus caillou. Le suc pierreux dont nous avons parlé est par-tout ici trop reconnoissable, & il n'est pas besoin d'expliquer en détail comment il a produit ces phénomènes.

Ce qui acheve bien la preuve, c'est qu'au-dessus de ce banc de sable il y en avoit un autre d'un sable plus gros & plus sec, tout rempli de cailloux bien formés & parfaits, d'une infinité de figures différentes, & dont toutes les figures avoient leur semblable dans quelque marron de sable du banc inférieur. Ces marrons étoient donc destinés à devenir cailloux.

Si le suc pierreux, on n'examine point d'où il vient, ni quel est son cours, trouve un banc de sable où il puisse couler & se répandre également de tous côtés & en tous sens, il liera également tous les grains de sable, & en fera un tout qui sera une masse ou un banc de grès. Mais toute uniformité exacte est très-rare, & peut-être impossible dans la Nature, le banc de grès ne sera pas lui-même bien uniforme. Ce qui empêchera qu'il ne s'en forme un le plus souvent, c'est que les grains du banc de sable ne seront pas assez régulièrement disposés entr'eux, mille hasards les auront ferrés en quelques endroits plus que dans d'autres, les auront séparés en différents tas, auront causé d'assez grands vuides, sur-tout si le banc n'est pas de sable pur, & qu'il soit mêlé de terre, ce qui est commun. Le suc pierreux aura donc dans ce banc de sable un cours inégal, tantôt plus, tantôt moins facile. Et comme ce suc n'est, selon M. de Reaumur, qu'un sable prodigieusement fin porté dans de

l'eau, qui le soutient tant qu'elle a tout son mouvement, & ne le laisse tomber que quand elle se rallentit, il ne se déposera qu'aux endroits où l'eau rencontrera quelques obstacles, c'est-à-dire, dans ceux où elle sera arrêtée par des tas de sable & par des marrons.

L'eau arrêtée par un marron, de quelque figure qu'il soit, se partage pour couler à l'entour, depuis le point le plus élevé de ce corps, jusqu'au plus bas diametralement opposé, & cela parce que cette eau est encore plus visqueuse que toute autre, & par-là est plus disposée à suivre le contour des corps; par ce mouvement elle arrondit nécessairement le marron autant qu'il peut l'être, & en abatre les angles aigus.

Puisque l'eau chargée du suc pierreux coule du dessus du marron jusqu'au dessous, c'est principalement en ce sens qu'elle le doit arrondir; & s'il est plat & fort étendu dans le sens horifontal, elle le doit laisser à peu-près tel qu'il étoit, en arrondissant seulement ses bords. Aussi M. de Reaumur a-t-il eu le plaisir de voir, conformément à cette conjecture, que tous les marrons d'une figure de gâteau peu relevé par le dessus & par le dessous étoient dans le banc de Sable couchés horifontalement sur le plat. Cela ne recevoit presque nulle exception, malgré la grande diversité des circonstances qui auroient pû déranger la Regle. On voit que tout sert à qui sçait observer.

Les plus gros d'entre les marrons de sable, les plus renflés, ceux qui approchent le plus de la figure de boule, sont ceux où l'on trouve le plus ordinairement des cavités, à peu-près dans le milieu. Si elles étoient vuides, c'étoient apparemment des crevasses, des creux qui s'étoient trouvés naturellement dans le banc de sable. Si elles étoient pleines, elles l'étoient d'un sable détaché, tout pareil à celui du reste du banc; le suc pierreux n'avoit point encore pénétré jusqu'à ces grains pour les lier. S'il y eût pénétré, mais seulement en une quantité mediocre, il auroit pétrifié les grains & les auroit blanchis, sans les lier tous ensemble, & en faire une masse.

Mais si le banc au lieu d'être de sable, avoit été de craye, ou de marne, on auroit trouvé dans la cavité des pierres une espece de farine pierreuse, telle que celle qui remplit le milieu des pierres de Breüil-pont.

Supposé que l'on soit ici sur la voie de la formation des pierres & des cailloux, on pourra aller à celle des Métaux, l'Analogie mene loin. Il ne faudra que concevoir une eau chargée de fucs métalliques, au lieu qu'elle l'étoit de fucs pierreux, & donner à cette eau des terres convenables qu'elle pénétrera. La rondeur des grains métalliques s'expliquera par les principes établis : mais les espérances les mieux fondées doivent encourager à découvrir, & non pas croire qu'on a déjà découvert.

SUR LE PHOSPHORE DU BAROMETRE.

LA Lumiere qui paroît au haut de quelques barometres agités dans un lieu obscur, est connue depuis cinquante ans; elle a assez exercé les Physiciens, & principalement M. Bernoulli, qui le premier a approfondi ce phénomène *, & éclairé tous ceux qui en ont traité après lui. M. du Fay a recueilli soigneusement l'histoire de tout ce qui a été écrit sur ce sujet; & ces sortes d'histoires, outre qu'elles plaisent naturellement, parce qu'elles représentent les différents efforts de l'esprit humain, instruisent par les diverses vûes qu'elles fournissent, soit en faisant voir l'inutilité des unes, soit en indiquant ce qui manqueroit aux autres.

Il restoit encore quelque incertitude sur la maniere de rendre le barometre lumineux, ou pour mieux dire, sûrement lumineux, & M. du Fay l'a apprise d'un Vitrier Allemand, à qui il en donne toute la gloire, qu'il eût pû sans beaucoup de péril enlever à un homme obscur & éloigné. Les conditions absolument nécessaires sont que le tuyau soit bien sec, le mercure bien net & bien purgé d'air. Elles n'ont rien de difficile dans la pratique.

V. les M.
P. 275.

* V. l'Hist.
de 1700.
P. 5. 2de.
Ed. & celle
de 1701.
P. 1.

La moindre humidité dans le tuyau gâteroit tout ; mais ce n'est , selon les observations de M. du Fay , qui a tourné ces expériences de bien des sens , que l'humidité qui seroit au haut & dans le vuide du tuyau , où la lumiere doit paroître. Hors de-là le tuyau peut être humide sans inconvenient. On le nettoye aisément avec du cotton attaché au bout d'un fil de fer.

Il faut que le mercure soit bien net , mais cela ne demande nul soin pénible. Il n'y a qu'à faire passer le Mercure par un cornet ou entonnoir de papier , dont l'embouchure soit fort étroite , il y dépose suffisamment ses impuretés.

Il faut que le mercure soit bien purgé d'air. Il n'y a encore là nulle opération recherchée. Le Vitrier Allemand verse d'abord dans son tuyau un tiers du mercure qu'il doit employer , ensuite il le chauffe doucement & par degrés ; & en le remuant avec un fil de fer , il aide à sortir aux bulles d'air que la chaleur pousse hors du mercure. Après cela il verse un second tiers , qu'il traite de même ; & enfin il verse le troisieme auquel il ne fait rien. La purification des deux tiers suffit pour le tout.

M. du Fay ne s'est point apperçu qu'un différent degré de chaleur donné au mercure , produisit de différence sensible dans la lumiere.

Il a remarqué que si on chauffe le mercure dans quelque vaisseau , pour le verser de-là dans le tuyau du Barometre , on manque la lumiere. Il faut que dans ce passage , quoique court , le mercure ait repris de l'air , & à peu-près autant qu'il en avoit.

Il a remarqué aussi que le mercure bien purgé d'air ne diminue pas de volume. Apparemment la grande pesanteur de ses parties les serre les unes contre les autres autant qu'elles peuvent l'être , & leur rondeur ne leur permet que certains interstices déterminés , qui ne peuvent diminuer. Quand l'air est chassé de ces interstices , la matiere subtile prend toute sa place , sans que les parties en soient plus en état de se rapprocher. Il se feroit des vuides si le vuide étoit

possible. Il y a tout lieu de croire que l'expulsion de l'air ne sert au phénomène de la lumière, que parce qu'il est remplacé par la matière subtile.

S'il ne reste que fort peu d'air, la lumière ne laisse pas de paroître, mais moins vive & entrecoupée. Les bulles d'air elles-mêmes deviennent lumineuses; l'abondance & la force de la matière subtile les surmonte.

Le diamètre du tuyau est indifférent. La lumière s'étend davantage dans un plus gros tuyau sans s'affaiblir. M. du Fay avoit construit exprès pour ce phénomène des tuyaux dont le haut s'élargissoit en deux ou trois olives de verre.

La lumière de ces baromètres ne s'affaiblit point par le temps. Ce sont, comme nous l'avons dit ailleurs, des phosphores éternels.

Il seroit inutile de répéter des explications physiques déjà données dans les endroits cités, ou faciles à appliquer ici. Il n'y étoit question que d'une méthode sûre pour rendre les baromètres lumineux. Ceux qui auront cette propriété seront les meilleurs pour l'usage, sur-tout pour l'usage des Observateurs exacts, puisqu'ils seront les plus vuides de tout air grossier.

SUR LES PIERRES DE FOUDRE, *les Yeux de Serpent, & les Crapaudines.*

Nous mettons ensemble pour plus de brièveté, & à V. les M^{rs} cause de quelques rapports éloignés, des pierres qui ^{pag. 6. &} n'ont guère rien de commun que le nom de *Pierres figurées*, ^{207.} les pierres de foudre d'un côté, & de l'autre les yeux de serpent, & les crapaudines.

Ces grands changemens de mers & de continens que M. de Jussieu croit avoir amené ou laissé dans notre Europe des ossemens d'animaux aujourd'hui fort étrangers, se confirment tous les jours, les yeux de serpent & les crapaudines en sont une nouvelle preuve. Ce sont les dents pétrifiées

d'un poisson des côtes du Bresil qu'on y appelle le *Grondeur*. Il a deux sortes de dents, dont les plus petites, & qui apparemment servent à percer, sont les yeux de serpent; & les plus grandes, qui broient, sont les crapaudines. Cela se reconnoît par l'exacte conformité des figures. Après la mâchoire d'un poisson de la Chine, trouvée aux environs

* V. l'Hist.
de 1721.

* pag. 1. &
suiv.

de Montpellier *, il n'y a plus rien là de merveilleux; & si les Turquoises sont des os d'animaux, comme il a été dit en 1715 *, il n'est pas merveilleux non plus que les dents du Grondeur soient devenues des pierres précieuses du second ordre.

Ces dents ne sont pas la dent entière, ce n'en est que la couronne, enveloppe & couverture, ronde d'une racine qui demeure attachée à la mâchoire. Aussi les yeux de serpent & les crapaudines ont-ils dans leur intérieur la même cavité qui se trouve dans cette partie des dents du Grondeur; & si on en voit qui ne l'ayent pas, elle a bien pu dans un long espace de temps se remplir d'une matière pétrifiée.

Il y a des yeux de serpent & des crapaudines qui se peuvent rapporter à des dents de Dorade, poisson qui se trouve dans nos Mers, & il est vrai qu'il y a moins de frais dans ce système; mais M. de Jussieu ne croit pas qu'il suffise pour toutes ces sortes de pierres, il y en a quantité dont la figure demande qu'elles appartiennent au Grondeur. On les trouve d'ailleurs dans les minières, mêlées avec des parties d'animaux certainement étrangers. Le Grondeur & la Dorade peuvent être deux espèces d'un même genre, quoiqu'ils habitent différents climats.

Les pierres de foudre n'ont rien d'animal. Ce sont de véritables cailloux qui ont une figure de coin ou de fer de fleche. Cette figure a fait juger aux anciens Grecs qu'elles étoient les armes de Jupiter tonnant, & qu'il les lançoit de ses mains avec la foudre. Cette opinion a passé, ou est née d'elle-même chez les peuples du Nord, qui pour trouver ces pierres en grande quantité dans leurs pays, ne les ont pas moins reverées. Ils croient même, quoiqu'elles viennent de

la foudre , qu'elles les en garantiront ; & on a bien de la peine encore aujourd'hui à les en defabufer. Les Chinois , qui ne font guere à portée de la contagion de ces idées , en ont pourtant d'assez semblables ; & il n'est pas trop aisé de voir pourquoi cette superstition est si naturelle.

L'origine de ces pierres est très-évidente & très-sûre , dès qu'on en voit de toutes pareilles taillées par les Sauvages de l'Amerique , pour fendre du bois , ou armer leurs fleches. Ils n'ont point de fer , & en frotant des pierres fort dures les unes contre les autres , ils font ces sortes d'ouvrages qui leur sont absolument nécessaires , & n'y plaignent point le temps , dont effectivement ils ne manquent pas. Notre continent a été habité anciennement par des Sauvages , & les mêmes besoins , la même disette de fer , leur ont inspiré la même industrie. Dans la suite leurs outils devenus inutiles ont été ensevelis en grande quantité dans la terre , ils s'y sont mieux conservés que s'ils eussent été de métal ; car la rouille ou le verdet les auroit peut-être ou consumés , ou défigurés ; & voilà ces pierres tombées avec la foudre.

Si les autres pierres figurées sont des monumens de grandes révolutions physiques , celles-ci sont le monument d'une grande révolution qu'on peut appeller *morale* ; & la comparaison du nouveau monde avec l'ancien , sert également à prouver l'une & l'autre espece de révolution.

O B S E R V A T I O N

DE PHYSIQUE GENERALE.

M De Montagnac Consul à Lisbonne , a écrit que l'on étoit fort étonné dans la Province des Algarves d'y voir en Decembre 1722 & au mois de Janvier suivant , les arbres verts & fleuris comme au Printemps , des prunes & des poires aussi mûres & aussi bonnes qu'au mois de Juin , des figues aussi grosses qu'en Avril & en Mai , & des vignes

Hist. 1723,

C

18 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
qui avoient déjà des grappes de verjus. La grande variété
des mêmes saisons doit quelquefois amener de ces sortes
de miracles, & il est bon d'observer quelles peuvent être
les extrémités & les bornes de cette variété.

V. les M. **N** O U S renvoyons entierement aux Memoires
P. I. Les Observations de M. Maraldi pour l'année 1722.



ANATOMIE.

SUR LES DEUX ESPACES

que l'Humeur Aqueuse occupe dans l'Oeil.

L'HUMEUR aqueuse remplit dans l'œil tout l'espace que laissent entr'elles les deux membranes, cornée & uvée. Cet espace est coupé en deux par l'iris, production de l'uvée; de sorte que la partie antérieure est entre la cornée & l'iris, la postérieure entre l'iris & le crySTALLIN. Ces deux espaces ont été appelés, l'un *Chambre antérieure*, l'autre *Chambre postérieure*, par M. Brisseau fameux Professeur en Medecine à Douay, qui a écrit sur ces matieres.

Quand la question de la cataracte membraneuse, ou glaucomatique a été agitée dans l'Academie *, ou dans le Public, M. Brisseau qui attaquoit l'opinion commune de la membrane, a soutenu que de la maniere dont se faisoit l'opération ordinaire de la cataracte, & vû l'endroit où l'on perçoit l'œil, il n'étoit pas possible que l'aiguille n'allât dans la chambre postérieure, & n'y abattît le crySTALLIN, ou du moins ne le blessât aussi-bien que l'uvée, parce que cette chambre est fort petite. Ceux du parti contraire se sont sauvés, en la supposant assez grande, & plus grande même que l'antérieure, ainsi que la représentent de célèbres Anatomistes.

C'est là ce qu'a voulu éclaircir M. Petit le Medecin. Ces sortes de points de fait délicats, & peu sensibles, sont difficiles à décider. Que l'on coupe un œil en sa partie antérieure, l'humeur aqueuse s'en écoule aussi-tôt, & l'on ne sçait dans laquelle des deux chambres elle étoit en plus grande quantité. Pour éviter cet inconvénient, M. Petit a fait geler des yeux pendant le froid; car on fait depuis le

commencement de ce siècle que l'humeur aqueuse se gele. Il a pris des yeux de différens animaux , d'homme , de cheval , de bœuf , de mouton , de chien , de chat , de loup , &c. il faut que le froid soit considérable , afin que l'humeur aqueuse soit bien gelée , & qu'on en puisse exactement mesurer l'étendue en différens espaces.

La glace de la chambre antérieure s'est toujours trouvée beaucoup plus épaisse que celle de la postérieure , & par conséquent la chambre antérieure plus grande que la postérieure , & l'on prévoit bien que cela aura suivi différentes proportions dans des yeux d'animaux de différente espèce , & même dans ceux d'une même espèce , quoique avec moins de différence.

L'épaisseur de la glace des deux chambres ne donne pas leur inégalité de grandeur aussi juste , & aussi facilement que nous semblons le dire ici : il s'en faut bien que ces espaces ne soient des parallelepipèdes , ou même des Solides rectilignes , ils sont curvilignes , & peu réguliers ; de sorte qu'il faut comparer les épaisseurs de la glace dans les endroits où elle est de part & d'autre la moins épaisse , & la plus épaisse , & en conclure une épaisseur moyenne. Cela jette nécessairement M. Petit dans un détail curieux & assez neuf de ces parties de l'œil , tant dans l'homme , qu'en plusieurs autres animaux.

La glace de la chambre postérieure n'est pas même aisée à appercevoir. Comme elle n'est qu'en fort petit volume , elle est noircie par l'uvée qui est noire , & la termine , & à peine paroît-elle. Quand on coupe l'œil selon son axe , c'est-à-dire , selon une ligne qui passe par les centres du cristallin & de la cornée , ce qui est la section la plus propre à cette recherche , la glace se brise par petites parcelles qui s'échappent , & de plus le scalpel , quelque tranchant qu'il soit , s'émousse , & entraîne avec lui des parties noires de l'uvée & des *processus ciliaires* , qui se mêlent avec la glace , & la cachent. Il faut de l'art pour la découvrir telle qu'elle est , & pure.

Si l'on ne prend pas les yeux immédiatement après la mort, ils sont déjà flétris, parce que les humeurs se sont évaporées à proportion du temps. L'humeur aqueuse plus légère & plus volatile que la vitrée, & d'ailleurs plus libre, puisque la vitrée est retenue dans une infinité de petites cellules, s'évapore davantage, & c'est celle dont on a besoin ici.

Quand les yeux sont gelés, ils sont fort tendus, eussent-ils été flétris auparavant, les humeurs se sont dilatées par la gelée comme fait l'eau, parce que l'air qu'elles contenoient, dispersé auparavant en plusieurs petites parcelles, & comprimé, s'est ramassé, & a eu plus de force pour se mettre au large. Il est à observer, en passant, que les humeurs qui se gèlent, s'évaporent assez considérablement, ce que l'on reconnoît par une diminution très-sensible de leur poids. Mais la dilatation des humeurs nuit à la recherche de la capacité des deux chambres. Il y a dans l'œil de l'homme vingt fois plus d'humeur vitrée que d'aqueuse; on peut donc supposer que l'une a vingt fois plus d'air que l'autre, & par conséquent vingt fois plus de force de dilatation. Il doit donc arriver que la vitrée en se gelant usurpe une partie de l'espace qui appartenait à l'aqueuse dans la chambre postérieure, & l'en chasse; & cela arrive en effet à tel point, qu'on ne trouve quelquefois plus de glace dans cette chambre. M. Petit suit plus particulièrement les changemens que peut causer à la configuration respective des parties cette grande inégalité de dilatation entre l'humeur vitrée & l'aqueuse.

Malgré toutes ces difficultés, il n'a pas laissé de parvenir à la détermination qu'il cherchoit, en combinant les différens effets, en pesant les diverses circonstances, & en prenant des milieux. Dans l'homme la chambre postérieure contient à peu-près le tiers de l'humeur aqueuse. Le poids moyen de cette humeur entière est de 4 grains, d'où il suit que la chambre postérieure en contient 1 grain & $\frac{1}{3}$, & cette quantité est si petite, que la chambre qui a $5\frac{1}{2}$ lignes

d'étendue , ne peut être que très-étroite , & par conséquent le raisonnement de M. Brisseau , qui a donné lieu à tout ceci , doit subsister dans toute sa force.

Il ne faut pas omettre une remarque curieuse , quoique simplement accessoire. Dans les yeux gelés le crySTALLIN n'augmente point de volume comme les humeurs. M. Petit crut d'abord que le crySTALLIN , qui est compris entre la vitrée & l'aqueuse , & serré par elles de part & d'autre lorsqu'elles se dilatent , & d'ailleurs incapable par sa texture d'une aussi forte dilatation que la leur , étoit tenu toujours dans le même état & sous le même volume. Mais des crySTALLINS gelés à part n'augmenterent pas non plus. Pourquoi leur air ne s'étoit-il pas dilaté lorsque rien ne s'y opposoit ? Il en faut revenir au système general de la gelée. Les parties propres d'une liqueur qui se gele , perdent de leur mouvement , & par cela seul elles se rapprochent , & tiennent moins d'espace ; peut-être aussi chacune se resserre-t-elle en elle-même : le volume total seroit donc diminué. Mais l'état où elles sont donne à l'air qu'elles renferment la liberté de se réunir en grosses bulles & de se dilater , & de-là vient l'augmentation du volume total. Si les liqueurs sont de nature à ne se point geler , leurs parties propres perdent assez de mouvement pour se rapprocher un peu , mais non pas assez pour permettre à l'air de se réunir & de se dilater , & il arrive une petite diminution de volume. Le crySTALLIN est dans le cas de n'en avoir pas une qui soit sensible , ou peut-être de n'en avoir aucune , sa substance est trop tenace , trop visqueuse , & les particules d'air éparées ne peuvent s'y rassembler. Cependant il s'en est trouvé quelques bulles , mais très-petites , sous la membrane de quelques crySTALLINS dégelés ; mais il y a apparence qu'elles ne s'étoient formées que lorsqu'ils s'étoient dégelés , ils étoient devenus fort mous , ce qui marque toujours quelque division de parties. Plus la physique considère les choses en petit , plus elle a besoin de multiplier & de raffiner ses vues.

SUR LA FORMATION DES HYDATIDES.

LE sujet que nous allons traiter prouvera la grande différence qu'il y a entre appercevoir les choses d'une vûe générale & confuse, ou d'une vûe distincte, & qui se porte à toutes les parties & à tous les détails de l'objet. De la première manière on pourroit avoir rencontré le vrai, & cependant ne tenir rien; car la difficulté de l'application à toutes les particularités pourroit être si grande, qu'on seroit obligé de lâcher prise, & d'abandonner ce vrai qu'on auroit attrapé d'abord.

Les hydatides sont des vesicules pleines d'une eau assez claire, & telle que la lymphe du corps animal. Elles sont le plus communément rondes, de différentes grosseurs depuis celle d'un Pois jusqu'à celle d'un œuf de canne, & quelquefois fort au-delà; elles ont une envelope de même couleur que leur eau, très-uniforme, sans fibres, qui se puissent détacher les unes des autres comme celles d'une membrane; quelquefois il n'y a pas pour une envelope, il y en a deux, trois, & jusqu'à six ou sept, toutes de même nature.

Les hydatides sont ordinairement séparées les unes des autres, quelquefois elles sont comme en grappe, plusieurs étant attachées à une tige commune.

Elles sont communément renfermées en grand nombre sous les premières envelopes des principaux viscères, tels que le foie, la rate, &c. là elles nagent dans une liqueur de la même nature que celle qui est contenue dans chaque hydatide. Outre le sac membraneux qui appartient au viscère, elles ont quelquefois une autre envelope commune de même nature que celle de chaque hydatide particulière. Quelquefois les hydatides ne sont renfermées dans aucune envelope commune, mais répandues confusément dans la cavité du ventre.

Elles sont quelquefois en nombre prodigieux,

Sur ces faits on a imaginé deux différens systêmes. Quelques Physiciens ont cru que les hidatides étoient des glandes qui s'étant obstruées & engorgées de la liqueur qu'elles devoient filtrer, avoient perdu leurs fonctions, & s'étoient détachées de leurs places naturelles. Mais cette idée n'est guere soutenable. Les hydatides qui auroient été glandes, seroient donc squirreuses, dures, de différentes figures irrégulières, il y resteroit au moins quelques traces de vaisseaux sanguins, qui par un entrelacement merveilleux formoient auparavant leur substance: rien de tout cela ne paroît dans les hydatides.

D'autres Physiciens ont eu recours avec beaucoup plus d'apparence aux vaisseaux lymphatiques, qu'ils ont supposé s'être rompus. En effet, sous la premiere envelope des viscères principaux, lieu ordinaire des hydatides, est un réseau tout formé de vaisseaux lymphatiques, & les hydatides ne sont pleines que de lymphe, & nagent dans de la lymphe. La structure des vaisseaux lymphatiques est d'ailleurs favorable. Ce sont des canaux tels que dans des intervalles assez petits les côtés du canal se rapprochent & font un demi-étranglement du vaisseau, qui par-là ressemble en quelque sorte à un chapelet. Les grains de ce chapelet ont paru fort propres à devenir des hydatides, pourvû qu'ils vinssent à se séparer les uns des autres, c'est-à-dire que le vaisseau se rompît dans tous ses étranglemens, ce qu'on pouvoit aisément attribuer à un trop grand amas de lymphe. C'est-là une vûe générale qui, selon M. Morand, renferme le vrai, mais qui ne peut le soutenir & le défendre, à moins que d'être beaucoup plus approfondie: car l'envelope particulière de chaque hydatide seroit donc membraneuse, puisqu'elle auroit appartenu à un vaisseau lymphatique; or elle n'est point membraneuse. De plus, & ceci est encore beaucoup plus considérable, que l'on suppose tant qu'on voudra le chapelet rompu, & tous ses grains séparés, ils avoient chacun deux ouvertures vis-à-vis l'une de l'autre: comment se sont-ils fermés de ces deux côtés?

Si l'on veut que la lymphe ne forme les hydatides qu'après s'être

s'être épanchée hors de ses vaisseaux, comment les formera-t-elle distinctes, séparées, arrondies, avec des envelopes?

Voilà ce que M. Morand conçoit pour lever toutes les difficultés. A chaque demi-étranglement d'un vaisseau lymphatique sont de part & d'autre deux valvules semblables pour la figure aux valvules sigmoïdes du cœur. Ce sont deux demi-capuchons attachés par leur moitié plate à la paroi intérieure du vaisseau, & qui, si la liqueur coule d'un certain sens selon l'axe du vaisseau, s'en remplissent, & l'arrêtent en partie dans leur cavité; si elle coule du sens contraire, elle ne fait qu'aplatir le capuchon & le presser contre la paroi du vaisseau, & alors le cours de la liqueur est entierement libre. C'est en ce sens qu'est sa direction naturelle, & c'est pour l'empêcher de refluer de l'autre que les valvules sont faites. Si par quelque cause que ce soit les valvules ou poches valvulaires se remplissent de liqueur contre l'ordre naturel, & ne s'en vident pas, les poches s'arrondissent autant qu'il est possible, & les parties les plus épaisses, les plus filamenteuses du petit amas de lymphé qui y séjourne sont poussées par les parties plus sereuses vers la circonférence, ainsi qu'il arrive à du lait qui bout, ou à du sang reposé dans la palette. Voilà autant d'hydatides rondes, & avec des envelopes, qu'il y aura de poches valvulaires dans le cas requis; & il y en peut avoir un très-grand nombre, à cause que les vaisseaux lymphatiques sont en grande quantité; qu'ils ont chacun plusieurs étranglements, & que chaque étranglement a deux poches.

Toutes les poches valvulaires d'un vaisseau lymphatique étant gonflées, il est possible qu'il se conserve un petit filet de lymphé qui coule selon l'axe du vaisseau entre toutes ces poches: mais il est possible aussi que par le vice général de la lymphé, & par le retardement de son cours, ce filet ne coupe plus, que la liqueur s'épaississe, & devienne une tige assez solide où s'attacheront des hydatides par leur envelope particuliere déjà formée. Ce seront-là les hydatides en grappe.

Par la formation de l'enveloppe d'une hydatide , il est très-aisé d'entendre comment il s'en formera plusieurs. Il ne faut qu'un plus long séjour de la lymphe dans son moule, ou un peu plus d'hétérogénéité entre ses parties. L'enveloppe la plus extérieure sera toujours la première formée.

Un amas d'hydatides ainsi produites , renfermé sous la tunique d'un viscere , peut aisément grossir à tel point , qu'il crevera cette tunique ; & alors les hydatides étant épanchées dans quelque cavité avec beaucoup de lymphe , cette lymphe pourra devenir une grande hydatide , qui contiendra toutes les autres , c'est-à-dire , qu'il s'y formera une enveloppe générale de la même manière dont les particulières se sont formées. Cette enveloppe générale est d'un diamètre beaucoup plus grand que ne pourroit jamais être celui d'aucun vaisseau lymphatique dilaté , ce qui prouve fort pour le système de M. Morand. Elle est plus molle que les enveloppes particulières , soit parce qu'elle est beaucoup plus grande & plus étendue , soit parce qu'elle n'a pas été produite dans un moule aussi petit & aussi ferme.

Il se trouve quantité d'hydatides crevées & vuides , & celles-là ont fourni une bonne partie de la lymphe commune où elles nagent toutes.

Il est sans difficulté que la lymphe , gélatineuse comme elle est , & destinée à nourrir toutes les parties du corps , à se transformer en elles , peut produire les enveloppes des hydatides , ou leurs fausses membranes. M. Ruysch ayant bien fouetté avec une branche d'arbrisseau le sang d'une saignée encore chaud , il s'en attacha à cette branche une infinité de parties filamenteuses , qui après avoir été blanchies par des lotions , formoient une espèce de membrane , que l'on auroit prise pour vraie & naturelle. M. Morand n'a pas manqué de répéter cette expérience.

Il a voulu voir aussi quelles liqueurs mêlées avec la lymphe l'épaississoient le mieux , & il a trouvé que c'étoient l'esprit de vin , & la teinture de noix de galle. L'eau alumineuse a produit sur la surface du mélange une pellicule

toute semblable aux enveloppes des hydatides. On pourroit trouver aussi quelles liqueurs empêcheroient la lymphe de s'épaissir, & les hydatides de se former dans notre corps : mais ce desordre n'est point sensible long-temps même après sa naissance, cette maladie ne se laisse connoître que quand elle ne peut être guérie par aucune autre voie que les ponctions, qui ne peuvent pas toujours être pratiquées.

DIVERSES OBSERVATIONS

ANATOMIQUES.

I.

M Geoffroy reçut de M. son Oncle qui est à Toul, la Relation d'un Monstre humain né le 24 Decembre 1722 à Dompremi-la-Pucelle, lieu de la naissance de la fameuse Pucelle d'Orleans dans le Barrois. Il faut se représenter deux enfans à qui on a retranché toutes les parties inferieures depuis le nombril, & qui sont unis l'un à l'autre par un nombril commun, de sorte que le tout ensemble n'est que les deux moitiés supérieures de deux corps unies par le plan inferieur de chacune. Elles sont posées du même sens, & les deux têtes qui terminent le tout sont tournées en même-temps vers le haut, ou vers le bas. A un des côtés & au milieu de la figure monstrueuse est une vulve commune, & des deux côtés de cette vulve deux cuisses, deux jambes, & deux pieds. Tout cela n'est point de l'autre côté où n'est point la vulve, il n'y a qu'un moignon de cuisse, qui n'appartient qu'à l'un des demi-corps.

On a vû ce monstre déjà âgé de trois semaines, bien vivant, bien conformé en toutes ses parties, ayant du sommet d'une tête à l'autre 16 pouces $\frac{1}{2}$ de Roi, & 1 pied depuis le ventre jusqu'au bout des deux pieds. On a vû ces deux enfans qui avoient deux nourrices téter & manger de la bouillie avec beaucoup d'appetit, & un grand air

28 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
de santé. Quelquefois l'un tétait, pendant que l'autre dor-
moit. Ils ont été tous deux batisés, & nommés Jeanne. La
production des monstres n'étonne plus les Physiciens, nous
avons déjà dit plusieurs fois quel en est le principe général.
Mais si des monstres humains à deux têtes comme celui-
ci vivoient assez long-temps, il seroit curieux d'observer la
différence des pensées & des volontés des deux têtes, &
comment le monstre total se prendroit à les accorder, ou
à sacrifier les unes aux autres.

II.

Une femme qui étoit à terme d'accoucher ayant été inu-
tilement trois jours en travail avec des pertes de sang con-
sidérables, mourut, & on l'ouvrit pour découvrir ce qui
l'avoit empêchée d'accoucher. On trouva que le Placenta
qui doit être attaché au fond de la matrice, l'étoit au con-
traire à l'orifice interne, & le bouchoit exactement, ex-
cepté un endroit où il n'étoit pas collé, & c'étoit par-là que
s'écouloit le sang des pertes. L'enfant avoit les pieds en
haut qui pouffoient ses envelopes contre le fond de la ma-
trice, il avoit la tête en bas, qui avec les épaules pouf-
foit le placenta contre l'orifice interne & le col de la
matrice, de sorte qu'il se fermoit le passage lui-même. M.
Petit le Chirurgien a tenu cette observation de trois de ses
Confreres, témoins éclairés & habiles. La naissance est
elle-même un grand péril de mort.

III.

Le même M. Petit visitant un malade qui avoit une her-
nie ou descente du côté gauche, où étoit un testicule bien
placé, ne lui trouva point le testicule du côté droit, & ap-
prit de lui qu'il ne l'avoit que quand sa descente étoit ren-
trée ou reduite. Alors il arrivoit souvent que ce testicule
tomboit dans la place d'où la descente étoit sortie; mais
non pas aussi bas que le testicule qui y étoit toujours. Le
scrotum ou sac total n'étoit que la bourse gauche; il n'y
avoit que celle-là qui eût quelque chose à contenir; la droite
étoit effacée faute de fonction, & le raphé, espece de cour

ture ou de ligne qui sépare naturellement ces deux bourses, & divise le scrotum en deux parties égales, s'étoit entièrement jetté du côté droit à l'extrémité de la bourse unique.

Si c'étoit-là un vice de la première conformation, tout est expliqué : mais M. Petit croit fort possible que ce n'en fût pas un. Les enfans n'ont pas en naissant les testicules dans le scrotum, ils y tombent peu-à-peu, aidés par les efforts que font les enfans pour tousser, pour crier, &c. Ils arrivent d'abord chacun à un anneau des muscles du bas ventre, passent au travers, & descendent dans une bourse. Les enfans qui crient ou se tourmentent moins, ont plus tard le sexe masculin entièrement développé. Si un anneau a refusé le passage à un des deux testicules, les Anatomistes concevront bien comment il a pu être entraîné à suivre le chemin de l'autre, & tomber après lui dans la même bourse, & même comment cette chute peut n'être pas absolument nécessaire, & dépendre de quelques mouvemens qu'on se donnera. Il n'est pas rare de trouver des hommes à qui un testicule passe & repasse par son anneau avec facilité.

IV.

Quand on a été mordu d'un chien que l'on croit enragé, il arrive ordinairement que le chien est tué avant que l'on se soit assuré de son état, & la personne mordue demeure dans une cruelle incertitude. M. Petit le Chirurgien a un expédient pour la terminer. Il frote la gueule, les dents, les gencives du chien mort avec un morceau de viande cuite, qu'il présente ensuite à un chien vivant ; s'il la refuse en criant & en heurlant, le mort étoit enragé, pourvu cependant qu'il n'y eût point de sang à sa gueule. Si la viande a été bien reçue & mangée, il n'y a rien à craindre.

V.

Ce n'est que sur la foi de l'expérience qu'on peut croire que des coups d'épée dans l'estomac se guérissent. Un Dragon du Regiment de Languedoc en ayant reçu un, vomit aussi-tôt du sang & des alimens. M. du Vivier Chirurgien.

Major des Dragons de ce Regiment , jugea que le coup ouvroit l'orifice supérieur de l'estomac , en faisant obliquement un trajet d'environ 6 pouces ; il pansa le malade , & le fit saigner sept fois en vingt-quatre heures ; ce qui n'empêcha pas qu'une grosse fièvre ne s'allumât , & qu'il ne vomît encore plus d'une pinte de sang. Cependant par une diete très-exacte , par l'usage des vulnéraires & de l'eau de Rabel , & par celui des lavemens , la fièvre diminua dès le troisième jour , le blessé n'eut plus que des hoquets & de fréquens soupirs , & enfin en dix-huit jours il fut guéri. Deux mois après il eut une fièvre tierce pour laquelle on lui donna de l'émétique , il vomit beaucoup de sang , apparemment parce que les secousses de l'estomac avoient r'ouvert la surface interne de la plaie : mais M. du Vivier le tira encore de cet accident. Il lui en coûta plus de temps que pour le premier , il lui fallut deux mois entiers.

V I.

M. du Vivier ne laissa pas d'employer dans une autre blessure d'estomac ce même émétique , qu'il avoit reconnu pour si dangereux. Un Officier ayant fait une débauche de 10 heures à table , reçut un coup d'épée , & M. du Vivier jugea par le vin qui sortoit , & par la place du coup , qu'il perçoit l'estomac à son fond. La plaie extérieure n'étoit que d'environ 3 lignes. Un autre Chirurgien vouloit saigner : pour lui il fut d'avis de l'émétique , parce que si l'estomac qui étoit fort chargé & fort tendu se soulageoit de ce fardeau excessif , ses parties écartées se rapprocheroient , & la plaie qui ne pouvoit être que petite , diminueroit beaucoup dans l'instant. Ce sentiment , quoique hardi , l'emporta. On saigna après que l'Estomac fut vidé , tout le reste se fit à l'ordinaire , & selon qu'il convenoit , & la guérison fut parfaite.

V I I.

Un Portefaix de la Fleche , âgé de 40 ans , fort robuste , attaqué depuis huit ans d'une hernie incomplète qu'il faisoit rentrer facilement , & qui ne l'empêchoit point de travailler , sentit presque tout à coup une extrême augmenta-

tion de son mal , sa hernie devint grosse comme le poing , longue de 5 à 6 doigts, très-dure , & il eut des douleurs très-vives & des vomissements fréquens qu'il n'avoit point encore éprouvés. M. Farcy, Chirurgien de la Fleche , qui fut appelé , & qui a envoyé cette relation bien attestée à l'Academie , n'osa tenter de faire la réduction à cause de la grande dureté qu'il trouvoit ; elle étoit telle qu'elle sembloit osseuse. On tâcha vainement de la ramollir par des cataplasmes. Le malade fut quatre jours sans aller à la selle , effet naturel & ordinaire de ce que le cours des matieres étoit arrêté dans la hernie : mais il y alla ensuite naturellement , & continua d'y aller tous les jours ; & cependant la hernie ne diminuoit ni de grosseur , ni de dureté , quoique l'intestin fût soulagé d'une partie des matieres qui s'y étoient d'abord amassées. Il falloit bien que la tumeur vint enfin à suppuration ; & comme on vit qu'elle s'y disposoit , on l'aida , & le 14^{me} jour M. Farcy fit l'opération , qu'on avoit différée autant qu'il avoit été possible à cause de l'extrême répugnance du malade. M. Farcy coupa quatre doigts de l'intestin pourri , & il fut fort étonné d'en tirer de petits os , que l'on reconnut pour des os de pieds de mouton. On en tira jusqu'à seize. Le Portefaix avoit mangé des pieds de mouton la veille de son accident , & en avoit avalé goulument quantité d'os. Ils rendoient la tumeur si dure , & causoient l'impossibilité de la réduction , mais en même-temps ils produisoient un bon effet. A l'endroit où l'intestin eût été étranglé , & par conséquent les matieres entierement arrêtées , ils formoient une espece de voute sous laquelle le passage de ces matieres demeurait assez libre. Mais ce qu'il y a ici de très-singulier , c'est que quatre doigts de l'intestin pourris ayant été emportés par l'incision , une autre partie presque égale du même intestin pareillement pourri s'étant ensuite séparée naturellement du vif , les matieres destinées à sortir par l'anus ne devoient plus sortir que par-là , & par la plaie qu'il auroit fallu tenir toujours ouverte , & le malade auroit porté toute sa vie une cannule qui auroit été son anus. Cependant c'est ce qui n'est

point arrivé. M. Farcy vit que de jour en jour les matieres sortoient en moindre quantité par l'ouverture de l'intestin & par la plaie, il espera qu'enfin elles ne sortiroient plus; il se résolut à donner au malade des alimens assez solides qu'on ne lui auroit pas permis selon la pratique ordinaire; tout réussit, la plaie se cicatrifa en trente-trois jours; il ne resta point de fistule au malade, & il n'eut point besoin de porter de cannule. Il se remit au travail comme s'il n'eût jamais été incommodé. L'intestin, dont on avoit emporté plus d'un demi-pied, se rejoignit donc, ce qui est presque inconcevable, à moins que l'on n'applique ici une observation du celebre M. Ruysch sur l'intestin ileon. Quelquefois il s'y fait un prolongement plus ou moins grand, qui est une espece de cœcum particulier. Ce prolongement aura été la portion de l'intestin herniaire remplie d'os, il aura fait naturellement la voute dont on a parlé, on en aura coupé une bonne partie, & ses parois se feront rapprochées & réunies plus facilement que ne feroient deux bouts d'un même intestin continu, séparés d'un demi-pied. Quoi qu'il en soit, il est certain que dans des corps d'une pareille constitution, accoutumés à un grand exercice & à une grande frugalité, la nature a plus de ressources, ou les met plus aisément en œuvre.

VIII.

Voici une autre observation, où l'on verra que la nature, mais aidée de l'art, a fait cette réunion d'intestin, que l'on n'esperoit pourtant pas. L'observation vient d'un Chirurgien fameux, élevé à la plus haute place où il pût prétendre. Quand l'intestin qui fait la hernie est pourri ou gangrené, il en tire en dehors toute la partie altérée, après avoir ouvert la peau du scrotum & le sac herniaire, & dilaté suffisamment l'anneau; à travers la partie du mesentere qui soutient la partie altérée de l'intestin, il passe avec une aiguille un double fil ciré, & en noiant les deux extrémités d'un fil, il forme une espece d'anse de la partie du mesentere par laquelle il assujettit l'intestin vers le milieu de la plaie sans le fermer, afin que les suppurations & les matieres qu'il contient, s'il s'ouvre

s'ouvre par la pourriture, soient portées au dehors, car leur épanchement dans la cavité du ventre seroit mortel. Il fit cette opération à un homme de 35 ans, il lui emporta un demi-pied d'intestin gangrené, & ayant rapproché l'un de l'autre, selon sa méthode, les deux bouts de l'intestin placés à l'ouverture de la plaie, il espéra qu'ils s'y pourroient coller, que les matieres sortiroient par la partie supérieure de l'intestin, l'inférieure demeurant inutile, & que le malade porteroit toute sa vie une cannule, qui lui tiendrait lieu d'anus. La nature fit beaucoup plus que ce qu'il espéroit de plus avantageux. Les deux bouts d'intestin se réunirent l'un à l'autre en un mois, & les matieres, qui sortoient d'abord par l'ouverture de la plaie, reprirent peu à peu pendant ce temps la route de la partie inférieure de l'intestin, qui étoit leur route naturelle. Le rétablissement du malade fut entier, à deux accidens près.

Il eut pendant deux ans une colique plus ou moins forte selon qu'il avoit plus ou moins mangé; elle répondoit à l'endroit de la plaie, & diminua toujours par degrés. La réunion des deux bouts d'intestin s'étoit faite par de nouvelles chairs cicatrisées, & le passage qu'elles laissoient aux matieres n'avoit dans les commencemens ni le diametre naturel de l'intestin, ni sa souplesse.

Comme la méthode qu'on avoit pratiquée, demandoit qu'on élargît beaucoup l'anneau, il se fit par-là une descente d'intestin de la grosseur d'une orange, & on eut beaucoup de peine à trouver un bandage convenable.

IX.

M. Morand a observé dans l'Hydrophthalmie, ou Hydropisie de l'œil, qui allonge & dilate la sclérotique du côté du nerf optique, qu'en exposant à la lumiere l'œil détaché de l'orbite, il est très-transparent dans toute l'étendue de l'axe qui le traverse depuis la partie antérieure & saillante de la cornée jusqu'au de-là de la partie postérieure & dilatée de la sclérotique.

CETTE année parut un Livre de M. Petit le Chirurgien, intitulé , *Traité des Maladies des Os , dans lequel on a représenté les appareils & les machines qui conviennent à leur guérison*. Une premiere édition faite vingt ans auparavant, n'empêche pas celle-ci d'être un Livre tout nouveau. Quel siècle que vingt ans pour un Chirurgien habile & très-employé ! Combien d'observations & d'expériences nouvelles !

Les Maladies des Os sont la luxation, ou le déplacement hors de leurs articulations naturelles, la fracture, l'ankylose, ou l'immobilité, ou difficulté de mouvement qui survient à une articulation, & en empêche le jeu, l'exostose, ou excrescence, la carie, ou pourriture, ou verrouillage, le rakis, ou courbure de l'épine, telle qu'elle est dans les enfans en chartre. C'est un vaste sujet d'ouvrage que d'appliquer toutes ces maladies l'une après l'autre à tous les os du corps humain qui en sont susceptibles, de rapporter les différens accidens dont elles peuvent être accompagnées, de décrire les operations qu'elles demandent, les pansemens, les appareils, les bandages ; enfin tout ce qui peut guider & éclairer la pratique, toujours extrêmement variée par les circonstances. Mais ce détail infini, qui regne dans le Livre de M. Petit, nous empêche absolument d'en pouvoir donner aucune idée générale : il nous faudroit de la theorie, du système, & ici tout est pratique, & faits

* p. 98. & particuliers. On en a vu quelques échantillons dans les Mémoires de 1718 * & dans ceux de 1722. *

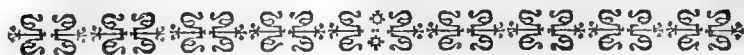
399.
* p. 51.

Ce Livre fait si bien voir quelle est la prodigieuse quantité de connoissances nécessaires à un véritable Chirurgien, que l'on ne doit pas être après cela fort disposé à s'abandonner si aisément aux Bailleuls ou Renoïeurs les plus accrédités parmi le peuple. On sera aussi extrêmement porté à croire sincere la protestation que fait M. Petit de ne réserver rien ni pour lui, ni pour ses enfans qu'il destine à sa profession : il a ramassé un si grand nombre de choses, qu'on ne le soup-

onnera pas d'en sçavoir davantage. Il est toujours très-utile que ceux qui sont zelés pour le genre humain & desintéressés, répandent leurs connoissances : mais malgré cette genereuse intention, il y a des talens personnels qu'ils ne peuvent ni communiquer, ni transmettre.

Nous renvoyons entierement aux Memoires V. les M.
L'Ecrit de M. Winslow sur un mouvement singulier p. 69.
des omoplates, &c.





C H Y M I E.

SUR UN VERD-DE-GRIS NATUREL.

V. les M.
P. 12.

TOUT le Verd-de-gris ou verdet que nous avons est artificiel. On le tire de lames de cuivre macérées pendant quelque temps avec du marc de raisin. Ce marc altere & dissout jusqu'à un certain point leur surface, on en enleve avec des couteaux ce qui est altéré, & c'est le verd-de-gris. On recommence cette operation jusqu'à ce que les lames soient entierement changées en cette nouvelle matiere.

Une masse minerale envoyée des Indes à S. A. S. M. le Duc d'Orleans, dont le goût hereditaire pour les Sciences, & en particulier pour l'Histoire Naturelle, lui attire ces sortes de curiosités, a été reconnue par M. de Reaumur pour un verdet naturel, dont l'espece est toute nouvelle.

Cette masse est d'un verd très-vif & très-gai, &, ce qui est singulier, elle a un œil soyeux, & plus qu'aucune étoffe de soie. Sa structure generale est par branchages, par touffes, qui naissent irrégulierement les unes des autres : elle ressemble par cette disposition aux végétations chymiques ; la structure de chaque partie séparée est par longs filets appliqués les uns sur les autres, comme ceux de l'amiant. Ce corps est pesant & friable.

M. de Reaumur jugea d'abord par la pesanteur que cette matiere étoit métallique, par la couleur qu'elle étoit cuivreuse, car le cuivre seul entre les métaux donne une flamme & des matieres vertes, & par la friabilité, que c'étoit un cuivre imparfait, & non encore malléable. Les essais qu'il fit selon la pratique ordinaire, confirmerent pleinement ses conjectures. Il fut seulement surpris que cette matiere fût déjà si avancée dans l'état de cuivre, qu'ayant été mise en poudre

dans un creuset, environnée de poudre de charbon, elle en tira tout le soufre qui lui manquoit pour être cuivre parfait & malléable.

En cela, aussi-bien que par un verd beaucoup plus vif, le verdet naturel des Indes differe du nôtre artificiel, qui mis à la même épreuve dans un creuset, ne redevient point cuivre. La raison en est que le verdet artificiel n'a point été dépouillé de son soufre, & que certainement le naturel l'a été, ou que du moins c'est une matiere à laquelle le soufre a toujours manqué pour la rendre parfaitement cuivre. On conçoit aisément que si cette même matiere eût pénétré une pierre transparente & crySTALLINE, elle en eût fait une belle Emerald. Telle est, selon toutes les apparences, l'origine de toutes les pierres précieuses colorées; des matieres métalliques ont teint des crySTaux.

M. de Reaumur n'a pas crû devoir negliger l'explication d'un petit fait qu'il a vû en rotissant son mineral & d'autres pareils, c'est-à-dire en les faisant chauffer bien pulvérisés dans un creuset. Quand la chaleur est à un certain degré, il s'élance des jets jusqu'à plus de la hauteur d'un ponce, & au dessous de chacun de ces jets il se forme un petit creux, une espece de Tremie, par où les jets continuent toujours à fortir. Que l'on perce la surface de la poudre bouillante dans les endroits où il n'y a point de jets, il s'y en forme aussi-tôt. En tournant ce phénomène de plusieurs sens, M. de Reaumur s'est assuré que deux conditions y sont nécessaires, la premiere que la poudre soit fine, & légère; la seconde, qu'elle ait une humidité suffisante, il n'importe d'où cette humidité vienne. Une vapeur échauffée, & qui tend à s'élever, perce la surface supérieure de la poudre, & enleve avec elle de petits grains jusqu'à une certaine hauteur; & quand une fois elle s'est fait une route, il lui est plus facile de la suivre que de s'en faire une nouvelle, ce qui tient toujours ouvert le petit creux par où sort le jet;

SUR LE SEL ARMONIAC.

V. les M.
p. 210.

* p. 46.
& suiv.

L'EGYPTE nous fournit tout nôtre sel armoniac, & elle nous le fournit, parce qu'elle manque de bois, ce qui a été expliqué dans l'Hist. de 1720 *. On y a rapporté aussi comment les différentes experiences de M. Geoffroy le cadet sur ce sel l'avoient conduit à deviner que les Egyptiens le faisoient par sublimation, quoique la forme de pains plats & orbiculaires sous laquelle ils nous l'envoient fût très-peu favorable à cette pensée. Le fait fut heureusement verifié.

Pomet dans son Histoire des Drogues parle en deux mots d'un sel armoniac qu'on voyoit autrefois, plus estimé que celui d'aujourd'hui, & qui étoit en pains de sucre. On n'osoit guere se fier à ce peu qu'il en disoit, & il n'en restoit presque plus aucune memoire, lorsqu'un accident très-funeste l'a fait reparôître au jour. La peste de Marseille ayant interrompu le commerce avec l'Egypte, il a fallu recourir aux Hollandois pour avoir du sel armoniac, & ils nous ont envoyé de ces pains de sucre que l'on ne connoissoit plus. Ils le tirent certainement des Indes Orientales. M. Geoffroy n'a pas manqué d'appliquer son idée de la sublimation à ces pains des Indes, qui sont des cones tronqués vers le sommet, & en partie creux. Leur figure s'accommodoit bien mieux à cette idée que celle des pains d'Egypte. Jusqu'ici les uns & les autres étoient des especes d'Enigmes, que les Egyptiens & les Indiens nous envoient, comme autrefois les Rois de ces mêmes Pays-là s'en envoient de véritables, pour faire assaut d'esprit & de pénétration.

Les Anglois nos voisins nous donnoient aussi à deviner une autre Enigme de leur façon, tirée encore du sel armoniac. C'est ce qui s'appelle *Sel d'Angleterre*. Il a toute la vogue que peut avoir en ce Pays-ci une drogue étrangere. Au lieu de l'odeur urineuse, & presque insupportable du sel

armoniac, il en a une qui sans être moins pénétrante est agréable, & aromatique. La grande singularité est qu'il est en forme sèche & solide, & qu'il doit avoir été tiré du sel armoniac sous cette forme en grande quantité, car sans cela il ne s'en pourroit pas faire un débit si considérable. D'ailleurs il en est beaucoup plus commode pour l'usage. Jusqu'ici nos Chymistes ne s'étoient guere appliqués qu'à tirer du sel armoniac son esprit, c'est-à-dire une liqueur où nageoient ses alkalis volatils dégagés de leurs acides. Le sel d'Angleterre est bon pour les vapeurs & pour les défaillances, & on le porte sur soi dans de petits flacons.

Malgré le nom qu'on lui donne, il y a long-temps que ce sel étoit connu des Chymistes. M. Lemery en avoit parlé dès les premières éditions de son *Cours de Chymie*, & M. Tournefort a dit dans nos *Memoires* de 1700 * que de 15 onces de sel armoniac il en tiroit 10 de sel volatil, outre 3 onces d'esprit, c'est-à-dire 10 onces de sel volatil en forme sèche.

* p. 71.
2.^{de} Edit.

M. Tournefort étoit donc déjà bien avancé : mais M. Geoffroy a été plus loin. De 16 onces de sel armoniac il en a tiré plus de 13 onces de sel volatil en forme sèche, & cela principalement parce qu'il a mêlé au sel armoniac sur lequel il opéroit une plus grande quantité d'intermede, qui est un sel alkali bien calciné. Cet intermede plus abondant écartoit davantage les unes des autres les parties du sel armoniac, qui avoient été auparavant bien purifiées, pulvérisées très-fin, & bien séchées, de sorte que toutes leurs surfaces se présentant séparément à l'action du feu, rien n'empêchoit qu'elles ne laissassent échapper tout ce qu'elles contenoient de volatil. Il y a de plus un certain tour d'opération que l'on verra, dont l'adresse vient du génie & de l'expérience du Chymiste.

En comptant l'esprit que M. Geoffroy a tiré, outre le sel en forme sèche, & ce qui se perd & se dissipe nécessairement dans l'opération, il se trouve que sur 16 onces de sel armoniac, il y en a 15 de sel volatil alkali, qui par con-

40 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
sequent se sont liées à une once seulement de l'Acide du sel
marin, qu'on avoit fait entrer dans la composition du sel
armoniac, ainsi que nous le sçavons presentement. Quinze
parties d'alkali sur une d'acide dans la composition d'un
sel concret ou moyen tel que l'armoniac, sont une dose
étonnante, & qui ne se trouve peut-être que dans ce seul
mixte : mais cela même rend bien raison pourquoi le sel
armoniac mis sur une pelle rouge s'en va tout en fumée ;
ses deux principes, l'acide & l'alkali, n'ont presque pas
de liaison, parce que l'un est en trop grande quantité par
rapport à l'autre.

Quant à l'odeur agréable que les Anglois donnent à leur
sel, ce n'est pas la peine de s'y arrêter, elle vient de quel-
ques Plantes aromatiques. M. Geoffroy donne dans tout le
détail la composition de ce sel telle qu'il l'a découverte, &
qu'il la pratique. Le génie François n'est pas mystérieux,
même en Chymie.

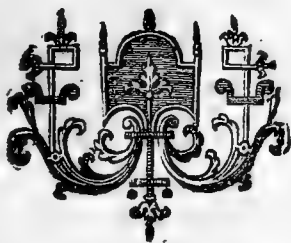


BOTANIQUE.

M Marchant a donné la Description du *Chamadrys maritima*, *incana*, *frutescens*, *foliis lanceolatis* I. R. H. 205. *Marum Cortusi*. J. B. T. 3. 242. *Majorana Syriaca vel Cretica*. Casp. Bauh. Pin. 224.

Et du *Trachelium azureum*, *umbelliferum*. Pon. Bald. Ital. 44.
Cervicaria Valerianoïdes, *cærulea*. Casp. Bauh. Pin. 95.

Nous renvoyons entierement aux Memoires
 L'Ecrit de M. Marchant sur l'établissement d'un V. les M.
 nouveau Genre de Plante, qu'il appelle *Ricinocarpos*, 573.





A L G E B R E.

SUR LE CALCUL DES DIFFERENCES

finies , & des sommes des suites.

V. les M.
p. 20. &
181.
* P. 38.
& suiv.

CETTE matiere a déjà été traitée en 1717 d'après M. Nicole *. Il rend présentement sa Théorie plus générale, & l'étend à de nouvelles suites dont les conditions sont moins bornées. Non seulement nous allons le suivre dans cette augmentation qu'il donne à sa recherche, mais pour répandre plus de lumière sur le tout, nous remontons jusqu'aux idées fondamentales, que nous éclaircirons plus qu'elles ne l'avoient été.

Si la premiere ordonnée d'une courbe est nulle ou zero, il est très-clair qu'une ordonnée quelconque suivante est la somme des différences de toutes les ordonnées qui la précédent, c'est-à-dire, la somme de toutes les grandeurs dont chaque ordonnée a crû au dessus de la précédente. Ainsi dans une suite d'ordonnées croissantes qui commence par zero, toute ordonnée est la somme de tout ce qu'il y a eu de différences jusqu'à elle inclusivement. Que ces différences soient finies ou infiniment petites, la proposition subsiste également. Si elles sont finies, la 1^{re} ordonnée finie, qui n'est que la 2^{de} ordonnée, puisque la 1^{re} est zero, est la somme d'elle-même qui est la différence de zero à elle; la 2^{de} ordonnée finie, qui est la 3^{me}, est la somme de la 2^{de} ordonnée entiere, & de la différence dont la 3^{me} surpasse cette seconde, & toujours ainsi de suite. Si les différences sont infiniment petites, comme on les conçoit dans la géometrie moderne, il n'y a rien de changé, seulement toute ordonnée finie est la somme d'une infinité de différences.

Ce que l'on vient de dire d'une suite croissante d'ordonnées qui commence par zero, s'applique de soi-même à une suite décroissante, qui se terminera par zero. Il n'y a que ce seul changement, l'ordonnée qui dans le 1^{er} cas étoit la somme de toutes les différences des ordonnées précédentes jusqu'à elle inclusivement, est dans le 2^d cas la somme des différences de toutes les ordonnées suivantes; car pour rendre la suite croissante, au lieu qu'elle étoit décroissante, il n'a fallu que la concevoir renversée.

Cette condition, que la suite croissante, car il suffit de la considérer, commence par zero, est absolument nécessaire, afin qu'une ordonnée quelconque soit la somme des différences de toutes les ordonnées précédentes, & ne soit ni plus ni moins. Si la première ordonnée de la courbe n'est pas zero, ou infiniment petite, mais finie; ou, ce qui revient au même, si on ne considère dans la courbe qu'une suite d'ordonnées qui ne commence qu'après le point où il y en auroit une nulle, une ordonnée quelconque de cette suite sera bien encore la somme des différences de toutes les ordonnées précédentes: mais elle contiendra de plus une grandeur égale à la première ordonnée finie par laquelle on aura commencé la suite: ainsi la somme des différences sera égale à cette ordonnée moins la première. Si au contraire la suite dont il s'agit commence par quelque ordonnée qui soit avant l'ordonnée nulle, après quoi elle continuera à l'ordinaire par les ordonnées croissantes, une ordonnée quelconque d'entre ces croissantes sera la somme des différences de toutes les ordonnées précédentes jusqu'à zero, mais non pas des différences des ordonnées qui auront précédé zero; ainsi la somme des différences de toutes les ordonnées posées & que l'on veut considérer, sera égale à cette ordonnée, plus la somme des différences des ordonnées qui auront précédé zero, ou l'ordonnée nulle.

Par le calcul différentiel on a toujours la différence infiniment petite d'une ordonnée quelconque d'une courbe, & cette différence qui est la quantité dont cette ordonnée

supposée ici croissante, surpasse celle qui la précède, est une partie infiniment petite de l'ordonnée. *Intégrer* une quantité, c'est trouver par une partie infiniment petite quel est le tout fini, en déterminer la valeur. Quand on integre la différence infiniment petite d'une ordonnée, on a donc cette ordonnée, ou la somme exacte des différences de toutes les ordonnées précédentes dans le cas où cette somme & l'ordonnée sont exactement égales; & si elles ne sont pas dans ce cas, qui est celui où la suite a commencé par zero, on voit aisément, en supposant une premiere ordonnée nulle, ce qu'il faut ajouter à la somme trouvée des différences, ou en retrancher.

C'est par cette methode que l'on détermine la quadrature des courbes, ou les espaces finis renfermés entre ces courbes & des droites. On prend les différences de ces espaces, ou les espaces infiniment petits dont ils croissent à chaque instant, & on les integre quand l'intégration est possible; car on ne sçait que trop qu'elle ne l'est pas toujours, du moins-jusqu'à present.

Nous avons dit en 1717 comment toutes ces idées qui ont pris naissance dans le systême de l'infini ont été transportées au fini, d'abord par M. Taylor, grand Géometre Anglois, & après lui par M. Nicole. Une suite quelconque formée de nombres finis, étant posée, chacun de ces nombres est la différence finie dont la somme totale de la suite augmente toujours, & par conséquent chaque nombre conçu comme une différence, étant intégré, sera égal à la somme de toutes les différences précédentes de la somme totale, c'est-à-dire à la somme de tous les nombres qui l'auront précédé, supposé que la suite ait commencé par zero; ce qui est une très-belle methode pour avoir la somme de tel nombre de termes qu'on voudra d'une Suite.

Mais cette methode n'est pas applicable à toutes sortes de suites: il faut que chaque terme en puisse être exprimé d'une maniere générale & algebrique, & il faut que cette expression, puisqu'on la conçoit comme l'expression d'une

différence, puisse être intégrée : or cela demande deux conditions , ainsi que nous l'avons dit. 1.^o Que les termes de suites soient formés par un produit. 2.^o Qu'il n'entre dans ce produit qu'une seule grandeur indéterminée , qui croisse toujours d'une même quantité, c'est-à-dire , que les nombres multipliants ou *facteurs* qui composeront un terme quelconque de la suite , seront la grandeur indéterminée , la même plus la quantité constante dont elle croît , la même plus deux fois la quantité constante , &c. Car cela peut aller si loin qu'on voudra , & le produit qui fait un terme quelconque de la suite peut avoir un nombre quelconque de facteurs. Quand on détermine la grandeur indéterminée, c'est-à-dire , qu'on lui donne successivement les valeurs des nombres naturels , 1 , 2 , 3 , &c. on a les différents termes consécutifs de la suite. Le premier est celui où la grandeur indéterminée est 1.

La grandeur indéterminée assujettie à croître toujours d'une quantité constante dans les différents facteurs , qui forment chaque produit ou terme de la suite , n'est pas assujettie pareillement à ne croître que de cette même quantité quand elle passe d'un terme à l'autre. Elle peut croître de toute autre quantité dans ce passage , pourvu que dans chaque passage ce soit toujours la même quantité. Ainsi il peut y avoir deux différentes quantités constantes, l'une dont la grandeur indéterminée croît dans chaque facteur d'un même terme , l'autre dont elle croît d'un terme à l'autre. Cela fait deux cas , dont le plus simple est celui où les deux quantités constantes sont la même. C'est ce cas-là que M. Nicole a donné en 1717. Une infinité de suites croissantes qu'on peut former à son gré en observant les conditions requises , lui appartiendront , & par conséquent on aura les sommes de tel nombre fini de leurs termes qu'on voudra depuis leur origine. Il est à remarquer qu'entre toutes ces suites sont celles de tous les nombres figurés possibles , & c'est ce que nous allons faire voir.

La suite des nombres naturels étant posée , les nom-

bres qui commençant par 1 , auroient pour 1^{re} différence le 2^d des naturels , ou 2 , & ensuite tous les autres pour différences consecutives , selon les triangulaires. Ils font cette suite 1 , 3 , 6 , 10 , &c. De même ceux qui commençant par 1 auront pour 1^{re} différence le 2^d des triangulaire , ou 3 , & ensuite tous les autres pour différences consecutives , seront les pyramidaux , 1 , 4 , 10 , 20 , &c. De la même maniere se formeront les triangulo-pyramidaux , qui commençant par 1 , auront pour 1^{re} difference 4 , le 2^d pyramidal , & ensuite tous les autres pyramidaux pour différences. On voit qu'il se formera ainsi des nombres figurés sans fin. On les appelle aussi nombres du 1^{er} ordre , du 2^d , du 3^{me} , &c. en comptant les naturels pour ceux du 1^{er}. Mais on ne peut donner aux naturels le nom de figurés.

Si l'on forme de suite des produits des nombres naturels pris deux à deux , c'est-à-dire , que l'on multiplie 1 par 2 , 2 par 3 , 3 par 4 , &c. & que l'on divise chacun de ces produits par 2 , on aura la suite des nombres triangulaires. De même si l'on multiplie de suite les naturels pris trois à trois , c'est-à-dire qu'on fasse le produit de 1 , 2 , & 3 , celui de 2 , 3 & 4 , celui de 3 , 4 & 5 , &c. & qu'on divise chacun de ces produits par 6 , on aura la suite des pyramidaux. On aura la suite des triangulo-pyramidaux en formant pareillement des produits des naturels pris quatre à quatre , la difficulté ne peut être que de sçavoir quel sera le diviseur commun de ces produits : mais il saute aux yeux que ce diviseur commun sera égal au 1^{er} produit , c'est-à-dire ici 24. Il en ira toujours ainsi de tous les nombres figurés à l'infini.

On aura donc une infinité de suites dont chaque terme sera un produit formé d'un certain nombre de facteurs qui croîtront d'une même quantité constante , & où de plus d'un terme à l'autre les premiers facteurs comparés entr'eux croîtront encore d'une quantité constante , qui sera la même que la premiere. Quant au diviseur commun de tous les

produits ou termes, il sera fort aisé d'en tenir compte. Ainsi toutes les suites des nombres figurés sont telles que par la methode de M. Nicole on peut avoir les sommes d'un nombre quelconque fini de leurs termes à commencer par le premier.

Si les produits formés, comme on vient de dire, ne sont pas divisés par le diviseur commun que demande chaque ordre de nombres figurés; ce seront d'autres suites de nombres qui n'en appartiendront que de plus près à la methode de M. Nicole.

Toutes les suites qui y appartiennent peuvent être réduites en suites de nombres rompus, il n'y a qu'à donner à tous leurs termes qui deviendront dénominateurs, un même numérateur constant. Mais alors elles sont décroissantes, & leur dernier terme infiniment petit, ou zero. Ainsi les sommes en général étant toujours prises depuis zero jusqu'à un terme fini quelconque, celles-là comprennent la partie infinie de la suite qui est du côté de son extrémité, au lieu que les autres n'en comprenoient qu'une partie finie du côté de son origine. Les premieres sommes ne l'étoient que d'un nombre fini de termes, ces secondes le sont d'un nombre infini, ce qui les rend & plus curieuses, & d'un usage beaucoup plus grand en géometrie.

Le terme fini d'où l'on prend la somme de la suite fractionnaire jusqu'à zero son dernier terme, peut aussi-bien être le premier terme que tout autre, & par conséquent on a la somme de la suite entiere. On a d'ailleurs la somme de cette suite depuis tel terme que l'on veut, par exemple, depuis le 10^{me} jusqu'à zero; ainsi en ôtant cette somme de la somme totale, on aura celle des 10 premiers termes, & de tout autre nombre fini de ses termes.

Les sommes des suites fractionnaires conditionnées selon que la methode l'exige, sont nécessairement finies, quoiqu'elles soient sommes d'une infinité de termes.

Puisque les produits des nombres naturels pris deux à deux, & divisés par 2, pris trois à trois, & divisés par 6,

&c. sont des suites de nombres figurés, il n'y a pour les changer en suites dont les nombres figurés soient les dénominateurs, qu'à leur donner pour numérateur constant, ou 2 ou 6, &c. enfin le nombre que nous avons trouvé pour diviseur commun à chaque ordre de figurés.

Afin que ces suites fractionnaires soient comprises dans la methode de M. Nicole, il n'est point absolument necessaire que leur numérateur soit constant, il suffit que les numérateurs soient aussi-bien que les dénominateurs des nombres formés comme la methode le prescrit pour les suites de nombres entiers. Mais ces especes de suites fractionnaires ne seront pas toujours *sommables*, c'est-à-dire, que le nombre infini de leurs termes n'aura pas toujours une somme finie, & dont on puisse déterminer la valeur; quelquefois il en aura une infinie, que l'on ne pourra par consequent déterminer. Ainsi si une suite fractionnaire a pour numérateurs les nombres triangulaires, & pour dénominateurs les pyramidaux correspondans, elle ne sera point sommable, & sa somme sera infinie. Mais si à ces mêmes nombres triangulaires on donne les triangulo-pyramidaux pour dénominateurs, la suite sera sommable, & en général une suite fractionnaire dont les numérateurs seront des nombres figurés d'un ordre quelconque, & les dénominateurs des figurés d'un ordre suivant, ne sera point sommable quand les deux ordres seront immédiatement consecutifs, & hors de-là le sera toujours.

En 1717 M. Nicole ne passa point le cas supposé jusqu'ici, où d'un terme à l'autre de la suite la grandeur indéterminée croît de la même quantité constante, dont les facteurs d'un même terme croissent entr'eux. Maintenant il étend sa théorie au cas où cette quantité constante dans l'étendue de chaque terme, n'est plus la même dans le passage d'un terme à l'autre, quoique toujours la même dans chaque passage. Tels sont ces nombres 15, 48, 99, &c. Car le 1^{er} est le produit de 3 & de 5, le 2^d celui de 6 & de 8, le 3^{me} celui de 9 & de 11, où l'on voit que 3

&

& 5 facteurs du 1^{er} terme, 6 & 8 facteurs du 2^d, 9 & 11 facteurs du 3^{me} croissent toujours entr'eux de la quantité 2, mais 3 premier facteur du 1^{er} terme croît de la quantité 3 pour devenir 6 premier facteur du 2^d terme, 6 croît aussi de 3 pour devenir 9 premier facteur du 3^{me} terme, ce qui peut être continué à l'infini.

Cette Methode devenue plus vaste demande aussi plus de calcul : mais le même esprit, & les mêmes principes y regnent toujours. Elle comprend nécessairement l'autre qui est plus simple, & pour l'y ramener il n'y a qu'à supposer égales les deux quantités qui doivent être toujours constantes.

Si la quantité constante dont croissent les facteurs d'un même terme est nulle, alors ce terme qui n'est plus qu'une même grandeur multipliée par elle-même un certain nombre de fois, est un quarré; s'il a deux facteurs, un cube, s'il en a trois, &c. Et si en même temps la quantité constante, qui doit être dans le passage d'un terme à l'autre, subsiste, on a une suite dont les termes sont ou des quarrés, ou des cubes, &c. de nombres éloignés entr'eux d'un intervalle égal à cette quantité constante. Par exemple, si elle est 3, on a une suite dont les termes sont ou les quarrés, ou les cubes, &c. de 1, de 4, de 7, de 10, &c. Si elle n'est que 1, on a les puissances quelconques consecutives des nombres naturels. Or par la Methode de M. Nicole on a l'expression générale algébrique de la différence des termes de la suite; on a donc celle de la différence qui est entre les mêmes puissances des nombres Naturels éloignés entr'eux de tel intervalle toujours égal qu'on voudra, & consecutifs, si l'on veut. On a aussi par la même methode la somme d'un nombre fini quelconque des termes d'une suite, depuis tel nombre fini exclusivement qu'on a voulu choisir jusqu'au premier inclusivement; on a donc les sommes d'un nombre fini quelconque de puissances des nombres naturels, soit consecutifs, soit éloignés entr'eux d'un intervalle égal quelconque. On voit assez que cette

50 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
détermination , toute vaste qu'elle est , n'est qu'un cas particulier de la Methode modifiée , & restreinte.

Toutes les suites comprises dans la seconde supposition de M. Nicole , & telles que l'on peut avoir leur différence algebrique , & l'intégrer , ce qui donne des sommes , ne sont pas pour cela telles qu'étant devenues fractionnaires elles soient susceptibles des mêmes opérations , & qu'on puisse en avoir les sommes à la maniere des suites fractionnaires. Le changement qu'elles ont reçu apporte des limitations à leur capacité d'être sommées. Ce n'est pas qu'en leur donnant un numérateur constant , elles ne vinssent toutes sans exception à avoir des sommes finies : mais souvent on n'en pourroit pas déterminer la valeur , quoique finie. Ainsi les quarrés des nombres naturels étant réduits en fractions dont 1 sera toujours le numérateur , la somme de cette suite est certainement finie , mais inconnue. Il en va de même des autres puissances des nombres naturels. Le calcul par lequel M. Nicole trouve les formules générales de la différence & de l'intégration des suites fractionnaires de sa seconde supposition est trop long , trop recherché , trop veritablement calcul , pour nous permettre d'y entrer.

S U R U N E M E T H O D E
*pour la transformation des nombres irrationels
en rationels.*

V. les M.
p. 55.

LES nombres irrationels sont des racines quelconques de nombres qui ne sont point les puissances correspondantes à ces racines. Ainsi les racines quarrées ou 2^{des} de 2 , de 3 , de 5 , &c. qui ne sont point des quarrés , ou des puissances 2^{des} , les racines cubiques ou 3^{mes} de 2 , de 3 , de 4 , de 5 , &c. qui ne sont point des cubes , ou des puissances 3^{mes} , les racines 4^{mes} , 5^{mes} , 6^{mes} , &c. à l'infini de 2 , de 3 , de 4 , de 5 , &c. sont des nombres irrationels. Il n'y a que peu de nombres qui soient quelque puissance , & ces nombres-là

fournissent chacun autant de nombres irrationnels, qu'il leur manque de puissances, c'est-à-dire une infinité. A plus forte raison, les nombres qui ne sont aucune puissance. De-là vient que dans les calculs scientifiques on rencontre beaucoup plus de nombres irrationnels, que de rationnels.

Les irrationnels sont naturellement inintelligibles à l'Esprit humain, au lieu que les autres sont l'objet de ses plus claires idées. On ne sçait ce que c'est que la racine 2^{de}, 3^{me}, 4^{me}, &c. de 2, on sçait seulement qu'elle est plus grande que 1, & moindre que 2, & d'autant moins au dessus de 1, & plus au dessous de 2, qu'elle est d'une dénomination plus élevée. Aussi les Anciens n'ont-ils point reconnu les nombres irrationnels pour les véritables nombres, ils les évitoient avec beaucoup d'art dans leurs solutions de Problèmes, qu'ils n'eussent pas crûes légitimes, si elles n'eussent abouti qu'à leur en donner, mais les Modernes plus hardis, ou forcés enfin à les admettre, parce qu'ils les rencontroient trop souvent, les ont reçûs, & soumis au calcul comme les autres, autant que leur nature l'a pû permettre. Nous n'allons traiter que des irrationnels, qui sont des racines quarrées, & par le mot de racine nous n'entendrons ici que celle qui est quarrée.

Puisque l'on ne peut avoir la valeur précise d'un irrationnel, & que l'on sçait seulement entre quelles limites il est compris, tout ce qu'on peut faire est d'approcher de cette valeur inconnue par des nombres rationnels qui soient au dessous : mais le moins au dessous qu'il se pourra, ou au dessus, mais le moins au dessus. La racine de 2 est 1, plus quelque quantité, mais quelle quantité ? Voici comme on s'y prend pour le déterminer autant qu'on le peut. 2 étant pris ici pour un quarré, il est certain que si on le multiplie par un véritable quarré, tel que 100, par exemple, le produit sera un quarré imparfait, que la racine de ce nouveau quarré sera plus grande que n'étoit celle de 2, & que divisée par 10, racine de 100, elle donnera une fraction qu'il faudra ajoûter à 1 pour avoir une racine de 2 plus grande que 1. On tire donc la racine de 200, racine imparfaite, puisque 200 n'est pas quarré.

Cette racine est 14, ou 10 plus 4, & cette grandeur divisée par 10 est 1 plus $\frac{4}{10}$, & $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ est ce qu'il faut ajouter à 1, pour approcher plus de la racine de 2 en dessous que 1 n'en approchoit.

En effet le rapport de 1 à la racine précise & inconnue, de 2 est tel, que le quarré de 1, qui est 1, est la moitié du quarré de cette racine, & par conséquent si l'on avoit deux nombres rationels tels que le quarré de l'un fût la moitié du quarré de l'autre, on auroit le rapport exact de 1 à la racine de 2 : mais puisque ce rapport exact ne se peut trouver, ces deux nombres ne se peuvent trouver non plus ; seulement en pourra-t-on trouver deux dont les quarrés approchent du rapport cherché. Or c'est ce qui se voit dans la grandeur $1\frac{2}{5}$, ou $\frac{7}{5}$ qu'on vient de déterminer, car il ne s'en faut qu'une unité que 49 quarré de 7 ne soit double de 25 quarré de 5, de sorte que le rapport de 5 à 7 représente à très-peu près celui de 1 à la racine de 2.

Mais cet *à très-peu près* n'empêche pas qu'on ne puisse encore approcher davantage du rapport de 1 à la racine de 2. Au lieu de multiplier comme on a fait dans l'operation précédente 2 par 100, il n'y a qu'à le multiplier par 10000, autre quarré dont la racine est 100, & la racine de 20000 qui sera 141, divisée par 100, marquera que la racine de 2 est 1 plus $\frac{4}{100}$ plus $\frac{1}{10000}$, de sorte que par la seconde operation on s'est approché de $\frac{1}{10000}$ de plus qu'on n'avoit fait par la premiere.

En multipliant encore 20000 par 100, & en opérant de même, on aura une nouvelle fraction plus petite que $\frac{1}{10000}$, qu'il faudra ajouter aux deux déjà trouvées, & par la repetition continuelle des operations, le nombre de ces fractions décroissantes augmentera toujours, sans que jamais leur somme puisse venir à faire un nombre rationel qui ajouté à 1 fût la racine précise de 2, ou ait son quarré égal à 2.

Ce sont là les approximations à l'infini connues de tous les Geometres, mais M. de Lagny les trouve defectueuses par plus d'un endroit. Elles ne se font que par des extractions de

racines, & ces opérations tâtonnent nécessairement aussi-bien que les divisions, dont elles sont une espèce, car toutes les fois qu'on a mis un-quotient trop fort, ce qui arrive souvent, on est obligé de le réduire, & de le réduire au hasard, puisqu'il y a de pis dans les approximations usitées, c'est que les fractions décroissantes, que l'on trouve toujours à chaque opération, ne suivent aucune règle. Leurs dénominateurs sont, à la vérité, réglés par la progression 10, 100, 1000, &c. mais les numérateurs ne le sont, ni ne le peuvent être en aucune manière, ce qui fait que les fractions mêmes ne peuvent se déterminer qu'une à une, & ne forment point de suite ou de série algébrique, qui soit un objet de science.

On s'est aperçu, il y a déjà quelque temps, que ces nombres fractionnaires $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{9}$, &c. représentent chacun, quoi-qu'imparfaitement, ainsi qu'il est inévitable, le rapport de 1. à la racine de 2. On l'a déjà vu sur $\frac{2}{5}$, & on le verra de même sur les autres. Ils sont tous tels que le carré du plus grand est double du carré du plus petit à une unité près, qu'il a de trop ou de trop peu, & cela alternativement, c'est-à-dire, que dans le 1^{er} terme qui est $\frac{1}{2}$ le carré 3 ayant une unité de plus que le double du carré de 2, il arrive dans $\frac{2}{5}$, 2^d terme que le carré de 7 a une unité de moins que le double du carré de 5, & toujours ainsi de suite.

L'unité étant donc toujours l'excès ou le défaut du plus grand carré, il est évident que plus ce carré est grand, plus elle est petite par rapport à lui, & par conséquent que $\frac{2}{5}$ approche plus du rapport cherché que $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{12}$ plus que $\frac{2}{5}$, &c. De sorte qu'en continuant toujours ces nombres, si on le peut, on aura toujours une expression rationnelle plus approchée du rapport de 1. à la racine de 2.

Or on peut les continuer à l'infini, le 1^{er} seul, ou un autre quelconque étant donné. Car si c'est $\frac{1}{2}$, par exemple,

on trouvera le dénominateur du suivant en ajoutant le numérateur 3 , & le dénominateur 2 de $\frac{1}{2}$, & pour avoir le numérateur qui doit répondre au nouveau dénominateur trouvé 5 , il faut ajouter ce dénominateur 5 au dénominateur 2 du terme précédent , & toujours de même à l'infini. M. de Lagni met cela très aisément en une formule algebrique générale , & l'on a une suite très régulière , formée par la seule addition , sans aucune opération tâtonneuse , & où les termes approchent toujours de plus en plus du rapport de 1 à la racine de 2.

Ce que M. de Lagni a fait sur cette racine de 2 , il le fait ensuite sur celle de 3. Son rapport à 1 peut être représenté par ces nombres fractionnaires $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{17}{11}$, &c. car le carré de 2 surpasse d'une unité le triple du carré de 1 , le carré de 5 est de deux unités moindre que le triple du carré de 3 , & ainsi de suite , de sorte que le carré du plus grand nombre est toujours alternativement plus grand d'une unité & moindre de deux unités qu'il ne faudroit. Cette différence des carrés excédants & défailants n'étant pas la même , il faut faire deux suites , dont l'une fera $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, &c. l'autre $\frac{5}{2}$, $\frac{17}{11}$, &c. Et M. de Lagni donne pour chacune une formule générale , qui est la même ; mais qui ne peut servir que pour chacune en particulier , & non pour les deux mises ensemble , comme nous les avons d'abord exposées. La loi ou formule de chacune de ces suites est qu'un terme précédent , tel que $\frac{2}{1}$ étant donné , le numérateur du suivant est le double du numérateur de ce précédent ajouté au triple de son dénominateur , & le dénominateur du suivant est le numérateur du précédent ajouté au double de son dénominateur. Les termes se forment toujours encore ici par la seule addition.

Le rapport du côté du triangle équilatéral inscrit dans le Cercle au rayon est celui de la racine de 3 à 1. Archimede dans sa quadrature du Cercle a eu besoin de ce rapport exprimé en nombres rationels , & il a choisi $\frac{1351}{760}$, & $\frac{265}{153}$. Le carré de 1351 est plus grand d'une unité que le triple du

quarré de 780, & le quarré de 265 est moindre de deux unités que le triple du quarré de 153. Or il se trouve que ces deux nombres fractionnaires sont compris dans les deux suites de M. de Lagni, & par cette raison il ne croit pas qu'Archimede les ait pris au hasard, quoique ses Commentateurs les plus zelés n'ayent jamais eu la pensée de lui attribuer un choix si judicieux. Il est vrai qu'on ne peut guere rien présumer de trop à la gloire d'un si grand & si rare génie.

M. de Lagni trouve ensuite les formules générales, qui appartiennent à la racine de 5, à celle de 6, de 7, &c. On voit bien que nous avons sauté celle de 4, parce qu'elle est rationnelle: mais quand toutes les formules des racines irrationnelles, qui expriment chacune en particulier une suite infinie, sont disposées selon leur ordre naturel, on s'apperçoit aussi-tôt qu'elles font elles-mêmes une nouvelle suite régulière, où cependant il manque des termes dans certains intervalles, & ces intervalles sont justement ceux où doivent être placées les racines rationnelles, qui viennent d'elles-mêmes, pour ainsi dire, se soumettre à l'analogie générale.

Nous pourrions ici donner une remarque sur les racines quarrées irrationnelles, que nous ne croyons pas qui ait encore été faite. Tous les nombres qui sont la somme d'un quarré & de sa racine, tels que 2, somme du quarré 1, & de sa racine 1, 6 somme de 4 & de 2, 12 somme de 9 & de 3, 20, 30, 42, 56, &c. que j'appelle pour abréger, nombres *mi-partis*, ont nécessairement leur racine quarrée irrationnelle. Si l'on dispose ces racines selon leur ordre naturel, celle de 2, de 6, de 12, &c. & que sous elles on dispose selon le même ordre les impairs, 3, 5, 7, &c. le rapport de 1 à chaque racine des *mi-partis* sera exprimé par celui de 2 à l'impair correspondant, de maniere que la différence ne fera jamais que d'une unité, & toujours en dessus. Le rapport de 1 à la racine de 2 premiere racine des *mi-partis*, est tel que ces deux quantités étant quarrées, le quarré de la plus petite est la moitié du quarré de la grande; or le quarré de 2 est la moitié du quarré de 3, premier impair, à cela près que le quarré de 3

excede d'une unité le double du quarré de 2. Le rapport de 1 à la racine de 6, seconde racine des mi-partis, est tel que le quarré de la plus petite de ces grandeurs est contenu six fois dans le quarré de la plus grande, & le quarré de 2 est contenu 6 fois dans le quarré de 5 second impair, si ce n'est que 25 excède 24 d'une unité. Le rapport de 1 à la racine de 12 est exprimé de la même maniere par celui de 2 à 7, &c. & il est très-aisé de démontrer cette propriété de ces suites de nombres.

Les rapports successifs de 2 à tous les impairs, qui expriment ceux de 1 aux racines des mi-partis, sont extrêmement approchés, puisqu'il n'y a dans les quarrés qu'une différence d'une unité, qui en emporte une bien moindre dans les racines dont il s'agit, & ces rapports sont très-réguliers, puisqu'on a toujours la même différence, & toujours du même côté.

Les nombres mi-partis ou leurs racines sont dans la suite naturelle des nombres, des points fixes par lesquels on peut juger des rapports de 1 aux nombres irrationnels intermédiaires. Ainsi puisque le rapport de 1 à la racine de 2, est celui de 2 à 3, & que celui de 1 à la racine de 6 est celui de 2 à 5, il faut que le rapport de 1 à la racine de 5 soit compris entre celui de 2 à 3, & celui de 2 à 5. Il faut que le rapport de 1 à la racine de 10 soit compris entre celui de 2 à 5, & celui de 2 à 7, & ainsi du reste.

Mais il y a plus, & on l'apperçoit déjà par ces exemples. Entre deux nombres mi-partis il y a toujours nécessairement un nombre quarré; entre 2 & 6 est 4, entre 6 & 12 est 9, &c. Le rapport rationnel de 1 à la racine de ces quarrés est nécessairement le même que celui de 2 au nombre moyen entre deux impairs. Le rapport de 1 à la racine de 4 est le même que celui de 2 à 4, qui est le nombre moyen entre 3 & 5. Le rapport de 1 à la racine de 9 est le même que celui de 2 à 6, nombre moyen entre 5 & 7, & toujours ainsi. Par conséquent le rapport de 1 à la racine de 5 est compris entre celui de 2 à 4, & celui de 2 à 5; le rapport de 1 à la racine de 10 est compris entre celui

celui de 2 à 6 & celui de 2 à 7. Dans ce même intervalle est compris aussi le rapport de 1 à la racine de 11.

Le rapport rationel de 1 à la racine d'un quarré étant donc toujours celui de 2 à un nombre pair, & le rapport de 1 à la racine du mi-parti qui suit ce quarré étant celui de 2 à l'impair qui suit le nombre pair posé, les rapports de 1 à toutes les racines irrationelles des nombres qui sont entre le quarré & le mi-parti suivant sont comprises dans le même intervalle. Ainsi le rapport de 1 à la racine de 49 étant celui de 2 à 14, & le rapport de 1 à la racine de 56, mi-parti suivant, étant celui de 2 à 15, le rapport de 1 aux racines de 50, 51, 52, 53, 54 & 55 sont entre le rapport de 2 à 14 & celui de 2 à 15. Tous les rapports de 1 aux racines de 57, 58, 59, 60, 61, 62 & 63 sont compris entre celui de 2 à 15, & de 2 à 16.

Plus un quarré & le mi-parti qui le suit ou le précède sont grands, plus il y a entr'eux de nombres intermédiaires; & comme en quelque nombre qu'ils soient ils partagent toujours entr'eux un intervalle égal qui est celui du rapport de 2 à un nombre pair, & à l'impair suivant, il suit que cet intervalle est toujours partagé en plus petites parties; & plus elles devront être petites, moins il y aura d'erreur à craindre en partageant cet intervalle également pour avoir les racines des nombres intermédiaires. En divisant en 6 parties égales l'intervalle qui est entre 14 & 15, on aura des nombres dont le rapport à 2 exprimera assez exactement les rapports des racines de 50, 51, 52, 53, 54 & 55 à 1. Cela fera encore plus vrai ou plus sûr, quand les nombres intermédiaires étant en plus grand nombre dans des intervalles toujours égaux, ils y feront plus serrés, & les rapports moins différens.

On pourroit bien par quelques autres considérations diminuer encore le peu d'incertitude qui reste dans ces intervalles, & donner quelques nouveaux points fixes sans sortir de cette petite theorie: mais ce n'est pas la peine de la pousser plus loin, il sembleroit qu'on auroit voulu lui donner plus de relief qu'elle n'en mérite.

Pour revenir à M. de Lagni, il promet d'étendre aux racines 3^{mes}, 4^{mes}, &c. ce qu'il ne donne ici que sur les 2^{des}. Le tout se liera nécessairement avec ce que nous avons déjà

* p. 63. rapporté d'après lui en 1722 * *sur la Resolution des Equations*
& suiv. *determinées de tous les degrés* ; car le plus souvent ces résolutions ne se terminent qu'à des racines irrationnelles quelconques, qui par les Methodes de M. de Lagni deviendront plus traitables, & en quelque sorte moins inconnues.

* p. 42. **L**Es combinaisons des Carreaux de deux couleurs mi-partis par une Diagonale qui, ainsi que nous l'avons dit en 1721 * avoient été traitées avec succès par le P. Doüat Religieux Carme, l'ont été aussi par le P. Meliton de Perpignan, Capucin, ancien Professeur en Theologie, & Gardien du Couvent de Perpignan, qui a communiqué son Ouvrage à l'Académie. Elle y a trouvé beaucoup de travail & de méthode. Il ajoute à celui du P. Doüat beaucoup de détail ; & ce qui est considérable en cette matiere, & le principal objet de l'Auteur, il détermine parmi un nombre innombrable d'arrangements possibles de carreaux le petit nombre de ceux qui forment les figures les plus agréables, & il en règle le choix. Il donne une pratique aisée & très-méthodique pour l'exécution des divers desseins composés de ces figures.





GEOMETRIE.

SUR UNE PROPRIETE' DES POLYGONES *inscrits ou circonscrits au Cercle.*

M Saurin examinant une prétendue quadrature du cercle présentée à l'Académie, découvrit dans les Polygones inscrits & circonscrits au cercle une propriété de même espece qu'une autre que l'on y connoissoit déjà. Celle-ci est que si on a deux polygones réguliers, l'un d'un nombre de côtés quelconque, & que j'appelle *simple*, l'autre d'un nombre de côtés double, & que j'appelle pour cette raison le Polygone *double*, on a toujours en progression géométrique continue, le polygone simple circonscrit au cercle, le double inscrit & le simple inscrit, par exemple, le triangle équilatéral circonscrit, l'exagone inscrit, & le triangle inscrit. Il est visible qu'il s'agit des aires de ces figures, & tout le monde sçait qu'un polygone circonscrit a une aire plus grande que le polygone semblable inscrit, & que le circonscrit a une aire d'autant plus grande par rapport à celle du cercle, qu'il a moins de côtés, & l'inscrit au contraire une aire d'autant plus petite, d'où il suit que l'un & l'autre approchent d'autant plus de l'aire du cercle, qu'ils ont plus de côtés.

La nouvelle propriété due à M. Saurin est que le polygone simple circonscrit, le double circonscrit & le double inscrit sont en progression harmonique, c'est-à-dire, que le premier terme est au troisieme, comme la différence du premier au second est à la différence du second au troisieme. Tels seront donc le triangle circonscrit, l'exagone circonscrit, & l'exagone inscrit. M. Saurin l'a démontré en général d'une maniere très-aisée & très-courte.

H ij

Selon l'idée d'Archimede, la plus naturelle, & même la plus lumineuse de toutes celles qu'on peut jamais prendre pour la quadrature du cercle, si on conçoit un polygone d'un nombre infini de côtés circonscrit, & un autre semblable inscrit au cercle, le circonscrit & l'inscrit se confondent; leurs aires sont égales, & la même que celle du cercle. Cette confusion ou cette identité ne se trouve que dans l'infini, & nullement dans le fini; & quand on imagine qu'un polygone circonscrit se confond avec le semblable inscrit, auquel cas l'un & l'autre devient le cercle, on imagine ou l'on suppose nécessairement que ce polygone a une infinité de côtés.

Il suit de la première propriété des polygones que si dans la progression géométrique qu'elle donne on suppose les deux termes extrêmes égaux, le moyen le sera aussi, c'est-à-dire, qu'un polygone d'une infinité de côtés étant égal au cercle, soit qu'il lui soit circonscrit ou inscrit, un autre polygone d'un nombre infini de côtés deux fois plus grand, n'en sera pas plus égal au cercle, quoique dans le fini un polygone approche d'autant plus d'être égal au cercle, qu'il a plus de côtés.

Il suit aussi de la seconde propriété qui donne une progression harmonique, que si on y suppose les deux derniers termes égaux, le premier le sera, c'est-à-dire, qu'un polygone d'une infinité de côtés étant égal au cercle, un polygone d'une infinité de côtés la moitié moindre, n'en sera pas moins égal au cercle. Ainsi dès qu'un polygone a une infinité de côtés, il ne gagne rien & ne perd rien par rapport à son égalité avec le cercle pour avoir plus ou moins de côtés.

Il est vrai cependant qu'on peut concevoir la chose un peu autrement. Quand on imagine la confusion d'un polygone infini circonscrit avec le semblable inscrit, cette confusion peut n'être pas une identité parfaite, mais laisser une différence infiniment petite qui ne sera pas comptée. Alors il sera toujours constant que plus un polygone infini aura un grand nombre infini de côtés, plus il approchera d'être exactement égal au cercle, ou plus la différence infiniment petite avec le cercle sera petite. Elle passera même par tous les ordres

d'infiniment petit sans arriver jamais à être absolument nulle; ce qui fait qu'il est inutile de la considérer, & qu'il suffit de concevoir le polygone égal au cercle comme ayant le moindre nombre infini possible de côtés.

De ce qui a été dit sur les deux progressions, l'une géométrique, l'autre harmonique, il suit que plus le polygone simple a de côtés, plus les rapports de l'une & de l'autre progression sont petits. Par exemple, si l'on a ces deux progressions géométriques, l'une, le triangle circonscrit, l'exagone inscrit, le triangle inscrit; l'autre, le carré circonscrit, l'octogone inscrit, le carré inscrit, les rapports de la 2^{de} sont moindres que ceux de la 1^{re}, c'est-à-dire que le carré circonscrit n'est pas si grand par rapport à l'octogone inscrit, que le triangle circonscrit par rapport à l'exagone inscrit, &c. Ces rapports doivent toujours aller en diminuant, puisqu'on a vu que les termes de ces progressions arrivoient enfin à l'égalité. Il en va de même, & par la même raison, de la progression harmonique de M. Saurin.

SUR L'UNIVERSALITE DES FIGURES.

ON voit du premier coup d'œil qu'il doit y avoir plus de quadrilateres possibles que de triangles, plus de pentagones réguliers ou irréguliers, que de quadrilateres, &c. parce que dans la combinaison qui doit former tous les quadrilateres, il entre plus d'éléments, c'est-à-dire ici, plus de côtés & d'angles changeans ou variables, qu'il n'en entre dans la combinaison qui forme les triangles, & ainsi des autres polygones, à mesure qu'ils ont plus de côtés, & par conséquent d'angles. On voit aussi que chacune de ces espèces de figures doit en contenir une infinité; mais une infinité plus grande selon le polygone, & apparemment même d'un ordre supérieur. C'est ce que M. Saulmon appelle l'*universalité des figures*, & il s'agit de la déterminer.

Si l'on suppose que l'on ait la plus petite ligne finie pos-

sible, & qu'ensuite elle augmente toujours également, elle deviendra successivement une infinité de droites différentes, & enfin sera une droite infinie. C'est précisément la même chose que la suite des nombres naturels. Cet infini qui comprend toutes ces droites est un infini du 1^{er} ordre. Il est vrai que l'on n'a pas la plus petite droite possible, & qu'avant celle qu'on a supposée, il y en a une infinité; il est vrai de plus, qu'au lieu des accroissemens toujours égaux qu'on suppose qu'elle prend, elle en pourroit prendre une infinité de différens à chaque pas, de la même maniere qu'entre deux nombres consécutifs quelconques de la suite naturelle, il peut y en avoir une infinité, ce qui multiplieroit infiniment le nombre des termes de la suite naturelle, & celui des droites: mais il n'importe; comme les droites ne sont susceptibles d'aucune imposition, leur infini est le moindre que l'on puisse considérer en cette matiere, & il est toujours en ce sens le 1^{er} infini, ou infini du 1^{er} ordre.

Il en va même de toutes les figures, qui quoique composées d'élémens, ne le sont que d'élémens qui ne varient que d'une seule façon. Tels sont tous les triangles semblables à un triangle quelconque déterminé, qui ne peuvent varier que par la grandeur, & non par le rapport de leurs côtés, ni par leurs angles. Tels sont tous les quarrés, & en général tous les polygones réguliers. Leur infini n'est que le même que celui des lignes droites.

Mais c'en sera un autre bien différent, si l'on considère tous les triangles possibles, par exemple, dans toute la variété que peuvent y apporter la différente grandeur des côtés, & celle des angles. Voici comment on peut déterminer l'ordre dont sera leur infini par rapport à celui des lignes droites, ou des triangles semblables à un donné.

Je suppose qu'il n'y ait que 10 triangles équilatéraux possibles, dont le 1^{er} & le plus petit possible a ses côtés de 1 pouce chacun, le 2^d de 2, &c. Je prends deux côtés du 1^{er}; & en augmentant l'angle qu'ils font entr'eux, je lui donne pour base 2 pouces, côté du 2^d équilatéral, ensuite 3 pouces,

côté du 3^{me} équilatéral, & toujours ainsi jusqu'à la base de 10 pouces; moyennant quoi j'aurai 9 triangles isosceles différens, mais dont les côtés égaux seront de 1 pouce. J'aurai de même pour chaque autre équilatéral 9 triangles isosceles, & par conséquent 90 isosceles en tout.

Je prends maintenant le premier isoscele, dont les côtés sont 1, 1, & 2, & j'en fais un scalene, en lui donnant pour côtés 1, 2 & 3, ensuite 1, 2 & 4, 1, 2 & 5, &c. c'est-à-dire que je lui laisse toujours deux côtés inégaux constans, & change le troisieme, ce que je puis faire 8 fois sur ce seul isoscele, & par conséquent 8 fois aussi sur chacun des autres 9 isosceles, & par conséquent les 90 isosceles me donnent 720 scalenes.

Ce nombre des scalenes est le produit de 10, 9 & 8, ou 10; 10 moins 1, 10 moins 2, 10 étant le nombre de tous les équilatéraux, 9 le nombre des isosceles que j'ai formés sur chaque équilatéral, 8 le nombre des scalenes que j'ai formés sur chaque isoscele.

La somme de tous les triangles possibles dans ma supposition est celle de 10, 90 & 720.

Je raisonnerai de même si je suppose qu'il n'y ait que 20 équilatéraux possibles. Le nombre des scalenes sera le produit des trois nombres 20, 19 & 18.

Mais si je conçois que le nombre des équilatéraux est un infini du 1^{er} ordre, comme il l'est réellement, alors le nombre des scalenes est le produit de trois nombres, qui sont, l'infini, l'infini moins 1, l'infini moins 2, c'est-à-dire, trois infinis égaux, & il est un infini du 3^{me} ordre. Et ce nombre des scalenes est la somme de tous les triangles possibles, équilatéraux, isosceles & scalenes; car la somme des équilatéraux ne fera qu'un infini du 1^{er} ordre, celle des isosceles un infini du 2^d, & toutes deux seront nulles par rapport à la somme des scalenes.

Puisque j'ai tous les triangles qui sont possibles par la variation de la grandeur de leurs côtés, & du rapport de leurs côtés entr'eux, j'ai en même-temps tous les triangles qui

sont possibles par la variation de leurs angles ; car le rapport des côtés étant déterminé , celui des angles l'est aussi.

L'infini qui exprime le nombre de tous les triangles possibles par la variation de leurs côtés est du 2^{me} ordre, c'est-à-dire que son exposant 3 est égal au nombre de toutes les especes possibles de triangles pris par rapport à leurs côtés ; car il faut ou que leurs trois côtés soient égaux , ou que deux seulement le soient , ou que tous trois soient inégaux. Donc pour avoir aussi le nombre de tous les quadrilatères possibles pris par rapport à leurs côtés, il faut voir combien il y en a d'especes , & ce nombre sera un infini dont l'exposant sera égal au nombre de ces especes. Or il ne peut y avoir que celles-ci. 1^{re} espece. Les quatre côtés égaux. 2^{de}. Trois côtés égaux, & un inégal. 3^{me}. Deux côtés égaux, & deux autres égaux aussi , mais différens des premiers. 4^{me}. Deux côtés égaux , & deux inégaux. 5^{me}. Quatre côtés inégaux. L'infini des quadrilateres est donc du 5^{me} ordre , à ne considérer que leurs côtés.

Mais la détermination des côtés n'emporte pas celle des angles dans les quadrilateres comme dans les triangles ; & si l'on considere les angles des quadrilateres, leur infini doit s'élever d'ordre. La 1^{re} espece où les quatre côtés sont égaux, comprend également les quarrés dont tous les quatre angles sont droits , & les rhombes qui n'en ont aucun droit. Un quarré étant déterminé de grandeur , il peut y avoir une infinité de rhombes qui auront les mêmes côtés , & par conséquent le nombre des quadrilateres de la 1^{re} espece est un infini du 2¹ ordre. De même la 3^{me} espece où sont deux côtés égaux , & deux autres égaux différens , comprend tous les parallélogrammes rectangles, & tous les rhomboïdes, & pour chaque parallélogramme rectangle il peut y avoir une infinité de rhomboïdes. Cet infini est donc encore un infini du 2¹ ordre. Pour les trois autres especes, on verra aisément que l'infini de chacune n'est qu'un infini simple ou du 1^{er} ordre. Donc il faut ajouter 2 à l'exposant de l'infini total déjà trouvé, & le nombre de tous les quadrilateres possibles, tant
par

par rapport à la variation de leurs côtés qu'à celle de leurs angles, fera un infini du 7^{me} ordre.

On pourroit appliquer cette théorie aux polygones suivans, au pentagone, à l'exagone, &c. & peut-être trouveroit-on quelque progression réglée entre les exposans croissans des infinis des différens polygones consécutifs. Mais on s'en est épargné la peine, parce qu'on ne voit pas qu'il en dût résulter rien d'assez intéressant. Ceci n'est que pour donner une idée de ce que M. Saulmon appelle l'universalité des figures, & non pas même pour en donner une de sa théorie, qui étoit assez différente.

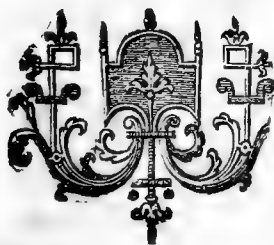
Nous renvoyons entierement aux Mémoires

L'écrit de M. de Beaufort sur une proposition élémentaire sur les triangles.

V. les M.
P. 79.

Et les dernières remarques de M. Saurin sur un cas singulier du problème des tangentes.

V. les M.
P. 222.





ASTRONOMIE.

SUR L'APOGÉE ET LE PÉRIGÉE, ou l'Aphélie & le Périhélie des Planètes.

V. les M.
P. 143.

TOUS les corps célestes de notre monde, ou tourbillon solaire, font des révolutions en ligne courbe autour d'un point ; & comme les courbes qu'ils décrivent ne sont point exactement des cercles, & quelquefois en sont assez éloignées, & que ces points auxquels leurs mouvements se rapportent ne sont point des centres de cercles, il arrive nécessairement qu'ils en sont inégalement éloignés en différentes parties de leur révolution. S'ils tournoient tous autour de la terre, comme l'ont crû les premiers astronomes, le point où ils en seroient les plus éloignés s'appelleroit *Apogée*, & le point opposé *Périgée* : mais maintenant que l'on sçait, car comment se défendre du système de Copernic ? que toutes les planètes principales tournent autour du soleil, il faut appeller *Aphélie* & *Périhélie*, ce qu'on eût appelé apogée & périgée : Cela n'empêche pas que ces planètes principales ne soient tantôt dans leur plus grande, tantôt dans leur moindre distance de la terre, & qu'en ce sens elles ne soient dans leur apogée & dans leur périgée : mais parce que leurs mouvements se rapportent au soleil & non à la terre, ces apogées & ces périgées sont en quelque sorte des points accidentels dans leur cours, & non pas des points essentiels, tels que les aphélies & périhélies. Il n'y a que la lune, qui parce qu'elle tourne autour de la terre, a un apogée & un périgée proprement dit. Si l'on connoissoit assez exactement les mouvements des lunes ou satellites de Jupiter & de Saturne pour y reconnoître leurs plus grandes & plus petites distances à

l'égard de leurs planetes principales, il faudroit faire de nouveaux mots pour exprimer ces points de leurs orbes. Quoique l'on soit persuadé que la terre se meut autour du soleil, on appelle toujours apogée & périgée ce qui est réellement aphélie & perihélie : mais c'est par la même raison que l'on dit toujours le lever & le coucher du soleil. Une erreur, qui a long-tems dominé, laisse toujours des traces.

L'aphélie, ou l'apogée, car il suffit d'en parler, puisque le perihélie & le périgée leur sont toujours diamétralement opposés, sont des points principaux dans les orbes des planetes, & dont la détermination influe sur toute la théorie de leurs mouvemens. M. Cassini a rassemblé sur une matiere si importante tout ce que les vûes des astronomes qui l'ont précédé, & les siennes propres, ont pû lui fournir de plus exact & de plus facile dans la pratique.

Il faut prendre l'aphélie ou l'apogée par rapport au point autour duquel la planete se meut réellement. Il faut donc prendre l'aphélie des planetes principales par rapport au soleil, c'est-à-dire, déterminer dans quel lieu du ciel est l'aphélie de ces planetes dont le mouvement seroit vû du soleil, où nous ne sommes pas. Si nous y étions, nous les verrions toujours dans leurs lieux *vrais*, nous verrions les inégalités *vraies* de leur mouvement, & quand nous aurions par observation deux parties ou arcs de leur orbe éloignés l'un de l'autre où leur mouvement seroit égal, nous serions sûrs que le point précis du milieu seroit celui de l'aphélie, ou répondroit à son lieu vrai dans le Ciel, car de part & d'autre de l'aphélie ou de l'apogée, à distances égales, le mouvement est égal. Mais de la terre nous ne voyons point les planetes dans leurs lieux vrais, à moins qu'elles ne soient sur la même ligne droite que le soleil & la terre, auquel cas nous les voyons dans le même lieu où elles sont vûes du soleil. Ce cas ne peut arriver que quand elles sont en conjonction ou en opposition.

Les planetes inférieures, Mercure & Venus, ne sont proprement qu'en conjonction, mais elles ont deux sortes de conjonction : lune *supérieure*, quand elles passent derriere le

68 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
soleil qui est entr'elles & nous, l'autre *inférieure*, quand elles passent entre le soleil & nous. Dans la supérieure, si elles passent précisément derrière le soleil, elles nous sont absolument cachées, & si elles ont une latitude plus grande que le demi-diametre du soleil, ou, ce qui est le même, qu'elles soient au-dessus ou au-dessous de cet astre à quelque distance, comme elles sont alors dans leur plus grand éloignement de la terre, elles sont toutes deux trop petites pour être vûes par la lunette. Dans la conjonction inférieure, si elles passent sur le disque du soleil, on les y verra comme des taches, mais cela est très-rare; le plus souvent elles ont une latitude plus grande que le demi-diametre du soleil, & en sont à quelque distance au-dessus ou au-dessous: mais alors Mercure est trop petit pour être vû, & il n'y a que Venus qu'on puisse appercevoir. Il est donc très-rare de voir de la terre les deux Planetes inférieures dans leur lieu vrai.

A l'égard des planetes supérieures Mars, Jupiter & Saturne, on ne les voit point dans leurs conjonctions, parce qu'alors elles sont ou immédiatement derrière le soleil, ou si proches de lui, qu'elles sont absorbées dans sa lumiere, & d'ailleurs elles sont alors dans leur plus grande distance de la terre. Elles sont très-visibles dans leurs oppositions, qui arrivent au milieu de la nuit, & où elles sont dans leur plus grande proximité de la terre: mais à peine chacune d'elles est en opposition une fois par an.

On n'a donc que peu d'observations des lieux vrais des planetes, qui sont cependant les fondemens nécessaires de la détermination des aphélies.

Quant au soleil & à la lune, nous avons toujours par observation leurs lieux vrais, puisque le soleil est le point où se rapporte le mouvement de la terre, & que la terre est celui où se rapporte le mouvement de la lune.

Il faut pourtant remarquer que la lune moins réguliere que tous les autres corps celestes connus, peut-être, comme nous l'avons quelquefois insinué, parce que nous la voyons de plus près, n'a pas toujours un mouvement égal à distances

égales de son apogée. Elle est sujette à certains écarts, non pas tout-à-fait imprévus *, mais qui suffiroient pour rendre fautif un calcul où l'on auroit supposé un orbe plus exact. Elle n'a de régularité sûre que dans ses conjonctions ou oppositions, & ce n'est qu'en ces temps-là qu'il faut compter que les points observés de son cours appartiennent à une même courbe uniforme.

* V. l'Hist.
de 1702.
p. 75. &
suiv. 2^{de}
Edit.

C'est donc une méthode générale pour la détermination des aphélies ou apogées des planetes, que d'avoir des observations de leurs lieux vrais en assez grand nombre pour y pouvoir choisir deux temps égaux, pendant lesquels le mouvement d'un lieu vrai à un autre ait été égal.

Si l'on n'a pas assez d'observations pour y trouver le mouvement vrai égal pendant deux différens espaces de temps égaux, on y peut suppléer ainsi. On ne laisse pas de déterminer l'aphélie ou apogée tel qu'il seroit si le mouvement vrai avoit été égal, il est certain que cet aphélie ou apogée est mal placé à proportion de ce que le mouvement a été plus inégal dans les deux temps. On prend ensuite un troisieme espace de temps égal aux deux premiers, & qui comprenne l'un ou l'autre presque entier, pendant lequel le mouvement ait été encore ou plus grand ou plus petit, & par le moyen de ce troisieme espace de temps comparé à l'un des deux premiers, on fait une seconde détermination fautive de l'aphélie ou apogée. Mais entre les deux lieux faux où on l'a placé, se trouve celui où il est réellement, & on le détermine par la différence des deux lieux faux, dont on prend une partie proportionnelle aux différentes inégalités de mouvement qu'on a employées. C'est une règle de fausse position appliquée à cette matiere.

Cette méthode, quoique générale dans la théorie, ne peut guere être d'usage que pour le soleil, à cause du grand nombre de lieux vrais qu'il faut avoir par observation; nous allons donner quelque idée d'une autre aussi générale, & qui peut être employée dans la pratique pour toutes les planetes, qui ne demande absolument que trois observations: mais

70 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
aussi qui suppose une connoissance de plus que la premiere.

Tous les astronomes conviennent aujourd'hui que toutes les planetes principales décrivent autour du soleil, & la lune autour de la terre une ellipse, que le soleil est un des foyers des ellipses des planetes; & la terre un des foyers de l'ellipse de la lune. L'aphélie de chaque planete est l'extrémité de son grand axe la plus éloignée du foyer où est le soleil, & le perihélie l'autre extrémité; il en va de même de l'apogée & du périégée de la lune.

Chaque ellipse est différente d'une autre, c'est-à-dire que le rapport du grand axe au petit y est différent, ce qui n'empêche nullement que le soleil ne soit un foyer commun aux ellipses de toutes les planetes principales. Plus dans une ellipse le rapport du grand axe au petit est grand, plus l'ellipse est différente d'un cercle, & plus le mouvement qui se fait sur cette ellipse est différent de celui qui se feroit en même temps sur un cercle correspondant, c'est-à-dire que le mouvement sur un cercle étant uniforme, & faisant parcourir des espaces égaux en temps égaux, celui qui se feroit sur l'ellipse ne le feroit pas, & feroit d'autant plus éloigné de l'être que cette ellipse feroit plus différente du cercle. Le mouvement de la planete sur son ellipse est son mouvement *vrai*, & celui qu'elle auroit sur un cercle correspondant est le *moyen*. Celui-ci est toujours égal, & l'autre inégal.

Il suit de-là que selon la différente espece de chaque ellipse, le mouvement vrai y est plus ou moins inégal par rapport au moyen; & réciproquement que le différent rapport du mouvement vrai au moyen doit déterminer la différente espece de chaque ellipse. Or l'espece d'une ellipse étant déterminée, on a le rapport de son grand & de son petit axe, & les deux extrémités de son grand axe qui passe nécessairement par le soleil sont l'aphélie & le perihélie de la planete.

On a toujours le mouvement moyen d'une planete. Il faut avoir par trois observations trois de ses lieux vrais, ce qui donne le rapport de deux portions du mouvement vrai au moyen fait en même temps. Par-là on détermine sur l'orbe

de la planete trois points qui doivent appartenir à une ellipse, & comme la position de ces trois points entr'eux comparée à celle qu'auroient les trois points correspondants du mouvement moyen dépend du rapport de ces deux mouvements, elle suffit pour déterminer la nature de l'ellipse. Cela ne laisse pas de demander une construction géométrique assez compliquée, & assez fine. Feu M. Cassini a été le premier qui a imaginé cette méthode. C'est ce problème dont nous avons parlé dans son éloge en 1712 *, que les plus grands mathématiciens jugeoient impossible, & qu'il résolut à 26 ans.

* p. 86.

Il y a deux manieres de prendre le mouvement moyen des planetes, en supposant qu'elles décrivent des ellipses. L'une est celle de Kepler qui divise l'ellipse en secteurs égaux terminés par des arcs inégaux, desorte que les aires des secteurs représentent le mouvement moyen, & les arcs le vrai. L'autre consiste à décrire un cercle autour du foyer où le soleil n'est pas. Nous les avons expliquées toutes deux en 1710 *. M. Cassini donne la méthode de les employer l'une & l'autre dans la recherche des aphélies par le rapport du mouvement vrai au moyen. Elles produisent quelque différence, mais legere, dans le lieu de l'aphélie. Les astronomes sont bien persuadés qu'il ne faut pas s'attendre sur ce point à une aussi grande précision que sur quelques autres. Comme de ces deux manieres celle de Kepler est la plus conforme à la Physique, ainsi que nous l'avons dit en 1710, il semble qu'elle mérite la préférence, & qu'il vaut mieux s'en tenir aux aphélies qu'elle donne. Du moins elle est plus sûre, selon M. Cassini, pour les planetes dont l'ellipse est plus différente d'un cercle, telles que Mars & Mercure. M. Cassini donne dans cette hypothese une méthode nouvelle.

* p. 106.
& 107.

Aux méthodes générales se joint à l'égard du soleil & de la lune une méthode particuliere qui n'a lieu que pour eux, fondée sur la variation de leur diametre apparent. Il est bien certain que quand il est le plus petit, ils sont dans leur plus grand éloignement de la terre, ou dans leur apogée. Pour toutes les autres planetes, leur diametre apparent ne varie

pas assez sensiblement pour donner prise, & on ne distingueroit pas assez les degrés successifs de sa variation.

On voit assez que ce qui a été fait à l'égard de deux mouvemens vrais égaux en deux temps égaux pour une planète quelconque, il faudra le faire ici pour le soleil & pour la lune à l'égard de deux diamètres apparens égaux; & quand on les aura eus par observation, trouver les lieux vrais où étoit alors l'une ou l'autre planète, & prendre le point du milieu de cet intervalle, qui fera le lieu vrai de l'apogée.

Si les deux diamètres égaux du soleil sont ceux qu'il a eus à deux différentes hauteurs méridiennes, il faut ne les compter pour égaux qu'après qu'ils auront été corrigés selon la réfraction & la parallaxe dûe à chaque hauteur. Mais s'ils sont pris à des heures où le soleil ait été à la même hauteur sur l'horison, il n'y aura plus de correction à faire pour la réfraction ni pour la parallaxe qui auront été égales de part & d'autre, puisque toutes deux ne varient que par rapport aux différentes hauteurs horizontales.

On ne peut avoir de diamètre apparent de la lune que dans l'opposition, puisqu'il n'est entier qu'en ce temps-là. Quand on ne laisse pas de voir la partie obscure du disque de la lune aussi-bien que celle qui est éclairée, on n'a pas pour cela le diamètre total, parce que la partie éclairée diminue sensiblement par son éclat la grandeur apparente de l'obscur, & on ne sçait pas précisément de combien. D'ailleurs, comme il a été dit, le mouvement de la lune est trop peu régulier hors de ses conjonctions ou oppositions, & on pourroit se tromper sur ses lieux vrais, qu'il faut pourtant avoir dans une grande justesse pour la détermination de l'apogée.

Il pourroit sembler que jusqu'ici nous avons laissé incertain si c'étoit un apogée ou un périgée, un aphélie ou un perihelie que l'on déterminoit, car ils se trouvent également l'un & l'autre entre deux mouvemens égaux ou entre deux diamètres égaux. Mais le doute ne peut pas subsister longtemps, il ne faut que voir si les mouvemens ou les diamètres alloient en augmentant de grandeur, en ce cas c'est sûrement

un

un apogée ou un aphélie qu'on a trouvé entr'eux, & au contraire. D'ailleurs on sçait déjà, du moins à peu près, quels sont les lieux de tous les apogées ou aphélies, & c'est de part & d'autre de ces lieux-là qu'on cherche des mouvemens ou des diametres égaux. Il ne s'agit presque que de vérifier, ou de déterminer plus précisément; & plus l'Astronomie se perfectionne, plus elle a de peine à se satisfaire sur ce point.

SUR UNE COMETE.

D EPUIS 1707 on n'avoit point observé de comete, à l'exception d'une qui ne fut vûe qu'à Berlin aux mois de Janvier & de Février 1718. Cette année on apperçut à l'Observatoire une comete le 18 Octobre dans la constellation du Capricorne, & on ne put la suivre que jusqu'au 5 Novembre. Il seroit bon de se rappeler ici tout ce qui a été dit sur le sujet des cometes dans les Hist. de 1699*, 1702*, 1706*, 1707* & 1708.

La comete vûe avec une lunette de 16 pieds, avoit dans son milieu une lumiere blanchâtre & assez claire, le reste étoit une grande chevelure ou nébulosité, toujours moins éclatante & moins dense à mesure qu'elle s'éloignoit de la tête de la comete, confuse & mal terminée vers ses bords & à sa circonférence extérieure. Une observation heureuse & singuliere apprit à M. Maraldi que cette nébulosité ou atmosphere lumineuse étoit & fort transparente & fort grande par rapport au corps solide de la comete; car il vit au travers de cette atmosphere une petite étoile fixe, & la vit presque jusqu'à ce qu'elle en eût touché le centre.

Par les observations de 18 jours, & par la theorie de feu M. Cassini, expliquée dans les volumes cités, M. Maraldi trouva que la comete alloit du Midi au Septentrion, décrivant assez exactement un grand cercle qui coupoit l'Eclipti-

Hist. 1723,

K

V. les M^{ss}
p. 250.

* p. 72. &
suiv.
* p. 65. &
suiv.
2^{de} Edit.
* p. 104. &
suiv.
* p. 103 &
suiv.
* p. 97. &
suiv.

74 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
 que au 8^{me} degré d'Aquarius, & en déclinoit de 15 degrés vers l'Occident, que le 14 Octobre elle avoit dû passer par son périégée, qui se trouvoit entre la constellation du phenix, & la fixe appelée *Canopus*; que comme cette partie du ciel, qui est dans l'hémisphere austral, est invisible sur notre horizon, la comète dans son périégée, & avant que d'y arriver, n'avoit pu être vûe, qu'elle n'avoit pu l'être que le 17 Octobre, où le temps fut couvert; qu'à son périégée son mouvement étoit de plus de 17 degrés en 24 heures, que le 5 Novembre où l'on cessa de la voir, tant à cause des nuages, que du clair de lune, son mouvement n'étoit plus que d'un tiers de degré, 50 fois moindre qu'au périégée.

Si les comètes étoient d'autant plus proches de la terre, que leur mouvement dans le périégée seroit plus grand, celle-ci seroit une des plus proches qu'on ait observées, depuis qu'on a appris à les bien observer. On n'en connoitroit guere qui eût passé plus près qu'elle de la terre, que celle de 1472 dont nous avons parlé en 1708, & à qui l'on donne un mouvement de 40 degrés par jour: mais on ne la compte pas à cet égard pour bien sûre. Cette conséquence d'un plus grand mouvement à une plus grande proximité n'est pas légitime pour les comètes, comme elle peut l'être pour les planètes. Le mouvement des comètes ne paroît nullement se rapporter à la terre. Il est déjà assez surprenant & assez peu conforme au système commun des comètes que l'on ait trouvé par la parallaxe la seconde comète de 1702, cinq fois seulement plus éloignée de la terre que la lune: celle-ci en seroit au contraire plus proche; car la lune ne fait que 13 degrés par jour.

Il n'y auroit que la parallaxe qui pût donner sûrement la distance d'une comète. Pour cela il faudroit suivre la méthode inventée par feu M. Cassini, & expliquée en 1706 * sur la recherche de la parallaxe de Mars, c'est-à-dire, comparer au mouvement d'une étoile fixe pendant une nuit assez longue le mouvement de la comète, comme il y comparoit celui

de Mars. Cela demande absolument que Mars ou la comete se meuvent assez long-temps dans un même cercle parallele à l'équateur que la fixe ; autrement leur mouvement ne pourroit se comparer à celui de la fixe par rapport à l'horison , ainsi qu'il est nécessaire pour découvrir une parallaxe. Mars dont le mouvement propre est selon le Zodiaque & à peu-près selon l'écliptique : peut bien décrire pendant une nuit un parallele à l'équateur ; mais la comete de cette année n'en pouvoit pas décrire un , puisque , comme on l'a vû , son mouvement coupoit l'écliptique. C'est ce qui a empêché M. Maraldi de pouvoir déterminer , ou même rechercher sa parallaxe.

On verra qu'elle a avec celle de 1707 quelques conformités qui pourroient la faire prendre pour la même comete revenue au bout de 16 ans. L'une & l'autre alloit du midi au septentrion , elles ont coupé l'écliptique , ou , ce qui est le même , ont eu leur nœud à 2 degrés près l'une de l'autre. D'un autre côté elles ne s'accordent pas sur des points essentiels. Leurs orbites ont été différemment inclinées à l'écliptique ; il est vrai que cette différence n'est pas plus grande que celle qu'on est obligé d'admettre dans la même orbite de la lune. Mais ce qu'on ne peut passer, c'est leur différence de mouvement au périégée , celle de 1707 n'y avoit que 10 degrés par jour. Ce n'est pas , comme nous l'avons dit ailleurs , que ces différences empêchent absolument que deux cometes ne soient la même : mais elles suffisent pour nous empêcher d'assurer qu'elles soient la même. Les systèmes iroient bien vite , si nous voulions nous en croire , & un des plus grands efforts de l'esprit philosophique est d'attendre pour les établir que l'on ait assez de fondemens.

SUR LA CONJONCTION DE MERCURE avec le Soleil, du 9 Novembre.

V. les M.
pag. 105.
259. 285.
& 306.
* p. 106.
& suiv.
* p. 83.
& suiv.

LE mouvement de Mercure est difficile à connoître, & en effet peu sûrement connu jusqu'ici. Nous en avons parlé assez au long en 1706* & 1707*.

On n'a pû voir que depuis l'invention des lunettes les conjonctions de Mercure avec le soleil dans la partie inférieure de son orbite, lorsque Mercure a assez peu de latitude pour passer dans le disque du soleil, rencontres où il est le plus aisé de déterminer les lieux vrais de cette Planete, parce qu'ils sont alors les mêmes que ceux du soleil : mais de ces conjonctions on n'en a eu que six dans le siecle passé. Plusieurs Astronomes en espéroient ou en faisoient esperer par leurs Tables une 7^{me} à Paris le 5 Mai 1707, comme il a été dit dans l'hist. de cette année-là. Mais il n'y en eut point, & pas même apparemment pendant la nuit. Mercure eut trop de latitude, & il ne passa point dans le soleil.

Cette 7^{me} conjonction visible, ou ce 7^{me} passage de Mercure dans le soleil, on l'espéra encore à Paris en 1720, soit le 7 Mai après midi, soit le 8 au matin, soit en tout, soit en partie ; car les différentes tables varioient assez considérablement ; ce qui n'est pas étonnant à l'égard de cette planete : mais il n'y eut point encore de passage, du moins le jour ; & dans plusieurs lieux de l'Allemagne, plus orientaux que Paris, où par conséquent on pouvoit plutôt voir le soleil, & où il y a d'habiles observateurs, on ne vit rien non plus, quoique le Ciel fût favorable.

On se tint plus sûr d'avoir enfin une conjonction visible le 9 Novembre de cette année, parce que les tables s'accordoient à y donner peu de latitude à Mercure. M. Delisle le cadet calcula au mois de Juin par les tables de M. de la Hire, qu'à Paris Mercure devoit être en conjonction à 5^h 30' 20" après-midi.

Il sera bon de donner quelque idée de la maniere particuliere dont M. Delisle se prit à faire ce calcul, & pour cela d'expliquer plus précisément ce que c'est, que la conjonction dont il s'agit.

Comme la terre se meut autour du soleil dans le plan de l'écliptique, d'où son centre & celui du soleil ne sortent jamais; c'est à ce plan que tout doit se rapporter. Si Mercure, dont l'orbite autour du soleil est différente de l'écliptique, mais la coupe en deux points opposés, qui sont ses nœuds, se trouvoit dans un nœud, & de plus placé de telle sorte que son centre fût sur la même ligne droite que ceux de la terre & du soleil, on verroit de la terre Mercure au centre du disque du soleil, & ce seroit la conjonction la plus parfaite qu'il soit possible.

On sçait que les longitudes & les latitudes sont par rapport à l'écliptique ce que sont par rapport à l'équateur les ascensions droites, & les déclinaisons. Mercure dans chacune de ses révolutions a deux conjonctions en longitude avec le soleil, ou se trouve deux fois dans le même cercle de longitude que lui; l'une dans la partie supérieure de son orbite, l'autre dans l'inférieure. Ce n'est que dans l'inférieure que sa conjonction nous peut être visible; & afin qu'elle le soit, il faut qu'il passe par le disque du soleil. S'il ne faisoit que le toucher, il s'en faudroit tout le demi-diametre du soleil qu'il ne fût en conjonction avec le soleil de la maniere dont on l'entend ici. Or Mercure peut avoir jusqu'à 5 degrés de latitude, ou s'éloigner de cette quantité du centre du soleil, & le demi-diametre du soleil n'a que $\frac{1}{4}$ de degré, il doit donc arriver le plus ordinairement que Mercure ne passe point dans le disque du soleil, ou ne soit point en conjonction avec lui, quoique conjoint en longitude dans la partie inférieure de son orbite.

Les cercles de longitude, ou ceux par lesquels passe successivement Mercure selon son mouvement en longitude, étant conçus menés par tous les degrés de l'écliptique & par ses poles, les longitudes *vraies* de Mercure sont déterminées

par ceux de ces cercles où il feroit vû, étant vû du centre du soleil : mais étant vû de la terre, ses longitudes *apparentes* ne sont pas les mêmes que les vraies, parce que le point de vû est changé. On veut calculer une conjonction en longitude qui sera vûe de la terre, & par conséquent il faut avoir les longitudes apparentes de Mercure. Les tables astronomiques ne donnent que les vraies ; il faut donc réduire ces vraies en apparentes. M. Delisle évita le travail & même le péril de cette réduction ; car plus on calcule, plus il y a de péril d'erreur, en s'imaginant un spectateur placé dans le soleil, d'où il verroit Mercure passer vis-à-vis le disque de la terre supposée immobile ; car il est certain que le moment où Mercure sera conjoint en longitude avec le centre de la terre, sera le même que celui où Mercure vû de la terre feroit vû conjoint en longitude avec le centre du soleil, ou sur le même cercle de longitude. C'est ce moment qui doit arriver à $5^h 30' 20''$.

Les tables donnent pour ce même moment la latitude de mercure, c'est-à-dire, son éloignement à l'écliptique ou au centre de la terre, sur le disque de laquelle il est vû. On a donc la distance du centre de Mercure & du centre de la terre sur le cercle de longitude, perpendiculaire à l'écliptique où ils sont alors tous deux. Comme on voit par les mêmes tables que la latitude de Mercure est alors septentrionale & croissante, on voit qu'il a passé son nœud ascendant, où ce nœud est situé, à quelle distance il est du cercle de longitude où se fait la conjonction, quelle est l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur l'écliptique ; & par-là on décrit la route de Mercure sur le disque de la terre. Une perpendiculaire tirée du centre de ce disque sur la route de Mercure, détermine le point où il est le plus proche du centre de la terre. Ensuite M. Delisle ayant aussi trouvé par les tables quel est alors le mouvement horaire de Mercure, détermine en quel temps il doit décrire les portions de cette route, dont on a besoin. Il devoit arriver à $5^h 23' 48''$ au point de sa plus proche distance au centre de la terre, & par

conséquent avant sa conjonction ; car quand une conjonction ne peut être qu'en longitude, une moindre latitude, qui la précède ou la suit, n'y est point à considérer, & n'entre point dans l'idée de conjonction.

Il faut remarquer que dans la supposition présente, où la terre est immobile, & où par conséquent le soleil se meut aussi-bien que Mercure, le mouvement horaire apparent de Mercure est composé de son mouvement vrai & de celui du soleil à l'égard du spectateur que nous avons placé dans le soleil ; de sorte que si Mercure & le soleil vont du même sens, le mouvement horaire apparent de Mercure, qui est celui dont on a besoin, en est plus petit, & on l'aura en retranchant de son mouvement vrai trouvé par les tables, celui du soleil. Ce sera le contraire pour le cas opposé. Or nous sommes ici dans le 1^{er} cas ; Mercure qui dans sa conjonction inférieure est *retrograde* à l'égard de la terre, ou va d'orient en occident, est *direct* à l'égard du soleil, & va toujours d'occident en orient, & le soleil, à qui l'on donne le mouvement de la terre, doit être conçu avec cette même direction de mouvement.

Si l'on veut reprendre la réalité, c'est-à-dire, remettre le spectateur sur la terre, il est clair qu'il n'y aura rien de changé pour l'heure de la conjonction, pour la route de Mercure sur le disque du soleil, pour sa plus petite distance à l'égard du centre du soleil, pour l'heure où il sera à cette plus petite distance. Mais il manque le tems de l'entrée de Mercure dans le disque du soleil, & celui de sa sortie, & on ne les peut avoir immédiatement par l'entrée de Mercure sur le disque de la terre, & sa sortie, parce que le disque de la terre & celui du soleil sont différens en grandeur. Voici comment M. Delisle suppléoit à cela.

Si l'on conçoit des rayons tirés de tous les points de la circonférence du soleil au centre de la terre, il se formera un cône de lumière dont l'angle du sommet aura pour base ou pour mesure le diamètre du soleil, que l'on connoît pour chaque moment, & l'axe sera la distance connue de la terre

au soleil. Quand Mercure entre dans ce cône, il en intercepte quelques rayons, & c'est là le moment où il sera vu de la terre éclipser une petite partie du soleil, ou, ce qui est le même, entrer dans le disque du soleil. Pour déterminer ce moment, il faut sçavoir à quel point du cône Mercure y entrera, & ce point dépend de la distance où Mercure est alors de la terre qui est au sommet du cône, & du soleil qui est à la base. Or ces deux distances sont connues par les tables. M. Delisle détermina par cette voie que Mercure vu de la terre, entreroit dans le soleil à $2^h 45' 38''$ après midi, & qu'il en sortiroit à $8^h 1' 58''$, & par conséquent son passage qui devoit être à peu près de $5^h \frac{1}{4}$, ne pouvoit être visible que pendant moins de 2^h .

La fiction ou supposition de ce cône ne changeoit rien à la première supposition que M. Delisle avoit faite du spectateur placé dans le soleil; car si ce cône eût été visible, ce spectateur eût vu Mercure y entrer dans le même moment où la terre l'eût vu entrer dans le soleil.

Selon M. Halley, fameux astronome Anglois, qui avoit calculé cette conjonction en 1691, Mercure devoit entrer dans le soleil à Paris un peu plus tard que par le calcul de M. Delisle, encore plus tard selon les éphémérides de M. Manfredi, célèbre Astronome Italien. Selon M. Manfredi il devoit avoir plus de latitude, encore plus, selon M. Halley. Pour les trois différentes routes déterminées par ces deux Astronomes, & par les tables de M. de la Hire, elles étoient assez exactement parallèles.

Le 9 Novembre arriva, & le tems fut favorable. M^{rs} Cassini, Maraldi & Delisle observerent la conjonction. Nous parlerons d'abord des observations des deux premiers, qui furent faites ensemble.

Ils considererent Mercure à chaque moment comme une tache fixe dont il faudroit déterminer par observation l'ascension droite & la déclinaison à l'égard du centre du soleil, De cette ascension droite & de cette déclinaison on tire la longitude & la latitude. Une suite de plusieurs longitudes &

& latitudes de Mercure par rapport au centre du soleil, ainsi conclues pour plusieurs momens, sont une suite de points de la route de Mercure dans le soleil, ou, ce qui est le même, de son orbite par rapport à l'écliptique. Reste donc à sçavoir comment on prendroit dans un moment quelconque l'ascension droite & la déclinaison d'une tache fixe par rapport au centre du soleil.

Dans le foyer commun de l'objectif & de l'oculaire d'une lunette, il y a quatre fils qui se croisent dans l'axe de la lunette, un horisontal, un vertical, & deux obliques qui sont, tant avec l'horisontal qu'avec le vertical, un angle de 45 degrés. On pose la lunette sur la machine *parallactique*, dont il suffira de dire que la lunette qui y est posée suit toujours, en se dirigeant à l'astre, le mouvement diurne de cet astre, ou, ce qui est le même, le parallele qu'il décrit.

Si le soleil est au meridian, & que l'on fasse toucher son bord supérieur ou inférieur par le fil horisontal, ce fil représente une tangente ou une très-petite portion du parallele que le bord touché décrit, & il est proprement horisontal. Si à toute autre élévation du soleil, excepté le cas où il seroit à l'horison, on fait toucher son bord supérieur ou inférieur par ce même, il n'est plus horisontal: mais il est toujours une portion du parallele où est le bord touché, & le fil vertical toujours perpendiculaire à ce fil, représente toujours le meridian qui coupe ce parallele. Nous donnerons toujours au fil nommé d'abord horisontal le même nom, en sousentendant qu'il prend en un jour les positions de toutes les tangentes d'un parallele. C'est de cette façon que l'on suit toujours le mouvement diurne d'un astre.

Si l'on dispose la lunette de façon que les deux fils obliques soient deux tangentes du 1^{er} bord du soleil, qui est l'occidental, ou plutôt que la moitié de chacun de ces fils, la moitié supérieure de l'un, & l'inférieure de l'autre soient ces tangentes, il est clair que puisque ces fils sont chacun le même angle avec le fil vertical, le centre du soleil décrira la ligne exactement moyenne entre les deux fils, ou le fil

horifontal. On aura par obfervation le tems qu'il employera à parcourir ce fil , par ce tems la quantité de degrés , ou plutôt de minutes dont eft ce fil , portion du cercle diurne que le foleil décrit alors. Si ce cercle eft l'équateur , on a le diametre du foleil en parties de l'équateur , ce qui eft fa vraie mefure ; fi le cercle eft un parallele , on en réduit les degrés ou minutes à des degrés ou minutes de l'équateur par une proportion très-connue.

Réciproquement fi le centre du foleil décrit le fil horifontal , fes bords , lorsqu'ils font aux fils obliques , font touchés en même-tems par la moitié fupérieure d'un de ces fils , & par l'inférieure de l'autre ; & s'ils ne le font pas , le centre du foleil n'eft point dans le fil horifontal. Par la différence qui fe trouve entre le tems où le même bord du foleil eft touché par un fil oblique , & le tems où il l'eft par l'autre , on voit combien il s'en faut que le centre du foleil ne foit dans le fil horifontal , ou quelle eft la diftance de ce centre à ce fil , & on fçait de quel côté eft cette diftance felon que le fil fupérieur ou l'inférieur a été touché le premier.

La lunette étant difpofée de maniere que le centre du foleil parcourt le fil horifontal , la moitié du tems qu'il emploie à le parcourir eft le tems où il eft arrivé à l'interfection des quatre fils ; ou au centre de la lunette , ou au fil vertical. Si dans ce même moment une tache eft arrivée auffi à un autre point du fil vertical , il eft clair que la diftance de ce point au centre de la lunette eft la différence de la déclinaifon du centre du foleil , & de celle de la tache. Cette diftance eft une grandeur aifée à connoître , parce qu'on fçait le rapport de grandeur du fil horifontal , & par conféquent de tous les autres au diametre du foleil. On a toujours d'ailleurs par les Tables la déclinaifon du foleil & par conféquent celle de la tache. Si la tache n'eft pas fur le fil vertical dans le même moment que le centre du foleil , on voit en quel moment elle eft arrivée à un fil oblique , la différence de ces deux momens étant convertie en minutes de cercle , on a la grandeur de la ligne tirée du point où la tache a rencontré

le fil oblique sur le fil vertical. A cause de l'angle de 45 degrés que font les obliques, cette ligne est égale à celle qui seroit prise sur le fil vertical, & mesurerait la différence de déclinaison entre la tache & le centre du soleil. On voit immédiatement de quel côté est cette différence, si elle est septentrionale ou méridionale.

Si l'on met la tache dans le centre de la lunette, le centre du soleil n'y viendra point, & par conséquent il y aura différence de déclinaison entre ce centre & la tache, à moins que quand un bord du soleil viendra à être touché par un fil oblique, il ne le soit en même-tems par l'autre. Si cela n'est pas, on verra qu'il y aura différence de déclinaison, & quelle elle sera, & de quel côté.

Quant à la différence entre l'ascension droite du soleil toujours connue & celle de la tache, elle se conclut de la différence entre le tems où le centre du soleil passe par le fil vertical, & le tems où la tache y passe; car ce fil représente une portion de méridien, & c'est pourquoi on l'appelle aussi *horaire*.

Par plusieurs observations de cette espece, dont chacune; comme il a été dit, donnoit un point de la route de Mercure dans le disque du soleil, cette route y ayant été tracée, on eut sa grandeur & son rapport au diamètre du soleil, & l'on connut de quelle quantité étoit la portion que Mercure en parcourait en une heure, ou son mouvement horaire apparent. L'écliptique ayant aussi été tracée sur le disque du soleil, selon la méthode expliquée en 1707 *, on eut l'inclinaison de la route ou de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, telle qu'elle est vûe de la terre, & rapportée au soleil; car vûe du soleil, elle est différente.

* p. 106. &
107.

Il paroît assez qu'elle doit l'être à cause des deux différens points de vûe; mais il ne paroît pas de même que vûe de la terre, elle doit être plus grande; au contraire la terre étant plus éloignée de Mercure que Mercure ne l'est du soleil, on croiroit d'abord que l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur l'écliptique devroit paroître plus grande vûe du soleil, que

vûe de la terre. Mais il est vrai qu'elle peut paroître ou plus ou moins grande, & voici d'où cela vient. Le rapport du mouvement horaire de Mercure en longitude à son mouvement horaire en latitude est ce qui détermine son inclinaison; car ces deux mouvemens sont représentés par deux droites, qui avec une portion correspondante de l'écliptique, font un triangle rectangle, puisque la ligne de la latitude coupe toujours l'écliptique à angles droits, & par conséquent le rapport du mouvement en longitude au mouvement en latitude fait en même-tems, ou le rapport des deux lignes qui les représentent, détermine l'angle sous lequel le mouvement total de Mercure composé des deux, coupe l'écliptique. Si le mouvement en latitude étoit nul, il n'y auroit point d'inclinaison du mouvement ou de l'orbite de Mercure sur l'écliptique. Si le mouvement en latitude étoit égal au mouvement en longitude, l'orbite seroit inclinée sur l'écliptique de 45 degrés. Mercure étant vû du soleil, on voit son mouvement vrai en longitude, & son mouvement vrai en latitude, & leur rapport détermine l'inclinaison vraie de l'orbite. Mais si Mercure est vû de la terre, les deux mouvemens ne paroissent plus les mêmes. Tous deux sont changés, parce qu'étant vûs de plus loin, ils sont vûs plus petits, & outre cela le mouvement en longitude est très-considérablement altéré dans les conjonctions, où Mercure étant dans la moitié inférieure de son orbite, est rétrograde, & beaucoup plus lent. Nous avons expliqué en 1709 * pourquoi les

* p. 82.
& suiv.

planetes sont plus lentes dans leurs rétrogradations. Le rapport des deux mouvemens de Mercure vû de la terre étant changé, peut donc être plus grand, quoique les deux mouvemens soient en eux-mêmes plus petits: or il est effectivement plus grand, & par conséquent l'inclinaison apparente de son orbite sur l'écliptique plus grande que la vraie.

M. Cassini conclut de ses observations l'entrée de Mercure dans le soleil à $2^h 50' 30''$, sa conjonction à $5^h 28' 56''$, sa sortie à $7^h 43' 14''$, ce qui differe très-peu des prédictions de M. Delisle, & prouve beaucoup en faveur des tables de

M. de la Hire sur la moins connue de toutes les planetes. Nous passerons sous silence la détermination de l'inclinaison de son orbite du lieu de ses nœuds, &c. pour en venir à quelques remarques plus généralement intéressantes.

Le mouvement horaire moyen de Mercure vû du soleil est de $10' 14''$ selon M. de la Hire, & le vrai étoit alors de $12' 46''$. Vû de la terre pendant son passage par le soleil, il ne fut que de $6' 4''$. La raison en est la rétrogradation.

Quand Mercure entré dans le soleil en touchoit encore le bord oriental par où il étoit entré, & par conséquent avoit parcouru sur le disque du soleil un espace égal à son diamètre apparent, M. Cassini observa en combien de tems il parcourroit encore un espace de la même longueur. Ce fut en $1' 18''$. Ce tems converti en minutes de degré, & de plus en minutes qui appartenissent au diamètre du soleil, donna un espace de plus de $7''$, qui étoit donc le diamètre de Mercure vû de la terre.

On sçait que la parallaxe du soleil est de $10''$ au plus ; ou, ce qui est le même, que le demi-diamètre de la terre vû du soleil seroit de $10''$, & par conséquent qu'une grandeur égale au diamètre de la terre, vûe de la terre sur le soleil, seroit de $20''$. Pour comparer à cette grandeur le diamètre de mercure, il faut concevoir Mercure porté jusqu'à la distance de la terre où est le soleil, & alors son diamètre apparent diminuera selon la raison qui est entre la distance de la terre à Mercure dans sa conjonction inférieure, & la distance de la terre au soleil. Si l'on prend ces distances selon la regle de Kepler, qui donne le rapport des distances aux révolutions, on trouvera que la distance de la terre au soleil étant 5, celle de Mercure dans sa conjonction inférieure est à peu près 2 ; que par conséquent sa distance à la terre étoit 3, & que si à la distance 3 son diamètre a été de $7''$, il ne doit être que d'un peu plus de $4''$ vû à la distance 5, c'est-à-dire à celle où est le soleil. Le diamètre de Mercure ne seroit donc guere que la 5^{me} partie de celui de la terre, & la terre seroit 125 fois plus grosse que Mercure. M. Cassini trouve par une autre

voie , mais sur le fondement de la même observation , que le diametre de Mercure n'est que 4 fois plus petit que celui de la terre , & alors Mercure est égal à la lune. Ce qui peut rapprocher les deux calculs, qui vû le sujet ne different pourtant pas beaucoup , c'est que les nombres 5 & 2 tirés de la regle de Kepler , ont été pris peu exacts pour la commodité.

Mercury fut toujours vû fort noir , fort rond , bien terminé , & sans aucune nébulosité qui l'environnât. On en avoit soupçonné une dans une conjonction pareille observée en 1697 : mais cette année on n'en put absolument découvrir , même avec une lunette de 34 pieds. Il y a donc toute apparence que Mercure n'a point d'atmosphère. Puisque la notre augmente par sa densité l'impression de chaleur que nous portent les rayons du soleil, Mercure n'avoit pas besoin d'en avoir une.

M. Delisle observa d'une autre maniere ce même passage de Mercure dans le soleil. Il falloit que M^{rs} Cassini & Maraldi changeassent souvent la position du fil horisontal de leurs lunettes , afin de lui faire toujours suivre le parallele du soleil , & qu'ils le rendissent toujours tangente d'un bord , ce qui emporte du tems par les fréquentes répétitions ; & le passage visible de Mercure devoit être assez court. Feu M. Cassini avoit pratiqué une autre méthode en 1697 pour un autre passage de Mercure qui devoit aussi durer peu , & il l'avoit choisie pour aller à l'épargne du tems. M. Delisle s'en servit , & voici en quoi elle consiste.

On laisse le fil horisontal de la lunette toujours horisontal , & coupé à angles droits par le vertical , les obliques sont supprimés , ou n'ont point d'usage : mais on met deux horisontaux dont la distance peut changer , & est toujours connue. Le fil horisontal représente donc toujours ou l'horison , ou un petit cercle parallele à l'horison , qu'on appelle *Almicantarath* , & le vertical représente toujours un azimuth. Les azimuths sont à l'égard de l'horison & des almicantaraths ce que sont les méridiens à l'égard de l'équateur & des paralleles , ils coupent l'horison & tous les almicantaraths à

angles droits, & concourent tous aux poles de l'horison, qui sont le zenith & le nadir. Par les temps du passage du centre du soleil & de Mercure, chacun par un même fil horizontal, & chacun par le fil vertical, on a la distance des almicantaraths & des azimuths où ils sont chacun. Or ils ne sont en différens almicantaraths & en différens azimuths que parce qu'ils sont en différens paralleles & en différens méridiens, ou, ce qui est le même, parce qu'ils ont différente déclinaison & différente ascension droite. On tire donc de-là leur déclinaison & leur ascension droite, & de-là enfin leur latitude & leur longitude.

Il est visible que cette méthode demande plus de calcul que l'autre, où la déclinaison & l'ascension droite se tirent immédiatement de l'observation : mais en récompense elle peut fournir dans un même temps un plus grand nombre d'observations, & par conséquent de points qui détermineront la route de Mercure dans le soleil.

Elle a encore cet avantage, que les réfractions n'y peuvent causer aucune erreur, & que l'on n'est pas obligé d'y avoir égard. On prend le centre du soleil & Mercure à la même hauteur horizontale, & par conséquent la réfraction les a également élevés, & la différence entre leurs hauteurs vraies est la même qu'entre les apparentes. Cela ne pourroit être autrement que dans le cas où il se seroit fait un changement subit de réfraction entre le passage d'un astre & celui de l'autre par le même fil horizontal : mais ce tems est trop court, & d'ailleurs on a observé que ces changemens soudains n'arrivent qu'au lever du soleil, & rarement. L'observation dont il s'agit fut faite le soir. M^{rs} Cassini & Maraldi ne compterent pas sur leurs dernières observations, parce que les réfractions étoient alors trop grandes, & M. Delisle en vertu de la pratique qu'il suivoit, eut des observations du même-tems qu'il crut aussi sûres que les autres.

Pour la différence de parallaxe, qui appartient à deux astres, parce qu'ils sont différemment éloignés de la terre, cette méthode ne la sauve pas : mais elle ne pouvoit être que

si légère, que ce n'étoit guere la peine d'y avoir égard. Ce pendant pour plus de sûreté, M. Delisle supposa, selon les tables de M. de la Hire, que Mercure avoit 3" de parallaxe plus qu'il le soleil.

Pendant 1^h 40' que M. Delisle put voir Mercure dans le soleil, il fit 52 observations, dont 26 déterminoient l'almicantarath de Mercure à l'égard du soleil, & les 26 autres son azimuth. Ce grand nombre de points ainsi déterminés dans la route de Mercure, devoit en augmenter la justesse & la précision. Ses déterminations s'accorderent assez, & avec ce qu'il avoit prédit lui-même, & avec celles de M^{rs} Cassini & Maraldi.

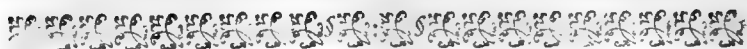
Pour mieux faire voir cet accord, M. Delisle prit quelques unes des dernières latitudes de Mercure, telles que M^{rs} Cassini & Maraldi les avoient conclues de leurs observations, & qui différoient trop de celles qu'il avoit trouvées pour les mêmes momens, & il montra que réellement ils convenoient ensemble. La méthode de M^{rs} Cassini & Maraldi étoit sujette aux réfractions, qu'ils avoient cependant négligées dans leurs dernières observations, parce qu'ils avoient assez d'observations précédentes, où elles avoient pu effectivement être négligées sans erreur sensible. Les latitudes tirées de ces dernières observations se sentoient donc de ce défaut; car les réfractions n'altèrent que les élévations horizontales, & ces élévations n'ont rapport qu'aux déclinaisons, & les déclinaisons aux latitudes. La méthode de M. Delisle étoit indépendante des réfractions. De-là il arrivoit que ses dernières latitudes ne devoient pas convenir avec celles des deux autres Astronomes: mais en rectifiant les leurs sur le pied des réfractions, dont la variation est assez connue, tout se remettoit d'accord.

Sur cela M. Delisle donna une méthode qu'il avoit trouvée pour calculer la véritable position de Mercure dans le soleil, quand les observations auroient été faites par une méthode sujette aux réfractions, & dans un tems où il auroit fallu les compter,

Tout

Tout le monde s'est apperçû que près de l'horison le disque du soleil est très-sensiblement altéré, son diamètre vertical est plus court que l'horisontal, parce que la réfraction étant inégale, & élevant d'autant moins un objet qu'il est plus haut sur l'horison, l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil est moins élevée par la réfraction que l'inférieure, ce qui fait le même effet que si ce diamètre étoit réellement raccourci; pour l'horisontal, il ne peut recevoir dans ses parties aucune inégalité d'élevation. Si Mercure est alors dans le soleil, ses positions doivent donc être altérées en ce qu'elles ont de vertical, & il faut les réduire au vrai. M. Delisle suppose que le soleil est devenu une ellipse exacte, dont le petit axe est le diamètre vertical raccourci selon la réfraction de ce moment-là, & par-là il connoît la nature de l'ellipse, ou la distance de ses foyers, qui dépend du rapport des deux axes. Cela posé, il donne une méthode géométrique pour réduire les positions apparentes de Mercure aux vraies. Il semble que les Mathématiciens d'aujourd'hui se croient trop heureux d'avoir encore des difficultés à éclaircir.





O P T I Q U E.

SUR LES OMBRES DES CORPS.

V. les M.
p. 111.

SI l'on vouloit prouver combien le physique est quelque-fois différent du géométrique, combien l'exécution réelle des choses s'éloigne de ce que la géométrie en auroit attendu par ses calculs, rien n'y seroit peut-être plus propre que le sujet qui va être traité. Ce n'est pas qu'il n'y ait de la géométrie par-tout sans nulle exception: mais elle est ordinairement fort compliquée, & celle qui avoit fondé nos raisonnemens étoit trop simple pour attraper juste les effets tels qu'ils sont.

* p. 74. &
suiv.

Nous avons parlé en 1711 * de l'ombre & de la pénombre de la terre ou de la lune, d'où dépendent les éclipses, & nous supposerons ici ce qui en a été dit. Le triangle d'ombre véritable de la terre est formé du diamètre de la terre, & de deux rayons partis des deux extrémités du soleil, & prolongés jusqu'à ce qu'ils concourent au-delà de la terre. Ce triangle est isoscele, son angle du sommet est mesuré par le diamètre apparent du soleil qui est de 32', d'où l'on conclut par la trigonométrie que la perpendiculaire tirée du sommet de ce triangle sur sa base, où la longueur de l'ombre est de 110 diamètres de la terre, ou de 330 mille lieues. Or la lune n'en est éloignée de la terre, que de 100 mille lieues tout au plus, d'où il suit que quand elle s'éclipse, elle tomberoit dans l'ombre véritable de la terre à moins d'un tiers de sa longueur. qu'elle devroit absolument disparaître dans une ombre si épaisse, & disparaître pour un long temps. Cependant elle ne disparaît presque jamais, & on la voit toujours assez lumineuse, & seulement rougeâtre, ce qui marque sûre-

ment qu'elle n'est que dans la pénombre. Il y a donc là du physique qui dérange beaucoup le géométrique.

M. Maraldi a fait un grand nombre d'expériences pour éclaircir cette matière, non seulement par rapport à l'astronomie, mais encore plus par rapport à l'optique, qui à mesure qu'elle sera plus étudiée, donnera toujours des phénomènes plus curieux, & auxquels on se feroit moins attendu. M. Delisle le cadet avoit déjà donné en 1717 ses expériences & ses réflexions sur cette même partie de l'optique.

Que l'on expose au soleil un cylindre quelconque, il sera fort naturel de croire, selon la petite théorie de 1711, qu'en supposant ce cylindre vertical, & en ne considérant dans le solide de son ombre qu'un plan horizontal, il n'arrivera rien autre chose, sinon qu'il y aura un triangle d'ombre véritable dont le sommet ou la pointe se terminera à quelque distance du cylindre, & aux deux côtés de ce triangle une pénombre infinie, mais toujours plus claire, de sorte qu'elle cessera bien-tôt d'être sensible, quoiqu'elle le soit encore à une distance où le triangle d'ombre n'existe plus. Si l'on met donc verticalement derrière le cylindre une superficie blanche, que l'on éloignera successivement du cylindre tant qu'on voudra, on y verra toujours une ombre noire & également noire, mais toujours plus étroite jusqu'à une certaine distance du cylindre qui sera de 110 diamètres de ce cylindre, car cela doit être égal pour tous les corps exposés en plein soleil, après quoi l'ombre disparaîtra, & on verra toujours à ses deux côtés une pénombre, toujours plus large & plus claire, qui ne disparaîtra qu'à une distance plus grande. Voilà tout ce que la géométrie donne, & tout ce qu'elle fait prévoir, mais le fait est bien différent.

L'ombre véritable ne s'étend, en demeurant uniforme & également noire, qu'à une distance plus de la moitié moindre que les 110 diamètres du cylindre. Passé cela, son milieu devient une pénombre, & elle ne conserve de ce qu'elle devoit être que deux traits noirs fort étroits qui terminent cette pénombre de part & d'autre selon sa longueur. Ces deux traits

font de la noirceur qui appartient à l'ombre véritable. On reconnoît encore tout cet espace pour être celui que cette ombre devroit occuper, à ce qu'il est de la largeur qui convient à la distance. De plus si on augmente la distance où l'on a commencé à voir cette pénombre, l'espace total qu'elle occupe avec les deux traits noirs diminue toujours de largeur, comme doit faire celui de l'ombre véritable; seulement la pénombre, en s'étrecissant, s'éclaircit toujours, les traits noirs gardant la même noirceur & la même largeur, & enfin à la distance des 110 diametres ou à peu près, les deux traits noirs qui se sont toujours approchés se confondent en un, après que l'ombre véritable disparoît, & il n'y a plus que de la pénombre. Comment l'ombre véritable qui a retenu toute l'étendue de son cours naturel, & sa projection triangulaire, s'est-elle changée en pénombre pendant plus de la moitié de ce cours, à l'exception de ces deux extrémités, qui sont demeurées inaltérables? Nous appellerons cette pénombre qui tient la place presque entière de l'ombre véritable, *fausse* pénombre, pour la distinguer de celle qu'on a toujours appelée ainsi.

Il se fait encore une apparence imprévûe. Quand l'ombre est reçue assez proche du cylindre, & qu'elle n'a point encore dégénéré en fausse pénombre, on voit que la vraie pénombre placée, comme elle doit l'être, des deux côtés de l'ombre, est terminée en dehors par deux traits de lumière plus vifs & plus éclatans que la lumière même qui vient directement & à plein du soleil. Ils s'élargissent & s'affoiblissent toujours à mesure que l'ombre est reçue plus loin du cylindre. D'où leur vient cet éclat plus grand qu'il ne devroit être, puisqu'il n'y en a point au-dessus de celui de la lumière directe? Quant à la vraie pénombre, elle est toujours dans son état naturel.

M. Maraldi a reconnu par ses expériences que la distance où la fausse penombre commence à paroître, n'est point proportionnée au diametre des cilindres; mais qu'elle est à peu près la même pour tous avec quelque petite variation irréguliere. Il la fixe à 41 diametres du cylindre. Elle devient

plus grande, quand le soleil est peu lumineux, soit qu'il soit couvert de quelques nuages clairs, soit qu'il soit peu élevé sur l'horison.

Pour expliquer la fausse pénombre, M. Maraldi juge qu'il ne faut pas, ainsi qu'on le fait ordinairement, & avec raison en beaucoup d'occasions, prendre les rayons de lumière pour des lignes mathématiques & roides; mais qu'il faut imaginer la lumière comme un fluide, analogue à l'eau, & qui prend les mêmes mouvemens, les mêmes irrégularités de mouvement, si cependant ce sont des irrégularités. Quand une rivière rencontre une pile d'un pont, elle se divise, & si les deux parties divisées qui ont été chacune une tangente de la pile suivent toujours exactement cette direction qu'elles ont prise, elles ne se réuniront qu'à une certaine distance au delà de la pile. Mais cela n'est pas ainsi, les parties d'eau, qui touchent la pile, en suivent en partie le contour, les unes plus, les autres moins, & entrent dans cet espace où aucune ne devrait entrer si elles suivoient la direction des deux tangentes de la pile. L'application de cet exemple est aisée à faire, le cylindre devient la pile du pont. Il entre donc des rayons de lumière dans l'espace qui ne devrait être occupé que par l'ombre véritable: mais comme cette ombre est d'une grande largeur proche du cylindre, ces rayons ne l'altèrent & ne l'éclaircissent pas suffisamment pour faire une pénombre sensible, & cela n'arrive que quand l'ombre est devenue plus étroite à une plus grande distance du cylindre, qu'on a trouvée de 41 diamètres. Alors une même quantité de rayons se mêle à une beaucoup moindre quantité d'ombre. Comme l'ombre devient toujours plus étroite, la fausse pénombre s'éclaircit toujours.

Puisque tous les rayons de lumière; ou du moins la plus grande partie, suivent pendant quelque petite étendue le contour du cylindre, ou tournent un peu après en avoir rencontré les bords, ces bords qui ne sont nullement éclairés, doivent toujours jeter une ombre véritable, & c'est là tout ce qui en reste. Voilà les deux traits noirs qui enferment la

94 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
fausse pénombre. Il n'y a rien qui puisse faire varier leur petite largeur.

Cependant il est impossible que sur ces mêmes bords il ne se réfléchisse en même temps d'autres rayons, différens de ceux qui circulent un peu à l'entour. Mathématiquement ils ne devroient déterminer que la position ou direction de deux tangentes extrêmes qui embrasseroient le cylindre, & au delà desquelles & en dehors seroit la vraie pénombre : mais ces bords sont des surfaces physiques qui par leur inégalité doivent causer des réflexions de rayons. Ce sont ces rayons réfléchis qui se jettant au dehors de la vraie pénombre, forment ces deux traits de lumière si éclatans. Ils le sont plus que la lumière directe, parce que la lumière directe tombe dans ce même espace, où la vraie pénombre cesse, & que les rayons réfléchis des bords du cylindre y sont de plus. On voit assez que ces deux traits lumineux doivent toujours s'affoiblir à mesure que l'ombre est reçue plus loin, puisque la même quantité de rayons réfléchis occupe toujours une plus grande étendue.

A suivre les idées qui ont été établies, il est aisé de prévoir que si les mêmes expériences qui ont été faites avec des cylindres se font avec des Globes, la figure des phénomènes changera; que la fausse pénombre qui étoit un parallélogramme sur le papier où l'on recevoit les apparences, y deviendra un cercle; que les deux traits noirs qui la terminoient des deux côtés selon sa longueur, deviendront un anneau circulaire noir & étroit qui enfermera la fausse pénombre; qu'au delà de cet anneau sera un autre anneau de vraie pénombre, & au-delà de celui-ci encore un autre plus éclatant que la lumière directe. On jugera même que l'anneau noir qui enferme la fausse pénombre diminuera toujours de largeur dans une plus grande distance du globe, parce qu'il est formé de la même manière que les deux traits noirs qui s'approchoient toujours, & qu'enfin il s'anéantira à la distance de 110 diamètres, où il n'y a plus que de la vraie pénombre.

Il faut seulement remarquer que la fausse pénombre com-

menge à paroître beaucoup plus près du globe qu'elle ne faisoit avec le cylindre. Elle se montre à 15 ou 16 diametres du globe, au lieu qu'elle ne se montrait qu'à 41 du cylindre. Cela convient extrêmement à l'explication physique que M. Maraldi donne de la fausse pénombre, car qu'un globe & un cylindre soient d'un même diametre & d'une même hauteur, le fluide lumineux qui rencontre le globe par toute la circonférence d'un grand cercle, circulera derriere & alentour en plus grande quantité qu'autour du cylindre dont il ne rencontrera que deux lignes droites de sa surface égales chacune à un diametre. Cela ne donne encore au globe qu'un avantage d'un tiers, & il en a un de près de deux tiers selon le rapport de 15 ou 16 à 41 : mais on peut aisément concevoir que tout ce qui rencontre le globe circulant alentour à cause de l'uniformité de sa figure, & non pas tout ce qui rencontre le cylindre, car il en faut excepter ce qui rencontre ses deux surfaces circulaires, la supérieure, & l'inférieure, toutes les parties du fluide lumineux qui rencontrent le grand cercle du globe, conspirent au même mouvement de circulation, & s'y entr'aident mutuellement, ce qui n'est pas dans le cylindre, & que delà vient à la lumiere une plus grande facilité de circuler autour du globe, qui s'ajoute à sa plus grande quantité.

M. Maraldi conclut de ses expériences qu'apparemment il n'y a aucun corps opaque qui fasse une ombre pure, à quelque petite distance qu'elle soit de ce corps, qu'il s'y mêle toujours des rayons qui n'ont pas suivi la ligne droite, & ont circulé ; mais que leur quantité, trop petite par rapport à celle de l'ombre, les rend insensibles. Il n'y a que des pénombres physiques.

Il ne reste plus de difficulté sur la trop grande noirceur de l'ombre de la terre où la lune doit tomber quand elle s'éclipse. La fausse pénombre de la terre commence selon les expériences de M. Maraldi à 16 de ses diametres, c'est-à-dire, à 48 mille lieues, & la lune est la moitié plus loin, elle ne fera donc pas trop obscurcie. Mais des mêmes expé-

riences il renait une grande difficulté que M. Maraldi ne dissimule pas. L'anneau noir, seul reste de l'ombre véritable, enferme la fausse pénombre, & il est indispensable qu'avant que d'arriver à cette pénombre la lune passe par cet anneau. Elle sera donc plus obscurcie au commencement de l'éclipse, & ensuite elle le sera moins; ce sera la même chose renversée pour la fin de l'éclipse, où elle repassera par l'anneau: or il est bien sûr que c'est précisément le contraire.

L'atmosphère de la terre peut servir à la solution. Son ombre doit se trouver justement à la même place que l'anneau noir, & cette ombre qui doit être fort claire, puisque l'atmosphère laisse passer beaucoup de rayons, éclaircira suffisamment l'anneau, & le rendra homogène à la fausse pénombre, de sorte qu'il ne restera dans tout aucune inégalité de noirceur que celle qui dépendra du plus ou moins de proximité à l'axe, selon qu'il est naturel & ordinaire. M. Maraldi ne prétend pourtant pas donner cette réponse pour décisive, quoiqu'elle soit assez plausible, il attend sagement de nouvelles observations plus exactes sur la différente obscurité de la lune éclipse.

Aux expériences sur les ombres en plein soleil ont succédé celles que M. Maraldi a faites dans une chambre obscure, où la lumière du soleil n'entrait que par un trou qui n'avait pas $\frac{1}{3}$ de ligne de diamètre. On se ménage cette obscurité pour voir des phénomènes foibles & délicats que le grand jour effaceroit.

Le premier que nous considérerons est l'agrandissement surprenant de l'ombre d'un petit corps cylindrique, tel qu'une aiguille ou un cheveu, placé directement dans le petit cône de lumière du soleil qui entre par le trou, & à une distance de ce trou, comme, de 12 pieds. On met le corps à cette distance de la pointe du cône de lumière, afin qu'il soit environné d'une quantité de lumière assez grande. Si son ombre est reçue sur un carton à 2 pieds loin de lui, où, vû son petit diamètre, il ne doit y avoir nulle ombre véritable, mais seulement une pénombre très-foible & très-étroite, on voit

voit une pénombre bien marquée, & 10 fois plus grande que le corps ; si le carton est à 10 pieds de distance du corps, la pénombre est 35 fois plus grande, & elle croît toujours à mesure qu'elle est reçue plus loin.

Le P. Grimaldi, qui a le premier observé ce phénomène, l'attribue à une *diffraction* des rayons, c'est-à-dire, à un mouvement qu'il leur donne, par lequel les deux rayons extrêmes qui rencontrent un corps, & en sont les tangentes, ne suivent pas cette direction de tangentes, mais s'en écartent en dehors, comme s'ils en fuyoient les bords qu'ils ont rencontrés. M. Newton suppose dans le corps la vertu de les écarter. Il est certain que tout cela agrandit l'ombre : mais M. Maraldi croit qu'une explication plus simple & plus physique peut suffire.

Si l'ombre & la pénombre du cheveu ou de l'aiguille ne sont formées que par les rayons du soleil entrés par le trou, elles sont trop grandes selon les principes ordinaires de l'optique ; mais selon ces mêmes principes, elles ne le seront pas trop, si outre les rayons directs du soleil, il en vient d'autres de dehors, qui passeront aussi par le trou, & frapperont le petit cylindre en autant de points, à l'opposite desquels seront des ombres qui s'ajouteront à la première ombre causée par le soleil seul. Or M. Maraldi conçoit qu'il doit entrer par le trou une infinité de rayons réfléchis par les particules de l'air extérieur, & que les ombres qu'ils causeront, qui n'auroient pas été sensibles dans un lieu éclairé à l'ordinaire, le seront dans la chambre obscure.

Selon cette idée l'ombre ne devient que trop grande. Elle doit être comprise entre deux lignes tirées par deux bords opposés du trou, & prolongées dans la chambre jusqu'au carton ; & il est certain qu'elle n'est pas de cette étendue : mais aussi il y a lieu d'en rabattre. Les rayons réfléchis par les particules d'air que l'on imaginera comme disposées en un demi-cercle dont le soleil tiendra le sommet, seront d'autant plus foibles, qu'ils seront plus éloignés du soleil ; ou, ce qui revient au même, d'un rayon du soleil qui passera par

le centre du trou ; les ombres des rayons qui seront à un certain éloignement de cet axe ne seront plus sensibles. Celles des rayons trop obliques au trou , ne le seront pas non plus. Enfin , suivant ce qui a été dit , les pénombres qui se font en plein soleil sont terminées par une lumière fort éclatante ; ici c'est encore à plus forte raison la même chose , & les ombres formées par les rayons réfléchis , & qui tomberoient dans cet espace , ne peuvent pas y subsister. On verra encore l'agrandissement de l'ombre expliqué par M. Maraldi d'une autre manière aussi physique , mais moins simple , toujours conforme à ce qu'il avoit établi pour les premiers phénomènes.

Outre l'agrandissement extraordinaire de l'ombre ou de la pénombre des aiguilles , on observe encore une apparence singulière. Quand cette pénombre est reçue fort loin , elle est tantôt coupée en son milieu selon sa longueur par une bande claire , ou un peu rougeâtre , tantôt partagée en plusieurs bandes alternativement plus claires & plus noires , une plus grande distance diminue le nombre de ces bandes. Dans cette variété il y a toujours de commun que la pénombre est terminée de part & d'autre par deux bandes claires , qui ont la même cause que celles qui terminent les ombres en plein soleil , & toujours après ces bandes claires sont deux ou trois traits colorés de rouge , de violet & de bleu , qui sans doute ne s'aperçoivent qu'à la faveur de l'obscurité de la chambre , & doivent subsister en plein soleil , quoiqu'ils n'y soient pas visibles.

Pour tâcher de découvrir d'où venoient les bandes , M. Maraldi fit les observations avec des lames longues de 2 pouces , & larges les unes de $\frac{1}{2}$ ligne , les autres de 1 ligne , largeur beaucoup plus grande que le diamètre des aiguilles ou des cheveux. Elles produisoient les bandes comme les aiguilles , mais à de plus grandes distances ; & lorsqu'elles passaient 1 ligne de largeur , elles n'en produisoient plus à une distance de 72 pieds , mais seulement une pénombre uniforme , telle qu'auroit été celle d'une aiguille à une petite distance ; d'où M. Maraldi conclut , avec beaucoup de son-

dement qu'à cause de leur largeur , elles demandoient une plus grande distance pour produire des bandes , & qu'on en auroit vû paroître si on avoit pû faire l'observation dans des lieux assez grands. Et comme il suit de cette idée que les bandes qui étoient confondues ne font que se démêler par la distance & se rendre sensibles , M. Maraldi croit qu'on les verroit dans l'ombre des aiguilles reçue fort proche , si ce n'étoit que cette ombre est trop étroite.

La bande claire ou rougeâtre du milieu est un effet nécessaire de ce qui a été dit sur les ombres en plein soleil. Qu'à quelque distance d'elle , de part & d'autre il y ait sur la pénombre deux bandes plus noires , on conçoit aisément qu'elles seront formées par ces rayons réfléchis dans l'air extérieur , que M. Maraldi suppose pour l'agrandissement de l'ombre , il est indispensable qu'ils apportent quelque changement à la pénombre formée par la lumière directe , & qui naturellement auroit été uniforme. D'autres bandes pareilles, s'il y en a , seront formées par d'autres rayons réfléchis ; mais plus éloignés de l'axe ou rayon principal, peut-être aussi par des rayons qui auront essuyé deux réflexions dans l'air , & en ces deux cas les bandes qu'ils formeroient devroient être moins noires & plus foibles. Quand après les bandes formées on augmente la distance du carton qui reçoit l'ombre , il est évident que ces bandes , en se dilatant , se mêlent & avec la pénombre primitive , & entr'elles , & reçoivent des altérations & des variétés qu'il est bien plus aisé d'imaginer en général , que d'expliquer dans tous les détails. Ils paroîtroient même inutiles , le général étant une fois bien conçu.

Les traits colorés de rouge , de violet & de bleu , qui terminent tout de part & d'autre , paroissent dans l'ombre d'un cheveu, lors même qu'il n'est plus exposé à la lumière directe qui a passé par le trou, & qu'il n'a pû recevoir que des rayons réfléchis dans l'air extérieur. C'est là une assez forte preuve de toute l'hypothese de M. Maraldi sur les rayons réfléchis.

Ces traits colorés peuvent être causés par des réfractions

faites sur la dernière & la plus mince couche de la surface du corps opaque, elle doit toujours être assez transparente pour cet effet, & l'on est aujourd'hui assez communément persuadé qu'il n'y a que les réfractions qui séparent assez les rayons teints naturellement de diverses couleurs, pour rendre la diversité de ces couleurs sensible. Cependant M. Maraldi explique les traits colorés par la seule réflexion, faite sur les extrémités du corps opaque. Il a mis dans la lumière du soleil qui entroit dans une chambre obscure par un trou de $\frac{1}{2}$ pouce de diametre, un cylindre de 1 pouce de diametre, placé de sorte qu'il ne recevoit pas toute la lumière, & qu'il en tomboit une partie au-dehors sans le rencontrer. Il s'en réfléchissoit donc à plus forte raison sur les bords du cylindre, & cette lumière réfléchie reçue sur un carton avoit des couleurs si fortes & si vives, que l'on eût pris le carton pour du papier marbré. C'étoit-là un effet de la figure cylindrique qui écarte & démêle les rayons, puisqu'elle renvoie divergens ceux qu'elle a reçûs paralleles.

On devine les phénomènes des globes qui n'auront que de très-petits diametres, & qu'on substituera dans les observations aux aiguilles ou aux lames. Les circonstances requises étant gardées, on aura dans le milieu de l'ombre de ces globes une aire circulaire fort claire, ensuite un anneau obscur & étroit, un autre anneau de pénombre plus large, un second anneau obscur & étroit; enfin un anneau lumineux assez large, bordé de couleurs en dehors.

Au lieu que les bandes ne paroissent pas même à une distance de 72 pieds dans l'ombre des lames qui ont un peu plus de 1 ligne de largeur, les différens anneaux, qui sont la même chose que les bandes, paroissent à cette distance dans l'ombre de globes qui ont jusqu'à $2\frac{1}{4}$ lignes de diametre. Cela s'accorde avec ce qui a été dit.

Plus les globes sont petits, plus les aires claires de leurs ombres sont grandes, ce qui s'accorde encore avec la plus grande facilité de la lumière à tourner autour des petits corps.

Nous ne dirons rien de quelques autres expériences de M.

Maraldi, parce qu'elles ne sont en quelque sorte qu'incidentes, & n'entrent pas nécessairement dans son dessein principal. Un Philosophe, qui ne veut faire des expériences que par rapport à un sujet, a bien de la peine à résister à des idées de traverse qui lui en demandent aussi, & elles le meneroient loin hors de sa route, s'il n'avoit la force de se prescrire des bornes.

MECHANIQUE.

SUR LE CHOC DES CORPS

A RESSORT.

LEs corps à ressort parfait sont les plus rares dans la nature, & l'on peut même croire qu'à la rigueur il n'y en a point. Ce ne sont que ceux-là dont nous avons parlé en 1721 * d'après M. Saulmon, & ce sont les seuls aussi que l'on considère ordinairement dans les théories géométriques du choc des corps à ressort, parce qu'ils ne demandent qu'une hypothèse fort simple, & qui facilite les calculs. Mais M. Saulmon a donné aussi la théorie du choc des corps à ressort imparfait, plus générale & plus compliquée que la première, & qui doit par conséquent la comprendre comme un de ses cas particuliers.

Nous avons défini le ressort parfait, celui qui en se débandant rend parfaitement au corps la figure qu'il avoit perdue, lorsque ce même ressort s'étoit bandé par quelque choc. Mais nous le définirons ici plus précisément, celui qui se débande avec une force parfaitement égale à celle dont il a été bandé; d'où suit l'entière restitution de la figure, & même une vitesse dans cette restitution égale à la vitesse dont s'est fait le changement de figure; en un mot, toutes choses égales dans les deux temps, mais selon un ordre contraire.

Le ressort imparfait ne se débande donc pas avec autant de force qu'il a été bandé. Il n'importe pour la géométrie quelle soit la cause physique de cette inégalité. Peut-être, comme un ressort sensible est apparemment composé de plusieurs petits ressorts particuliers insensibles, quelques-uns des petits ressorts se sont rompus dans le débandement, ce qui a affoibli d'autant le ressort total. Enfin il sera arrivé un dérangement, un déplacement de parties, quel qu'il soit, qui empêchera le ressort de se débander avec la même force dont il a été bandé. Si l'on conçoit que dans le bandement du ressort il arrive au corps un changement qui subsiste le même dans le débandement, le ressort n'est pas pour cela imparfait, puisque le débandement sera toujours égal au bandement; il n'y a que l'inégalité des forces des deux tems qui rende le ressort imparfait, le plus ou le moins de *vivacité* du ressort, c'est-à-dire, de promptitude avec laquelle il se bande & débande, n'y fait rien.

Le ressort absolument imparfait ou nul sera donc celui qui ayant été bandé ne se débande point du tout. Les corps mous peuvent être conçus sous cette idée, ils s'applatissent par le choc, & ne se rétablissent point, cela veut dire que tous leurs ressorts se sont rompus en se bandant, & qu'il n'en reste point pour se débander.

Puisque le ressort, quel qu'il fût, seroit parfait si la force du débandement étoit égale à celle du bandement, il suit que la force du bandement est à celle du débandement, comme le ressort parfait est à l'imparfait dont il s'agira en particulier. Si, par exemple, dans une balle de jeu de paume la force du bandement du ressort est 9, & celle du débandement 5, le ressort parfait est au ressort d'une balle comme 9 à 5.

Nous supposerons ici tout ce qui a été établi en 1721. Deux corps doivent se choquer directement, tous deux vont à l'orient, le 1^{er} qui est le plus vite rencontrera le 2^d. Lorsqu'ils sont à ressort parfait, nous avons dit que dans le bandement du ressort le 1^{er} est repoussé vers l'occident avec une certaine force qui diminueoit celle qu'il avoit avant le choc

pour aller à l'orient, que dans le débandement du ressort il étoit encore repoussé vers l'occident avec une nouvelle force égale à la première. Mais si le ressort est imparfait, la nouvelle force qui agit dans le débandement selon la même direction que la première, ne lui est plus égale; & il est aisé de voir qu'elle est moindre dans la raison du ressort imparfait au parfait. Elle seroit 5, par exemple, la première ayant été 9, s'il s'agissoit d'une balle de paume.

On a déterminé en 1721 l'expression de cette force, qui dans le bandement repoussoit le 1^{er} corps vers l'occident, par conséquent la force qui dans le débandement l'y repousseroit encore, seroit cette première force multipliée par 5, & divisée par 9, mais pour la généralité, & même pour la facilité du calcul algébrique, il vaut mieux exprimer en grandeurs indéterminées le rapport du ressort parfait à l'imparfait. Ainsi le 1^{er} corps sera repoussé vers l'occident avec les deux forces inégales & connues, l'une du bandement, l'autre du débandement, & pour avoir la force totale du corps après le choc, il faudra rabattre ces deux forces de celle qu'il avoit vers l'orient avant le choc. Ces deux mêmes forces inégales s'ajoutent après le choc à celle que le 2^d corps avoit avant le choc vers l'orient, & de-là se tire sans aucune peine la vitesse & la direction de la vitesse de chacun des deux corps après le choc; car il n'y a qu'à diviser la force de chacun par sa masse.

Nous avons dit en 1721 comment le cas où les deux corps vont du même sens avant le choc se change en celui où ils vont en sens contraire, ou en celui où l'un est en repos. Il ne faut que rendre négative la vitesse du 2^d corps avant le choc, ou la supposer nulle. La formule de la vitesse que prennent après le choc les corps à ressort imparfait, devient donc absolument générale. Elle comprend même les corps à ressort parfait; on n'a qu'à y supposer égales les deux forces du bandement & du débandement. Elle comprend encore les corps absolument mous, ou absolument durs, il ne faut qu'y supposer nul tout ce qui exprime la force du

débandement ; car s'il n'y a point de débandement , il n'y a point de ressort , & en ce cas , ou il y a eu un bandement , c'est-à-dire , un aplatissement sans restitution de figure , ce qui appartient aux corps absolument mous, ou il n'y a point eu de bandement ou de changement de figure ce qui appartient aux corps absolument durs.

La formule est encore générale par un endroit que nous n'avons pas expliqué jusqu'ici , de peur d'entasser trop d'idées différentes. Le ressort que le choc met en action est un ressort composé de celui des deux corps ; car tous deux agissent l'un sur l'autre dans le débandement. Les théories ordinaires où l'on suppose que le ressort est parfait des deux parts , n'ont nulle difficulté sur ce point, nulle attention particulière à y faire ; mais ici où les ressorts peuvent être & sont le plus souvent imparfaits , le ressort composé ou total varie selon les deux ressorts particuliers qui le composent. L'un peut être parfait , & l'autre imparfait ; & même imparfait à tel point , qu'il sera nul ou n'aura point de débandement , ou bien tous deux seront différemment imparfaits. Il est évident que la force dont le ressort composé agit sur chacun des deux corps , est la moitié de la force des deux ressorts particuliers ; car il partage également son action entre ces deux corps ; ou , ce qui revient au même , le ressort composé est la moitié de la somme des deux particuliers. Si l'un manque , il n'est que la moitié de l'autre. Par-là on exprime aisément toutes les suppositions différentes qu'on peut faire sur les différentes combinaisons des deux ressorts particuliers ; & comme il y a dans la formule de M. Saulmon une grandeur indéterminée qui représente le ressort composé , on voit très-aisément ce qu'il faut substituer en sa place selon les cas. Quand on prend le rapport du ressort parfait à l'imparfait , c'est le composé qui est cet imparfait.

De cette formule générale & toute nouvelle de M. Saulmon , naissent des conséquences en foule , nous en détacherons les principales , ou les plus faciles.

Il est clair par ce que nous avons dit , & sans y rien ajouter ,
que

que ce que le 1^{er} corps qui alloit à l'Orient prend de force par le bandement & le débandement du ressort composé pour retourner vers l'Occident, le 2^d le prend de surplus pour continuer d'aller à l'Orient, & cela soit que les forces du bandement & du débandement soient égales ou inégales, c'est-à-dire, que le ressort composé soit parfait ou imparfait, ou, ce qui est le même, ce qu'un des deux corps perd de force vers un certain côté, l'autre l'acquiert vers ce même côté, & par conséquent, quel que soit le ressort, la quantité de mouvement des deux corps vers un même côté est égale avant & après le choc.

La vitesse respective des deux corps avant le choc, qui est la somme de leurs vitesses particulières, s'ils vont en sens contraire, ou la différence de ces vitesses, s'ils vont de même part, est telle qu'on veut la supposer : mais la vitesse respective après le choc dépend de l'action du ressort ; car s'il n'y avoit point de ressort, il n'y auroit plus de vitesse respective, puisque les deux corps iroient ensemble d'une vitesse commune, & moins le ressort agit, moins il y a de vitesse respective. Quand le ressort composé, c'est-à-dire, les deux ressorts particuliers sont parfaits, la vitesse respective est égale avant & après le choc, ce que l'on sçait par les théories ordinaires ; donc si le ressort composé est imparfait, la vitesse respective est moindre après le choc, & elle est moindre selon la raison du ressort imparfait au parfait.

Par-là on peut toujours connoître combien un ressort imparfait est imparfait. Par exemple, M. Newton ayant fait choquer directement deux balles de paume, a trouvé que leurs vitesses respectives avant & après le choc, étoient comme 9 & 5, le ressort imparfait des balles est donc à un ressort qui seroit parfait, comme 5 à 9. Les ressorts de tous les corps pourront être mesurés de la même manière, & même les ressorts composés de deux corps quelconques de différente espèce.

Il a été dit en 1721 que la force du bandement du ressort s'exprime par le rapport du produit des deux corps à leur

somme , ce rapport étant multiplié par leur vitesse respective avant le choc. Cette force est à celle du débandement comme le ressort parfait à l'imparfait ; ce qui fait voir tout d'un coup que la force du débandement s'exprime par celle du bandement que le ressort imparfait multiplie , & que le parfait divise. La considération de ces expressions donne quelques analogies qui sautent aux yeux. Ce qu'elles ont de commode , c'est que la vitesse respective avant le choc , qui est toujours connue , y entre toujours.

Le chemin ou la vitesse du centre de gravité commun des deux corps n'est pas plus difficile à trouver dans l'hypothèse du ressort composé imparfait , que dans celle du parfait. Cette vitesse n'est que moindre après le choc dans l'hypothèse du ressort imparfait : mais elle dépend toujours des mêmes principes.

En général & dans les deux hypothèses , il s'agit de ce qui a été dit en 1721 , que la vitesse du centre de gravité dépend des forces ou quantités de mouvement des deux corps , qui toutes deux ou le tirent vers un même côté , auquel cas c'est leur somme qui meut le centre de gravité , ou le tirent de deux côtés opposés , auquel cas ce n'est que leur différence qui le meut vers le côté de la plus grande force ; & si cette différence est nulle , il ne se meut point. Or quel que soit le ressort , la quantité de mouvement des deux corps vers un même côté est égale avant & après le choc ; donc la vitesse du centre de gravité sera toujours la même avant & après le choc , & aura la même direction.

Si l'on se souvient de la manière dont nous avons expliqué en 1721 que la même quantité absolue de mouvement pouvoit , selon M. Saulmon , subsister dans la nature , à une petite restriction près , on verra que la même idée subsiste toujours. Un fluide subtil prendra tout ce qui se perd de mouvement dans un choc , où le ressort composé étant imparfait , il s'est rompu quelques petits ressorts particuliers. Le principe de la même quantité de mouvement toujours subsistante est si beau , & si digne de l'Auteur de l'univers , qu'il

mérite les efforts des Philosophes pour le conserver, & l'on ne peut s'empêcher d'avoir regret à quelques modifications qu'on est forcé d'y mettre.

SUR LA REFLEXION ET LA REFRACTION.

Nous avons déjà annoncé en 1722 * que la théorie de V. les M.
M. de Mairan sur la réflexion des corps, le conduiroit P. 343.
à celle de la réfraction, & il étoit aisé de s'appercevoir qu'el- & suiv.
le étoit trop étendue & trop générale pour ne pas aller jus-
que-là. Mais pour voir naître la réfraction de la réflexion,
il faut prendre de nouvelles vûes, qui seront toujours étroi-
tement liées aux premières.

On conserve ces anciennes suppositions, qu'un plan ou la surface d'un corps quelconque est choquée par une sphere, de sorte que le centre de gravité du corps, celui de la sphere, & le point de contact sont sur une même ligne droite, que le plan choqué est horizontal, que l'incidence de la sphere est oblique pour plus de généralité, & qu'il y a un ressort parfait dans la sphere. Il est le plus souvent inutile d'en concevoir un dans le plan ou corps choqué. Tout ce que l'on change, c'est que ce plan ou corps qui étoit inébranlable est maintenant mobile.

Puisqu'il l'est, la sphere doit le mouvoir. Elle fera sortir sa surface de cette ligne horizontale selon laquelle elle étoit étendue. Nous rapporterons à cette ligne, comme à un terme fixe, les mouvemens qui vont arriver, & nous la nommerons ligne fixe. La sphere, dont le mouvement est composé d'horizontal & de vertical, puisqu'il est oblique, ne peut mouvoir le corps choqué, ou le pousser au-delà de la ligne fixe, que selon une direction verticale, car par sa direction horizontale elle ne le choque point. Si le corps & la sphere étoient des corps parfaitement durs, ou parfaitement mous,

la sphere donneroit au corps choqué une vîtesse verticale d'autant plus grande , qu'il seroit d'une plus petite masse , & au contraire. On peut concevoir que la masse du corps choqué fait une certaine résistance à la vîtesse que le choquant tend à lui imprimer , & que cette résistance croît ou décroît avec la masse. Cela est général , & subsiste dans le cas du ressort , comme dans celui des corps parfaitement durs ou mous : mais le ressort amene des considérations nouvelles.

La réflexion dépend totalement du ressort , & afin qu'elle soit parfaite , c'est-à-dire , qu'elle se fasse sous un angle égal à celui d'incidence , il faut que le ressort soit parfaitement comprimé , & parfaitement restitué. Pour cela il lui faut un appui inébranlable , qui ne peut être que le corps choqué. Mais ce corps choqué est mobile , & prend une vîtesse verticale ; il cede donc , & n'est plus du tout un appui , s'il cede dans l'instant indivisible où il est choqué ; du moins il n'est qu'un appui imparfait , s'il ne cede pas entierement dans cet instant , & est quelque temps à se retirer.

Que le corps choqué soit plus ou moins de temps à ceder entierement , il est visible que cela dépend du plus ou moins de vîtesse verticale qu'il doit prendre , & ce plus ou moins de vîtesse dépend du rapport qui sera entre la résistance de sa masse & la force de la sphere selon sa direction verticale. Plus la masse du corps sera grande , & la force verticale de la sphere petite , plus le corps sera de temps à ceder , plus il sera de temps à servir d'appui , quoique d'un appui toujours cedant , & au contraire. Il suffira de concevoir désormais une même direction ou vîtesse verticale dans le mouvement composé de la sphere , & la masse du corps choqué toujours croissante ou décroissante.

Il faut un temps fini , quoique très-court , pour la compression du ressort , & un autre égal pour la restitution. Le corps choqué a toute la durée de ces deux temps pour achever entierement de ceder , & pour se dérober tout-à-fait à la sphere choquante ; il se dérobera dans le 1^{er} temps , & plutôt dans le 1^{er} , s'il prend plus de vîtesse ; & il ne se dérobera

que dans le 21, & plus tard dans le 2d, s'il en prend moins, ce qui fait deux cas remarquables, ou plutôt trois.

Si le corps choqué est infiniment petit, & par conséquent d'une résistance nulle par sa masse, il prend dans l'instant indivisible du choc toute la vitesse verticale qu'il doit prendre, il se dérobe, le ressort de la sphere n'est nullement comprimé; & comme elle n'a reçu aucune altération à son mouvement, elle le continue selon la même ligne oblique qu'elle décrivait. Il n'y a point de réflexion. Si le corps est fini, mais très-petit, il prendra moins de vitesse, résistera un peu de temps, mais se dérobera tout-à-fait un peu après le commencement de la compression du ressort. Ici s'applique ce qui a été dit en 1722 d'après M. de Mairan, que dans tous les instans infiniment petits, tant de la compression que de la restitution du ressort, la sphere avoit toujours différentes tendances à des directions qu'elle suivroit, si le corps, supposé alors inébranlable, étoit subitement enlevé dans quelque'un de ces instans. Maintenant le corps est réellement enlevé dans un instant de la compression du ressort, la sphere ira donc selon la tendance de cet instant, & il est aisé de voir que dans la supposition présente ce sera une ligne peu différente de celle qu'elle suivoit dans la réflexion nulle, & lorsque son mouvement n'étoit nullement altéré. Cette nouvelle ligne sera celle d'une réflexion très-imparfaite, & comme elle ne peut être qu'au-dessous de la ligne qu'on a nommée *fixe*, ce sera une réflexion *en dessous*. Puisque la vitesse verticale de la sphere diminue toujours par degrés pendant toute la compression du ressort, & ne renaît par les mêmes degrés que pendant la restitution, ici, où il y a eu une compression incomplete sans restitution suivante, la sphere a perdu de sa vitesse verticale qu'elle n'a point regagnée, & la ligne de réflexion en dessous est celle du mouvement composé de la sphere, où la vitesse verticale est moindre qu'avant le choc, & l'horizontale la même, car elle est constante. Il suit de là que si du centre de la sphere, dans l'instant du choc, on tire une perpendiculaire sur le plan choqué, ou la ligne fixe, la

ligne de la réflexion en dessous s'éloignera plus de cette perpendiculaire que ne faisoit la ligne d'incidence. Il est très-facile d'imaginer tous les cas suivans , où la résistance du corps choqué croissant toujours , il ne se dérobera tout-à-fait qu'après une plus grande compression du ressort , mais toujours incomplete , & où la sphere suivra une ligne de réflexion en dessous toujours plus éloignée de la perpendiculaire au plan , & par conséquent plus inclinée à la ligne fixe horizontale , puisque le rapport de la vitesse verticale de la sphere à l'horizontale diminue toujours.

Si la masse ou la résistance du corps choqué est telle qu'il ne se dérobe que dans l'instant où la compression du ressort de la sphere est entierement finie , la sphere qui a perdu toute sa vitesse verticale , & n'en reprend rien , faute d'appui , n'a plus que sa direction ou vitesse horizontale , & cette direction est en effet la tangente du sommet de la courbe , selon laquelle est alors sa tendance. Son centre ne peut plus que se mouvoir horizontalement sur la ligne fixe , ce qui sera , si l'on veut , une réflexion *moyenne*.

Car on voit déjà que les réflexions *en dessus* , qui sont les ordinaires , vont venir , à mesure que la résistance du corps choqué devenant encore plus grande , il ne se dérobera que pendant la restitution du ressort toujours plus avancée. Les réflexions en dessus seront toujours moins inclinées à la ligne fixe , & moins éloignées de la perpendiculaire au plan , & afin qu'il en vînt une qui fît avec elle le même angle que la ligne d'incidence , il faudroit que la restitution du ressort eût été entiere , c'est-à-dire , que le corps choqué n'eût point du tout cédé , ou eût été d'une masse infinie , ou inébranlable , ce qui est le cas de la réflexion parfaite.

L'angle que fait la ligne de réflexion nulle avec la ligne fixe est égal à celui d'incidence , puisque la sphere ne suit que la même direction ou ligne tant au-dessous qu'au-dessus de la ligne fixe. Ensuite cet angle de la ligne de réflexion en dessous avec la ligne fixe , diminue toujours jusqu'à ce qu'il devienne nul dans la réflexion moyenne , après quoi il com-

menge à croître dans les réflexions en dessus , & redevient enfin dans la réflexion parfaite égal à celui d'incidence , de sorte qu'à cet égard les deux extrémités se rejoignent , mais en sens contraires.

En considérant ce qui arrive ici à la vitesse verticale de la sphere dans les trois cas de la réflexion nulle , moyenne & parfaite , on reconnoîtra trois cas dont nous avons parlé en 1706 * dans l'explication du mouvement simple & direct des corps à ressort. Si le choqué en repos est infiniment petit par rapport au choquant , le choquant ne perd rien de sa vitesse ; si le choqué est égal , il prend toute la vitesse du choquant qui demeure immobile ; si le choqué est infiniment grand par rapport au choquant , il lui rend toute sa vitesse ; l'application se fait d'elle-même.

* p. 124.
& suiv.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de s'arrêter un peu ici pour expliquer comment une boule , qui en choque une égale en repos , lui donne toute sa vitesse , & demeure en repos elle-même , cela éclaircira ce qui a été dit ou supposé. Ce phénomène ne peut arriver si la compression & la restitution du ressort des deux boules n'ont été toutes deux égales & parfaites , & elles ne peuvent l'avoir été , si les deux boules n'ont été à l'égard l'une de l'autre un appui parfaitement immobile. Mais comment cela , si la boule choquée n'a nullement été immobile à l'égard de la choquante ? Elle a dû lui céder , & diminuer d'autant l'action des deux ressorts.

Il suffit de considérer celui de la choquée. Dès le premier instant où elle l'est , elle s'aplatit un peu , & devient un sphéroïde , dont le petit axe est dans la ligne qui joint son centre avec le point de contact. Le grand cercle , dont cette ligne étoit le diamètre , étant devenu ellipse , le point du contact & le point de la sphere diamétralement opposé s'approchent tous deux de son centre , & si on avoit d'assez bons yeux , on verroit la partie de la sphere antérieure par rapport au coup le fuir , & la postérieure s'en approcher ; d'où il suit que le centre de la sphere placé à égale distance de ces deux parties , & poussé en même-tems & également

par elles deux en sens contraires , demeure immobile. Dans les instans suivans le sphéroïde devient toujours plus sphéroïde , & le centre demeure toujours immobile , parce que toute la force de la boule choquante se consume à changer toujours de plus en plus la sphere en sphéroïde , ce qui ne demande aucun mouvement , ni déplacement du centre. Son immobilité fait que la sphere choquée tient lieu à la choquante d'un appui inébranlable.

On voit par tout ce qui a été dit , que les réflexions en dessous & les réflexions en dessus sont séparées par une réflexion qui n'est ni en dessous , ni en dessus , c'est la moyenne. Les réflexions en dessous se font tant que la vitesse verticale de la sphere est diminuée par la résistance du plan choqué , & non rétablie ; la réflexion moyenne , lorsque cette vitesse est entièrement éteinte , & nullement rétablie ; les réflexions en dessus , tant que cette vitesse est rétablie en partie , jusqu'à ce qu'enfin elle le soit entièrement dans la réflexion parfaite.

La vitesse verticale de la sphere ne peut jamais être dans un cas plus avantageux que celui où elle ne diminue aucunement par la résistance du plan , & c'est alors la réflexion nulle , dont la ligne n'est que celle d'incidence continuée au dessous de la ligne fixe. D'un autre côté si cette vitesse a été diminuée , elle ne peut être dans un cas plus avantageux que celui où elle se rétablit entièrement , & c'est la réflexion parfaite , dont la ligne fait au dessus de la ligne fixe un angle égal à celui d'incidence. Donc l'espace qui est entre la réflexion nulle & la parfaite comprend toutes les réflexions possibles. Afin qu'il y eût encore des réflexions au-delà de la parfaite , il faudroit que le plan ne fût pas seulement inébranlable pour rendre à la sphere toute sa vitesse verticale : mais qu'il eût encore une force pour l'augmenter , ce qui ne peut être en physique. Dans ce cas , s'il étoit possible , l'angle de réflexion seroit plus grand que celui d'incidence , & la ligne de réflexion s'approcheroit plus de la perpendiculaire au plan que ne faisoit celle d'incidence.

On s'apperoit déjà sans doute que les réflexions en dessous
vont

vont devenir des réfractions. Car si une sphere ayant traversé un milieu fluide, vient à tomber obliquement sur la surface d'un second milieu horifontal, plus difficile à pénétrer, sa vîtesse verticale, par laquelle seule elle pénètre, sera nécessairement diminuée, & il est bien certain qu'elle ne se rétablira pas; la sphere qui entrera dans le 2^d milieu sera donc dans le même cas que celle qui se réfléchissoit en dessous, parce qu'elle avoit perdu quelque portion de sa vîtesse verticale qu'elle ne recouvroit point. Elle entrera dans le nouveau milieu, en suivant une ligne de réflexion en dessous, non continue à celle d'incidence, & c'est là ce qu'on appelle une réfraction. Cette ligne de réflexion en dessous, ou de réfraction est, comme on l'a vû, plus éloignée de la perpendiculaire au plan que n'étoit la ligne d'incidence, & c'est ce qu'on appelle une réfraction qui s'éloigne de la perpendiculaire. Elle s'en éloigne d'autant plus que le 2^d milieu a par rapport au 1^{er} plus de difficulté à se laisser pénétrer par la sphere.

Si au contraire le 2^d milieu étoit plus aisé à pénétrer que le 1^{er}, il est bien vrai que la force verticale absolue de la sphere n'en seroit pas augmentée: mais sa vîtesse seroit moins retardée par le 2^d milieu qu'elle ne l'avoit été par le 1^{er}, ce qui est l'équivalent d'une augmentation réelle de force ou de vîtesse. La sphere doit nécessairement pénétrer le 2^d milieu, puisqu'elle a bien pénétré le 1^{er}, elle doit donc se mouvoir au dessous de la ligne fixe, qui appartient ici à la surface commune des deux milieux. Elle ne peut se mouvoir dans tout l'espace qui appartient aux réflexions en dessous, qui ne sont telles que parce que la vîtesse verticale est diminuée. Elle doit donc suivre une ligne qui soit hors de cet espace, & elle ne le peut sans en prendre une qui s'approche plus de la perpendiculaire au plan que ne faisoit la ligne d'incidence. Cette réfraction se fait donc en s'approchant de la perpendiculaire, & elle s'en approche d'autant plus que la facilité du 2^d milieu à être pénétré est plus grande que celle du 1^{er}. Voilà le cas qui n'avoit pas lieu dans la

réflexion, parce qu'on n'y considéroit que des corps solides rencontrés par la sphere, au lieu qu'ici on en considere de fluides qu'elle traverse avec plus ou moins de facilité.

En général il est très-clair par la théorie des mouvemens composés, que dans le triangle rectangle, dont l'hypoténuse représente l'incidence oblique de la sphere sur un plan horizontal, & les deux autres côtés la vitesse horizontale constante, & la verticale variable, qui est aussi ce que nous avons toujours nommé la perpendiculaire au plan, il arrive nécessairement que quand cette vitesse verticale est retardée ou diminuée, l'angle de l'hypoténuse avec elle devient plus grand, ou, ce qui est le même, l'hypoténuse qui est le chemin de la sphere s'éloigne de la perpendiculaire au plan, & qu'au contraire si la vitesse verticale est augmentée ou moins retardée, le chemin de la sphere s'approche de la perpendiculaire au plan.

Il est donc démontré que le milieu dans lequel un rayon de lumiere composé de petits globules, ainsi qu'il a été dit
 * p. 118. en 1722*, se rompt en s'approchant de la perpendiculaire, est le milieu le plus aisé à pénétrer par le rayon, & au contraire. Et comme il est certain par l'expérience que la lumiere, en passant de l'air dans l'eau, se rompt en s'approchant de la perpendiculaire, & s'en approche encore plus dans le verre, il est sûr que la lumiere se meut plus aisément dans le verre que dans l'eau, & dans l'eau que dans l'air.

Quand on commença dans le siècle passé à examiner plus soigneusement la réfraction, certainement l'apparence n'étoit pas que des milieux transparens plus denses dussent donner un passage plus aisé à la lumiere, & plus aisé à proportion de leur densité, qui naturellement devoit être un obstacle. Aussi le célèbre M. de Fermat, grand géometre, soutint-il long-temps contre M. Descartes que l'air étoit un milieu plus favorable à la lumiere que l'eau, & l'eau plus que le verre. Poussé vivement par son redoutable adversaire, il se retrancha enfin dans un raisonnement dont nous donnerons ici quelque idée.

Il est de la simplicité & de la sagesse de la nature que la

lumiere aille d'un point à un autre, ou par un chemin direct, ou par le plus court, ou par celui qu'elle parcourt en moins de temps. Quand elle se rompt en passant d'un milieu dans un autre, elle ne va ni par un chemin direct, ni par le plus court, elle va donc par celui de la plus courte durée. M. le Marquis de l'Hopital a démontré dans ses *infin. petits* sous une espece d'allégorie, qu'afin que la lumiere, tombant obliquement, aille en moins de temps qu'il soit possible d'un point donné dans un milieu à un point donné dans un autre, il faut qu'elle se rompe de sorte que le sinus de l'angle que fait son incidence avec la perpendiculaire au plan, & le sinus de son angle de réfraction soient entr'eux comme les différentes facilités des deux milieux à se laisser pénétrer. Or quand le chemin de la lumiere qui se rompt s'approche de la perpendiculaire au plan, le sinus de son angle de réfraction est moindre que n'étoit celui de l'angle d'incidence. Donc alors la facilité du 2^d milieu est aussi moindre que n'étoit celle du 1^{er}. Donc le milieu dans lequel la lumiere se rompt en s'approchant de la perpendiculaire est celui qu'elle pénètre le moins facilement.

Cette conséquence est vraie, s'il est bien vrai que le chemin de la lumiere, qui se rompt, doive être de la moindre durée possible : mais une cause finale, un principe moral, pour ainsi dire, ce plus court tems, plus convenable à la sagesse de la nature, ne peut pas tenir contre un principe géométrique & physique, tel que celui de la composition des mouvemens. En effet, comme nous l'avons dit en parlant de M. Leibnitz *, qui admettoit en physique les causes finales, & en particulier ce principe de M. de Fermat sur la réfraction, *ce qui appartient à la sagesse du Créateur semble être encore plus au dessus de notre foible portée, que ce qui appartient à sa puissance.* Quand nous aurons découvert ce qui est, ne craignons pas de n'y pas trouver assez d'ordre & de dessein : mais ne jugeons pas de ce qui est par un ordre & des desseins tirés de notre imagination.

Les causes finales étant donc aussi peu décisives en phy-

sique, M. de Mairan ne fait pas difficulté d'admettre que les deux chemins du rayon rompu sont parcourus en un temps plus long, que ne seroit le chemin direct & unique compris entre les deux mêmes points, & il le démontre, & même à l'égard de la réflexion, tant qu'elle est imparfaite. La nécessité mécanique doit prévaloir sur-tout.

Quant à la densité des milieux, qui cependant résistent moins à la lumière, il fait voir que cette plus grande densité de leurs parties sensibles peut fort bien s'accorder avec une moindre densité de fluide subtil qui remplit leurs pores insensibles, & qui fera la réfraction. La contexture des pores avec les parties solides des corps diaphanes plus denses peut aussi être plus favorable au passage de la lumière. Enfin c'est à la physique à éclaircir ce point, qui ne l'est pas encore assez : mais ce qu'il y a de Mécanique est inébranlable.

L'histoire que fait M. de Mairan, non-seulement de la contestation de M. Descartes & de M. de Fermat, mais des différens sentimens des plus grands philosophes sur toute cette matière, prouve assez combien elle étoit épineuse, & combien il étoit nécessaire qu'il y eût enfin quelque chose de bien sûrement arrêté. Cette histoire, curieuse & agréable par elle-même, a été recherchée avec soin, & recueillie de beaucoup d'endroits, dont quelques-uns sont déjà peu connus.

Comme la réfraction de la lumière a pour cause la différente résistance de deux milieux, & que l'on conçoit la résistance de chacun toujours la même, la force verticale de la lumière, lorsqu'elle passe d'un des deux milieux dans l'autre, est toujours également augmentée ou diminuée par rapport à l'horizontale, quelle qu'ait été l'incidence du rayon, & de-là vient le rapport constant des sinus des angles d'incidence & de réfraction pour deux milieux déterminés.

Si la lumière passe d'un milieu dans un moins résistant ; elle se rompt toujours, car il est impossible que sa force verticale ou sa force de pénétrer étant augmentée, elle ne pénètre. Mais quand elle passe dans un milieu plus résistant, elle ne pénétrera pas, si sa force verticale n'est qu'égale à la ré-

tistance de ce milieu. Cela viendra d'une incidence trop oblique, où le côté vertical aura un trop petit rapport à l'horizontal. Alors la lumière se réfléchira.

C'est donc une erreur que de penser, comme quelques physiciens, qu'une des causes du froid de l'hiver est l'incidence trop oblique des rayons sur l'atmosphère, qui fait qu'il s'en réfléchit une plus grande quantité, perdue pour le climat où est l'hiver. L'atmosphère est plus dense, & résiste moins à la lumière que l'éther d'où elle vient, & par conséquent sous quelque angle qu'elle vienne, il s'y en rompt toujours autant qu'il s'en peut rompre.

Je dis, *autant qu'il s'en peut rompre*, car il est certain par des expériences modernes, que la lumière ne se rompt point sans se réfléchir aussi en partie. Un rayon physique, qui, quelque petit qu'il soit, est toujours un faisceau de rayons linéaires, si l'on veut, trouve toujours dans un corps diaphane des parties solides qui causent des réflexions en même temps que les pores admettent les réfractions.

Jusqu'ici nous n'avons regardé que comme un point ce qui passe d'un milieu dans un autre : mais ce n'est pas réellement un point, c'est une sphere, quoique très-petite, & ce passage est à considérer. Le chemin d'un point, ce seront deux lignes droites différentes, l'une d'incidence, l'autre de réfraction, le chemin de la sphere sera composé de la ligne droite d'incidence, jusqu'à ce que la sphere touche le 2^d fluide, ensuite d'une courbe qui durera jusqu'à ce que la sphere y soit entièrement plongée, enfin d'une droite qui est la ligne de réfraction. Cette courbe est analogue à celle dont nous avons parlé en 1722, par laquelle dans la réflexion le centre d'une sphere est transporté de la ligne d'incidence sur celle de réflexion. Nous allons prendre le cas où une sphere passe d'un milieu plus aisé dans un plus difficile. Nous en supposons toujours la surface horizontale.

Ce 2^d milieu ou fluide résiste également à sa division en tous sens, c'est-à-dire, que si une sphere qui y est plongée s'y meut horizontalement, il lui résiste autant que si elle étoit

mue verticalement : mais dans le temps qu'elle s'y plonge ; il faut distinguer les différentes résistances qu'il lui fait. Elle ne peut le diviser ou s'y plonger que par son mouvement vertical , & si ce mouvement n'est que vertical , le fluide lui résiste d'autant plus que la sphere depuis le premier point de contact s'enfonce toujours successivement par un plus grand segment , jusqu'à ce qu'étant plongée précisément à moitié , elle n'éprouve plus cette augmentation de résistance , parce que les segmens suivans sont toujours plus petits , & n'ont aucune peine à suivre le chemin frayé par celui du milieu.

Cette résistance du fluide qui est toujours plus grande à cause de la grandeur croissante des segmens de la demi-sphère , est toujours plus grande d'une moindre quantité à cause de la position des parties de la demi-sphère , toujours plus propre à la division du fluide. Car dans le 1^{er} instant la demi-sphère présente au fluide un segment infiniment petit horizontal , infiniment peu propre par sa position à le diviser , & dans le dernier instant , le segment qu'elle présente au fluide est vertical , ou lui est perpendiculaire. Tous les segmens entre le premier & le dernier vont toujours en s'approchant de la position du dernier.

Le mouvement de la sphere qui n'est supposé que vertical , est donc toujours retardé ; mais toujours moins retardé depuis l'instant où elle touche le fluide , jusqu'à celui où elle a son centre sur sa surface , le chemin de la sphere n'est alors qu'une droite dont les espaces égaux sont parcourus en des temps plus longs , & toujours plus longs d'une moindre quantité. Mais si l'incidence de la sphere a été oblique , comme son mouvement a une direction verticale , & une horizontale , tout ce qui a été dit sur la verticale subsiste , à cela près qu'il y faut faire entrer l'horizontale , qui profite , pour ainsi dire , des pertes de la verticale. C'est la même chose que si le mouvement horizontal étoit toujours croissant , mais croissant d'une moindre quantité.

De-là il suit que si du centre de la sphere , lorsqu'elle touche le fluide , on mene sur ce fluide une perpendiculaire , &

sur cette perpendiculaire des ordonnées qui représentent le mouvement horisontal croissant d'instant en instant, ces Ordonnées seront celles d'une courbe, qui aura sa convexité tournée vers la perpendiculaire au fluide, ou axe. Cette position de la courbe à l'égard de son axe est une suite naturelle de ce que le 2^d fluide est supposé plus difficile à pénétrer que le 1^{er}. Le chemin de la sphere doit s'éloigner de ce 2^d, autant qu'il est possible.

A cause de l'incidence oblique de la sphere ou de son mouvement horisontal, la courbe n'est pas terminée lorsque le centre de la sphere est arrivé sur la surface du 2^d fluide. Ce fluide résiste à sa division dans le sens horisontal, & la demi-sphere qui n'est pas encore plongée, trouve cette résistance à effuyer, résistance encore croissante, parce que de plus grands segmens de la sphere entiere se plongeront toujours, mais toujours moins croissante, parce que la position des nouveaux segmens qui viendront après la demi-sphere, fera toujours plus horisontale. Ainsi le chemin de la sphere continuera à être courbe, jusqu'à ce qu'elle soit entièrement plongée, après quoi elle ne suivra plus que la droite de la réfraction, dernière tangente de la courbe totale, comme la droite de l'incidence en étoit la première.

Le chemin total de la sphere est donc une droite qui devient courbe, & ensuite une courbe qui redevient droite, il paroît que la courbure de cette courbe diminue depuis son origine jusqu'à l'extrémité, & que sa 2^{de} portion est moins courbe que la 1^{re}. Elle n'est donc pas composée de deux moitiés égales & semblables, comme celle de la réflexion. D'ailleurs elle est toujours descendante ou montante, au lieu que celle de la réflexion a une moitié descendante & une montante.

En donnant pour origine à cette courbe de la réfraction ce qui a été ici son extrémité, elle devient celle d'une sphere qui passe d'un milieu plus difficile dans un plus aisé. Alors sa concavité est tournée vers celui-ci.

Nous nous bornons à cette exposition très-abrégée de la

120 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
théorie de M. de Mairan. Il a donné sur la réfraction comme sur la réflexion des formules algébriques générales, qui comprennent non-seulement tout ce qui est, mais tout ce qu'on peut feindre ou imaginer sans contradiction. Nous avons réduit à ce qui étoit le plus physique & le plus important l'usage de ces formules, qui ont une si grande surabondance de vérité.

MACHINES OU INVENTIONS
APPROUVEES PAR L'ACADEMIE
EN M. DCCXXIII.

I.

UNE maniere inventée par M. Deschamps entrepreneur des armes du Roi, pour mesurer la force de différens ressorts. Elle consiste à les charger successivement de différens poids au moyen d'une espece de Romaine, & elle a paru bien imaginée, utile, & fort simple. Cette idée a été employée par l'Auteur à perfectionner celle qu'il avoit donnée en 1718*, de faire sur un même modele toutes les pieces des platines & des batteries des fusils, afin que quelqu'une étant rompue ou perdue, on pût aisément la remplacer, & que le fusil entier ne devînt pas inutile. Il avoit fait réflexion que cela ne suffisoit pas par rapport aux ressorts, qui quoiqu'égaux & semblables, pouvoient avoir différens degrés de force, selon la qualité de l'acier, ou le degré de trempe. En connoissant leur différente force, il pouvoit ajouter par la trempe à celui qui étoit trop foible, ou ôter par le recuit à celui qui étoit trop roide.

II.

Un porte-vent de cuir proposé par M. des Barrieres pour donner de nouvel air aux ouvriers qui travaillent aux mines, soit à celles de charbon de terre, soit à celles qu'on fait dans les sièges de places. On sçait qu'ils courent risque d'être étouffés

* V. PHIS.
de 1718.
p. 74. &
75.

étouffés par la mauvaise qualité de l'air qu'ils respirent dans ces lieux souterrains, surtout en certaines saisons. Agricola, dans son *Traité de Re Metallica*, a déjà donné le même expédient, à cela près qu'il n'a songé qu'à des porte-vents de bois. Ceux de cuir paroissent préférables en plusieurs circonstances.

III.

Des instrumens d'or, tels que des ciseaux, couteaux, poinçons, qui par l'alliage que M. Louis Siriés joint à ce métal, mou de lui-même & flexible, & par la maniere dont il le travaille, sont assez durs pour couper & pour servir dans toutes les occasions où l'on n'a pas besoin de la dureté de l'acier, & de la finesse de son tranchant. Ils ne seront pas sujets à la rouille, & auront encore l'avantage de la propreté, de l'agrément & de la magnificence.

IV.

Trois machines de M. Méynier, qui ont rapport à l'Astronomie.

La 1^{re} est une sphere de carton dans laquelle la terre est placée au centre, suivant le système de Ptolomée.

Il a disposé autour de la Terre, la Lune, le Soleil, Mars, Jupiter & Saturne; & autour du Soleil, Mercure & Vénus, conformément au sentiment de quelques Anciens.

Les planetes supérieures y ont chacune leur épicycle, par le moyen duquel il représente leurs directions, stations & rétrogradations.

Il a placé vers le bas de cette sphere des cartons diversement inclinés les uns aux autres & au plan de l'écliptique sur lesquels les planetes sont supportées.

Par le moyen de ces cartons où sont marquées les périodes des révolutions de chaque planete, il représente leur mouvement, tant en longitude qu'en latitude, en les faisant tourner avec la main.

On y trouve aussi les jours de la lune & ses phases, le lever & le coucher du soleil pour tous les climats, & l'heure qu'il est à tous les endroits de la terre.

La 2^{de} est une horloge dans laquelle est représentée la révolution du premier mobile, celle du soleil de l'orient vers l'occident, & son mouvement propre d'occident en orient. Cette horloge, outre les heures solaires, marque l'heure du passage du point du bélier par le méridien pour toute l'année, le lieu du soleil dans le zodiaque, & l'heure de son lever & de son coucher. Le lieu de la lune y est aussi marqué par une aiguille distincte.

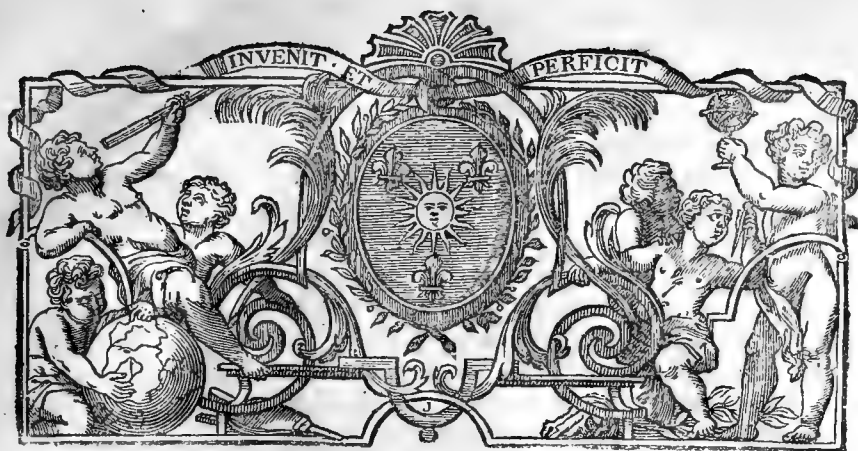
La 3^{me} est un planisphere de carton où sont représentées les étoiles autour du pôle septentrional, par le moyen duquel la hauteur de l'étoile polaire étant donnée, il détermine la hauteur du pôle, & de combien cette étoile est éloignée du méridien vers l'est ou vers l'ouest, ce qui peut servir à faire connoître la variation de la boussole pendant la nuit.

On y trouve aussi l'heure en mer pendant toutes les heures de la nuit.

Toutes ces machines, qui ont été exécutées par l'inventeur, ont paru fort ingénieuses, & ont fait connoître également son génie dans l'invention, & son adresse dans l'exécution.

A V E R T I S S E M E N T.

ON a oublié à dire dans l'Histoire, page 32, ligne 11, que la découverte de M. Ruysch avoit été confirmée par M. Littere, Mem. de 1700, p. 300, & suiv. 2^{de} Edit. & par M. Mery, Mem. de 1701, p. 273 & 274, 2^{de} Edit.



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE

ET
DE PHYSIQUE,
TIRE'S DES REGISTRES
de l'Academie Royale des Sciences.

Année M. DCCXXIII.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES
faites en 1722.

Par M. MARALDI.

ON a observé encore plusieurs fois l'aurore boréale pendant l'année 1722. Le 7 Janvier le ciel étant couvert, on voyoit du côté du nord les nuages proche de l'horizon. 13 Janv.
1723.
Mem. 1723. A

2 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 rison fort éclairés. Nous avons remarqué la même chose le
 8 , le 9 & le 12 du même mois.

Cette clarté des nuages étoit fort grande , fort étendue
 depuis le nord-est jusqu'au nord-ouest , & s'élevoit à la hau-
 teur de 25 degrés, ayant duré depuis 6 à 7^h du soir jusqu'à
 11. A toutes ces marques on a conjecturé que la clarté des
 nuages étoit causée par la lumière boreale. On a vû les mê-
 mes apparences le 20 Février , le Ciel étant couvert. Le 5
 Septembre la lumière parut fort claire entre les ouvertures
 des nuages. Nous la vîmes encore le jour suivant 6 , le ciel
 étant fort serein. C'étoit une lumière fort claire , constante ,
 formée en arc vers sa partie supérieure sans aucune de ces
 colonnes qui ont coutume de s'élever perpendiculairement
 à l'horison , & de se mêler avec la lumière constante.

Elle parut de nouveau le 10 Septembre fort claire , ac-
 compagnée de colonnes. Elle fut encore visible le 16 , mais
 sans colonnes. Enfin on en a vû une foible trace pour la der-
 niere fois de cette année le 14 d'Octobre. C'est la septieme
 année que ce phenomene paroît depuis sa premiere appari-
 tion qui arriva en 1716.

Observations sur la quantité de pluie de 1722.

	lignes		lignes
En Janvier	4 $\frac{2}{3}$	En Juillet	11 $\frac{1}{3}$
Février	16 $\frac{1}{8}$	Août	26
Mars	16	Septembre	23
Avril	4	Octobre	0
Mai	32	Novembre	10 $\frac{1}{2}$
Juin	19	Decembre	12 $\frac{1}{8}$

La hauteur de la pluie totale de l'année 1722 est de 14
 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$. Pendant les six premiers mois de l'année
 il a plu 7 pouces & 6 lignes , & dans les six derniers mois
 7 pouces 0 ligne $\frac{1}{2}$. La pluie de l'année 1722 est donc beau-
 coup au-dessous de celle des années communes qui est de 19
 pouces. Cela n'est pas seulement pour cette année : mais il y

en a huit de suite qu'il arrive la même chose ; car depuis 1713 la quantité de pluie a toujours été beaucoup au-dessous de la commune : ainsi il ne faut pas s'étonner si les sources ont fort diminué depuis quelques années à l'égard de ce qu'elles étoient les années précédentes.

Quoique la quantité de pluie de l'an 1722 ait été plus grande que celle des années précédentes , il n'y a pas eu cependant une si grande abondance de blés ; ce qui peut venir en partie de ce que la pluie n'est pas tombée dans des intervalles de tems les plus propres pour la fécondité de la terre , & qu'elle a été distribuée assez inégalement. En effet durant le mois d'Avril il n'a tombé que 4 lignes de pluie , au lieu qu'il y en a eu 32 lignes dans le mois de Mai. Il est peut-être sans exemple dans ce climat qu'il se soit passé un mois entier sans pleuvoir , comme il est arrivé en Octobre , ce mois ayant presque toujours été serein , ce qui a rendu l'automne agréable.

M. Guillin , Ingénieur à Bergue-St-Vinox , a fait dans la même Ville les observations de la quantité de pluie qui est tombée depuis le mois de Février 1719 , jusqu'au mois d'Avril de 1722 avec la même méthode que l'on pratique à l'Observatoire , & il a envoyé ces observations à M. l'Abbé Bignon. Depuis le commencement de Février 1719 jusqu'à la fin de l'année , la hauteur de la pluie tombée à Bergue est de 17 pouces 10 lignes. Celle de toute l'année 1720 est de 22 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$, & celle de 1721 est de 29 pouces 10 lignes.

Par les observations faites à Paris , la hauteur de la pluie en 1719 ne fut que de 9 pouces 4 lignes. La différence entre l'une & l'autre est au moins de 8 pouces. En 1720 à Paris la pluie fut de 17 pouces , & par conséquent 5 pouces moins qu'à Bergue ; & en 1721 elle a été de 14 pouces , plus de 15 pouces moins qu'à Bergue. D'où il paroît qu'il pleut beaucoup plus à Bergue qu'à Paris. On avoit déjà remarqué par les observations faites à Pontbriant , comparées avec celles qu'on avoit faites en même

tems à Paris, que proche de la mer il pleut en plus grande abondance qu'au milieu des terres, peut-être à cause que proche de la mer les nuages doivent être plus chargés d'humidité. On a remarqué aussi que dans les pays de montagnes il en tombe une plus grande quantité que dans les plaines; ce qui vient de ce que les nuages qui sont chassés par les vents, sont arrêtés par les montagnes, lorsqu'ils les rencontrent, & s'y convertissent en pluie, qui par cette raison y doit être en plus grande abondance que dans les plaines, où il n'y a rien qui arrête ces nuages qui sont chassés par les vents.

Observations sur le Barometre.

La plus grande hauteur du barometre simple a été à 28 pouces 7 lignes $\frac{1}{4}$: il s'est trouvé dans cet état en Janvier pendant quatre jours, c'est-à-dire, depuis le 2 jusqu'au 5, inclusivement. Le ciel étoit alors couvert avec un grand brouillard & l'air tranquille. Cette hauteur est peut-être la plus grande où le mercure soit arrivé dans ce climat depuis que l'on fait ces observations.

M. Cassini dans son Traité de la comete, remarque que le premier de Janvier 1681 le barometre étoit à 28 pouces 4 lignes $\frac{1}{2}$, c'étoit la plus grande hauteur où il l'avoit vû depuis plusieurs années. M. de la Hire ne l'a jamais observé plus haut que 28 pouces 5 lignes. Par les observations de l'année 1721 nous le trouvâmes le 18 & le 20 de Janvier à 28 pouces 6 lignes; ainsi en 1722 il a été une ligne & demie plus haut qu'il n'avoit été auparavant dans la plus grande hauteur. Dans cette grande élévation le ciel a été toujours couvert, comme il a continué de faire durant les quinze premiers jours de Janvier. Le jour de la plus petite hauteur du barometre a été le 31 Decembre par un vent de sud-ouest violent: il se trouva ce jour-là à 27 pouces une ligne $\frac{1}{2}$.

Le plus grand froid de l'année marqué par le thermometre est arrivé le 24 Janvier, ayant descendu ce jour-là à 25,

parties. Cette situation est à peu-près l'état moyen entre le temperé qui arrive à 48 degrés, & le plus grand froid qui est à zero.

Dans les plus grandes chaleurs de 1722 le même thermometre est monté à 72 degrés, ce qui est arrivé le 15, le 16 & le 27 Juin à 3 heures après midi, qui est l'heure de la plus grande chaleur du jour. Le vent étoit ces jours-là sud ou sud-est. C'est presque toujours avec ces vents que sont accompagnées les grandes chaleurs de l'été, qui ont été fort modérées durant cette année, le thermometre n'étant monté qu'à 72, au lieu que dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, il s'étoit élevé à 82 parties. Cette année les plus grandes chaleurs sont arrivées au mois de Juin, au lieu que dans la plupart des années elles arrivent au mois de Juillet & d'Août.

Déclinaison de l'aimant.

La déclinaison de l'aimant observée le 22 Novembre 1722 & le 4 Janvier 1723 avec une boussole de 4 pouces, a été trouvée de $13^{\circ} 0'$ nord-ouest, précisément telle qu'elle a été trouvée avec la même boussole en 1721 & en 1722. La déclinaison ne varie donc pas depuis trois ans, & par conséquent elle est stationnaire. En 1716 nous trouvâmes la déclinaison de $12^{\circ} 30'$: & comme elle varioit auparavant de 12 minutes par an, si depuis 1716 elle avoit fait le même progrès qu'elle faisoit auparavant, elle auroit été cette année de 14 degrés. La différence entre l'observation & le progrès qu'elle auroit dû faire si elle avoit continué de décliner, est un degré, ce qui seroit sensible. Il est donc certain qu'elle ne continue pas de varier, & qu'elle est stationnaire.

DE L'ORIGINE ET DES USAGES
DE
LA PIERRE DE FOUDRE.

Par M. DE JUSSIEU.

RIEN n'est si connu dans la république des Lettres que le mérite que les Anciens , & qu'une tradition qui depuis eux s'est même conservée parmi nous , ont attribué à la *pierre de foudre* .

L'explication du nom de *ceraunia* qu'elle porte ; nous apprend qu'ils la croyoient descendre du ciel dans le moment que le tonnerre éclatoit & tomboit sur quelque endroit que ce fût de la terre.

Cette prétendue origine la faisoit regarder avec une espèce de respect qui avoit rapport à la majesté du Dieu qu'ils s'imaginoient l'avoir lancée. Aussi Pline la met-il dans le nombre des pierres précieuses.

Mais il n'y a point eu de peuples qui en ayent fait plus de cas que ceux du nord , par la superstition qu'ils attachoient à ces pierres , qui étoit que comme ils avoient autrefois adoré une idole qu'ils croyoient présider à la foudre , & qu'ils représentoient avec la foudre à la main sous la figure d'une de ces pierres taillées en coin , ils conservoient chez eux une de ces sortes de pierre comme un préservatif contre la foudre , qu'ils croyoient éloigner de leurs maisons , lorsqu'au premier bruit du tonnerre qu'ils entendoient , ils avoient frappé de ces pierres trois fois les endroits par lesquels le tonnerre auroit pû entrer.

Helwing , celebre Ministre d'Angerbourg en Prusse , qui a fait un Traité particulier des pierres de son pays , dit qu'il lui a fallu recourir au bras séculier pour détruire cette superstition dans le lieu où il exerçoit son ministère ; supersti-

tion qui étoit d'autant plus enracinée , qu'elle étoit entretenue par les découvertes continuelles qui s'y faisoient de ces sortes de pierres , dont ces peuples ne pouvoient s'imaginer que la figure n'eût quelque chose de mystérieux.

Cette nation sembleroit s'être accordée en cela avec les Chinois , chez lesquels Rumphius , qui nous a donné des figures de ces sortes de pierres dans son Recueil de coquilles , nous assure qu'une pareille idée a pour fondement l'observation qu'ils font sur la figure , sur la qualité & la couleur de ces sortes de pierres , & sur les endroits sur lesquels il s'en trouve qui sont souvent des troncs d'arbre qu'ils s'imaginent avoir été frappés de la foudre.

Quelque éloignés que nous soyons de semblables idées , nous n'avons pas laissé de croire jusqu'ici que le *ceranium* est une pierre naturelle dont le caractère est d'être figurée ou en coin ou en fer de fleche de la même maniere que la figure ovale , la cylindrique , la prismatique & l'orbiculaire sont les caractères des cailloux de Meudoc , de l'émeraude , de quelques cristaux , & des échinites.

Mercati , tout éclairé qu'il étoit dans l'histoire des fossiles , n'a pas voulu tellement adhérer à l'opinion que ces sortes de pierres aient été taillées de cette forme , qu'il ait renoncé au sentiment de ceux qui en admettent la possibilité naturelle sous le nom de *jeu de nature*.

Mais aujourd'hui un peu d'attention à deux ou trois especes de pierres qui nous viennent, les unes des Isles d'Amérique , & les autres de Canada , est capable de nous détromper de ce préjugé , du moment que nous apprenons , à n'en pas douter , que les sauvages de ces pays-là se servent à différens usages de pierres à peu-près semblables , qu'ils ont taillées avec une patience infinie par le frottement contre d'autres pierres , faute d'aucun instrument de fer , ni d'acier.

Les premiers besoins des Sauvages sont ou de couper & fendre du bois , ou de se faire des armes dont ils puissent tuer des animaux pour leur subsistance , ou de se défendre contre leurs ennemis.

La figure de hache & de celle de coin qu'ils ont donnée à quelques pierres que nous avons tirées d'eux , nous marque assez qu'ils les ont taillées pour les premiers de ces usages, & celle de pointe qu'ils ont données à quelques pierres à feu que nous voyons adroitement entées sur l'extrémité de certains bois menus & longs , nous font assez connoître qu'ils s'en servent comme de fleches.

J'en rapporte une piece originale de chacun de ces instrumens ; l'une qui est en forme de hache , tirée des Caraïbes ; la seconde qui ressemble à un coin , apportée du Canada ; & la troisieme , qui sont trois fleches , chacune ayant pour armure , au lieu d'une pointe d'acier , un fragment triangulaire de pierre à feu , aiguisé par l'angle qui lui sert de pointe, & tranchant des deux côtés.

Lorsque nous voyons donc parmi les figures de ceux qui ont fait des recueils de pierres figurées , celles qui se rapportent à quelqu'une de ces trois formes, & sur-tout à celle de coin & à celle de fer de fleche qui ont toujours passé jusqu'ici pour *pierres de foudre* & pour mystérieuses , nous ne devons point hésiter de les regarder comme instrumens répondans à ceux d'acier , auxquels ils ressemblent , & qui ont été taillés ou par les premiers habitans de ces pays où on les trouve , ou y avoient été apportés par des étrangers qui en faisoient une sorte de commerce. Ce qui donne lieu à cette conjecture est que dans la plupart des pays où se trouvent ces sortes d'instrumens , on n'y voit point ni carriere ni caillou de la même nature qui ait pû servir pour les y fabriquer sur les lieux , & que par conséquent il y avoit beaucoup d'apparence que des habitans d'un pays où se rencontrent des cailloux d'un grain aussi fin & d'une espece aussi dure , venoient les échanger contre d'autres denrées : & ce qui acheve de confirmer cette conjecture , est que la même chose se pratique encore chez les Sauvages , parmi lesquels ceux qui ont plus d'adresse & de patience pour tailler ces sortes d'instrumens , les fournissent aux autres qui sçavent peut-être mieux s'en servir.

Les

Les peuples de France & d'Allemagne, & des autres pays du Nord, pour ce qui est de la découverte du fer, sont assez semblables à tous les sauvages d'aujourd'hui, & n'avoient pas moins besoin qu'eux, avant l'usage du fer, de couper du bois, de séparer des écorces, de fendre des branches, de tuer des bêtes sauvages, de chasser pour leur nourriture, & de se défendre de leurs ennemis, ce qu'ils ne pouvoient guere exécuter qu'avec de tels instrumens, qui n'étant pas comme le fer sujets à la rouille, se retrouvent aujourd'hui dans la terre en leur entier, & presque avec leur premier poli.

Comme il est assez ordinaire que des choses d'un genre très-différent portent quelquefois le même nom, & que celui de *Pierre de foudre* qui ne devoit convenir qu'à celle que j'ai décrite, se donne encore en françois à une espece de marcaassite vitriolique, de figure ou oblongue ou arrondie, tantôt hérissée de pointes, tantôt lisse & tantôt à facettes, je suis bien aise d'avertir qu'elle ne doit point être confondue avec cette première, non-seulement parce qu'elle ne lui ressemble en rien par rapport à la figure, & qu'au contraire elle en est très-différente par les propriétés qu'elle a de fuser & de se convertir en vitriol, lorsqu'elle est exposée à l'air, au lieu que celle dont je parle, est une vraie pierre très-dure, d'un grain si fin qu'elle sert de pierre de touche pour les métaux, & à polir différens ouvrages.



SUR LES FIGURES
INSCRITES ET CIRCONSCRITES
AU CERCLE.

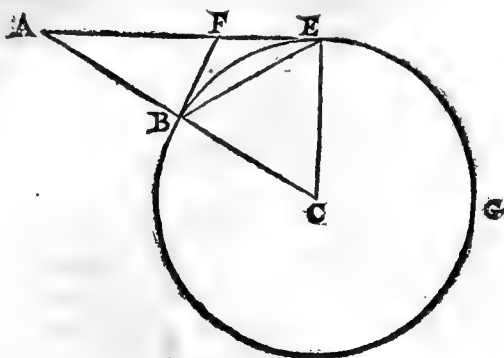
Par M. SAURIN.

3. Février
1723.

C'EST une propriété de ces figures, très-connue des géomètres, que l'aire d'une figure inscrite est moyenne proportionnelle géométrique entre l'aire de l'inscrite & celle de la circonscrite qui ont la moitié moins de côtés. Ainsi, par exemple, l'exagone inscrit est moyen proportionnel géométrique entre le triangle équilatéral inscrit & le triangle équilatéral circonscrit; l'octogone entre le carré inscrit & le circonscrit; le décagone entre le pentagone inscrit & le circonscrit, &c. Mais je ne sçai si l'on a remarqué de même dans ces figures une autre propriété qui a du rapport à celle-là, & qui ne mérite pas moins d'être remarquée; c'est que l'aire de toute figure régulière circonscrite au cercle, est moyenne proportionnelle harmonique entre l'aire de la même figure inscrite & celle de la circonscrite qui a la moitié moins de côtés; ainsi l'exagone circonscrit est moyen proportionnel harmonique entre l'exagone inscrit & le triangle équilatéral circonscrit; l'octogone circonscrit entre l'octogone inscrit & le carré circonscrit; le décagone circonscrit entre le dodécagone inscrit & le pentagone circonscrit, &c.

Voici comme je démontre cette propriété, qui s'est présentée à moi par hasard, en examinant par ordre de l'Académie une prétendue quadrature du cercle.

Soit mené dans le cercle *BEG* le côté *BE* d'une figure régulière le rayon *CE*; la tangente *EA* qui rencontre en *A*, *CB* prolongé & la tangente *BF*, rencontrant en *F* la tangente *EA*, il est évident que *BEC* étant une partie de la fi-



gure inscrite, BFE une partie correspondante de la même figure circonscrite, & ACE une partie de la circonscrite qui a la moitié moins de côtés : ce qu'on démontrera de la partie ACE par rapport aux parties $B FEC$, & BEC sera démontré des figures entières.

Les triangles ACE & BEC ayant même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases AC , BC ; il faut donc démontrer que ABF qui est l'excès dont ALC surpasse BEC est à BFE , excès dont $B FEC$ surpasse BEC , comme AC à BC .

Les triangles ABF & BFE sont entr'eux comme AF à FE , ou (à cause que FB est égale à FE) comme AF à FB . Mais les triangles ABF & ACE étant rectangles & ayant l'angle BAF commun, sont semblables. Donc AF est à FB comme AC à CE ; ou CE étant égale à CB , comme AC à CB , donc les triangles ABF , BFE , sont entr'eux comme AC à CB . Ce qu'il falloit démontrer.



E X A M E N

D'une MATIERE CUIVREUSE, qui est une espece de verd-de-gris naturel.

Par M. DE REAUMUR.

13 Fevr.
1723.

S'IL est des délassemens loüables, ce sont certainement ceux qui contribuent à étendre nos connoissances. Il est rare que les particuliers les choisissent, & au moins aussi rare qu'ils soient du goût des Princes. Il n'en est pourtant point de plus agreable pour S. A. S. Monseigneur le Duc de Chartres que ceux de cette espece. Dans les instans qu'il ne doit point aux plus importantes occupations, rien ne l'amuse davantage que ce qui peut lui donner de nouvelles connoissances, sur-tout par rapport à l'histoire naturelle & à la physique. Comme ce goût, si estimable, est très-connu, on s'empresse à lui offrir ce que ces sciences ont de nouveautés curieuses ou utiles. Il ya quelque temps qu'on lui présenta divers morceaux de la matiere minerale dont je vais parler, & ce sont les ordres que me fit l'honneur de me donner S. A. S. qui m'ont engagé à l'examiner.

Cette matiere a été apportée des Indes par morceaux de figures irrégulieres & de différentes grosseurs. Un de ceux qui m'a été remis avoit au moins six pouces & demi de diametre, dans le sens où il en avoit le plus, & environ quatre dans celui où il en avoit le moins. La couleur seule de cette matiere inviteroit à l'observer; elle est du plus beau verd & du plus vif, tirant sur celui des émeraudes. Mais ce verd est principalement remarquable par un oeil foyeux & satiné, qu'on ne trouve point dans les verds des pierres & des plantes. Cet oeil satiné est une suite de la structure de notre mineral. Quelque part où on le casse, il ne semble qu'un

* Fig. 1. amas de végétations *; on voit par-tout des especes de bran-

chages qui par leurs contours imitent ceux des arbrisseaux, ou au moins les plus belles de ces productions de la Chymie auxquelles on a crû devoir donner le nom de *végétations*. Plusieurs de ces branchages partent d'une même base, & forment ensemble une même touffe *. Chaque morceau de notre mineral est composé d'un grand nombre de pareilles touffes de différentes hauteurs; les unes n'ont qu'un pouce, d'autres en ont trois ou quatre; tantôt c'est du sommet de l'une, tantôt c'est du côté & vers le milieu d'une autre qu'une nouvelle touffe s'élève. Les différens branchages sont assez serrés les uns contre les autres pour composer une masse compacte; ils ne laissent guere de vuides considérables, il y a pourtant des endroits où les vuides sont sensibles.

* Fig. 2.

Ces branchages sont la premiere singularité de la structure de notre mineral; leur composition propre en est une autre. Ils sont faits chacun d'une infinité de filets* extrêmement déliés, appliqués les uns contre les autres; chaque branchage est un paquet de ces filets *. De là vient que la couleur du mineral a un air soyeux & satiné; tel que l'auroient des paquets de fil de soie, s'ils pouvoient avoir tout l'éclat d'une matiere naturellement plus compacte & plus polie que la soie. En un mot, sa structure ressemble à celle de l'amiante & à celle de certains gyps singuliers formés par filets. Cette matiere est médiocrement dure, à peu près comme le sont l'alun & le vitriol: mais elle est plus friable entre les doigts; si on l'y frotte, on la divise assez souvent en petits brins d'une finesse extrême.

* Fig. 5.

* Fig. 4.

Elle est pesante; elle est absolument insipide au goût, mais il est de la prudence de la goûter sobrement. Elle ne se dissout point, ou se dissout peu dans l'eau commune.

La pesanteur de cette matiere dispose naturellement à la regarder comme métallique, & sa couleur conduit à penser qu'elle n'est qu'un cuivre déguisé, un cuivre préparé par la nature, comme notre verd-de-gris est un cuivre préparé par l'art, en un mot qu'elle est une espece de verd-de-gris naturel. J'ai d'autant moins douté qu'elle ne fût de nature

14. MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cuivreuse, que j'en ai trouvé de semblable, mais en petite
quantité, au milieu de quelques morceaux de mine de cui-
vre du Royaume.

Pour m'assurer davantage de sa nature, j'en suis venu aux
essais. J'ai commencé, comme on commence toujours pour
préparer les mines à être essayées, par la faire piler, & ré-
duire en poudre très-fine. On sçait qu'avant d'en venir à sépa-
rer, par la fusion, la matiere métallique des autres matieres
avec lesquelles elle peut être mêlée, on fait rôtir la mine,
& que pour de simples essais en petit, cette opération se fait
dans une cuillère de fer mise sur le feu; qu'on y chauffe à
différentes reprises la poudre minérale jusques à rougir. Cet-
te manipulation change ordinairement la couleur de la pou-
dre minérale. Elle a aussi enlevé à la nôtre sa couleur verte;
elle lui en a donné une noire, elle l'a rendue semblable à du
charbon pilé.

Pour en venir à l'essai, j'ai mis de cette poudre dans un
creuset, exposé d'abord à un feu médiocre que par la suite
j'ai rendu plus vif, & bien-tôt j'ai eu une nouvelle preuve
de sa nature cuivreuse. Il s'est bien-tôt échapé une flamme
verdâtre entre les bords du creuset & ceux de son couver-
cle; une flamme toute pareille à celle qui paroît lorsqu'on
brase quelque piece de fer avec du cuivre. Le feu étant pouf-
sé ensuite assez vigoureusement, la matiere a fondu. Quand
j'ai cru le degré de fusion suffisant, j'ai retiré le creuset du
feu, & l'ai laissé refroidir; l'ayant cassé ensuite, j'ai trouvé
au fonds du creuset un culot assez semblable par sa couleur
à du cuivre de rosette, mais d'une matiere cassante comme
du verre.

Il est rare que les matieres minérales contiennent un me-
tal assez peu déguisé pour qu'un essai aussi simple que celui
dont je viens de parler le fasse paroître sous sa forme metal-
lique. Il y a même des mines, de toute espece, qui ne se-
roient pas mises en fusion par une opération si peu compo-
sée. Enfin les mines de cuivre fondues même avec les se-
cours de différens fondans, ne donnent d'abord qu'une

matiere cassante comme celle dont je viens de parler , mais qui n'a nullement la couleur du cuivre , qui est noire , & qu'on appelle aussi du *cuivre noir*.

La couleur de la matiere venue de ces essais m'a fait conclurre que nôtre mine contenoit un cuivre qui pour être revivifié , ne demandoit qu'à être pénétré de parties sulphureuses , dont apparemment il avoit été dépouillé. J'ai donc cru que pour tout appareil il suffiroit de mettre notre poudre minérale dans un creuset où elle seroit entourée de poudre de charbon. J'ai pesé dans les balances d'essai un quintal de cette poudre. On sçait que le quintal d'essai est un très-petit poids , & n'est ordinairement qu'un gros. J'ai mis de la poudre de charbon dans le fonds d'un petit creuset , j'ai mis au dessus notre quintal ou gros de mine , & j'ai achevé de remplir le creuset avec de la poudre de charbon , je l'ai ensuite exposé à la forge au feu du soufflet ; dans moins d'une demi-heure la matiere a été fondue. Quand le creuset a été refroidi , j'ai trouvé au fond un bouton ou culot de cuivre malléable qui pesoit soixante-dix de nos petites livres , c'est-à-dire , soixante-dix parties de la masse que j'avois pesée. Probablement elle en eût pesé davantage , si le creuset eût été plutôt tiré du feu ; mais je cherchois plus à m'assurer de la qualité de la matiere que de sa quantité.

Le culot de matiere cassante que j'avois eu par mon premier essai , ayant été remis au feu au milieu de la poudre de charbon , y a été aussi revivifiée en véritable cuivre : il est devenu une matiere malleable.

J'ai voulu essayer la même matiere par des procedés plus composés qu'on suit , & qu'il est nécessaire de suivre pour d'autres matieres minerales , c'est-à-dire , en répétant les fusions , comme il est enseigné dans Erker , & ailleurs , & y ajoutant différens sels. Par le moyen de ces essais , j'ai aussi tiré du cuivre de notre minéral , mais bien moins que par le moyen de la seule poudre de charbon.

Nous pouvons donc regarder cette matiere minérale comme un cuivre qui a été dissous , & à qui sa matiere huileuse

a été enlevée. C'est un verdet naturel, différent pourtant de l'ordinaire, non-seulement par sa couleur, mais encore par sa composition. J'ai mis notre verd-de-gris commun dans un creuset au milieu de la poudre de charbon, il ne s'y est point fondu, il n'y est point redevenu cuivre. Pourquoi cela? C'est que notre verdet est du cuivre dissous par les acides du vin, du cuivre pénétré par ces acides; mais pendant cette dissolution la partie huileuse de ce cuivre n'a point été enlevée. Le verdet artificiel semble donc différer de notre verdet naturel, en ce que le dernier est dépouillé de sa partie huileuse, au lieu que l'autre a conservé la sienne; peut-être diffèrent-ils encore par la quantité & la qualité des acides dont ils sont pénétrés.

Qu'on tire au moins de ce que nous venons de dire, une remarque pour se conduire dans les essais des mines de cuivre, c'est qu'il y en a qu'il faut essayer avec la poudre de charbon seule, & qu'on essayeroit avec moins de succès avec les sels: tels sont celles qui ont été dépouillées de leur matière sulphureuse.

Nous pouvons donc regarder notre minéral comme une dissolution de cuivre qui s'est ensuite cristallisée en formant différens branchages. Aussi avons-nous fait remarquer que les fragmens des branches semblent de vrais cristaux, des especes d'émeraudes moins transparentes que les véritables. Mais la beauté de la couleur des cristaux de notre mine fait voir que le cuivre préparé par la nature d'une matière semblable, peut donner aux pierres transparentes avec lesquelles il sera mêlé la plus belle couleur verte, qu'il en peut faire de véritables émeraudes.

Si on nous demandoit si ces cristaux ont été formés par un suc chargé de matière cuivreuse, qui par son propre poids perceoit des terres, dans les cavités desquelles il déposoit des parties qui s'arrangeoient en branchages; ou si ces touffes ont été formées comme les végétations chimiques, par un liquide qui s'élevoit, & ne pouvoit porter les parties métalliques que jusques à une certaine hauteur: si, dis-je, on nous

le demandoit, nous répondrions que nous n'avons pas assez de faits pour décider de laquelle des deux manieres s'est faite cette production. Il faudroit même pousser les expériences plus loin que nous ne l'avons fait, pour décider quel est précisément le sel qui a dissous le cuivre, quoique, selon les apparences, il soit de la nature de l'acide vitriolique.

Les filets, qui rendent la structure de ce minéral remarquable, ne sont point un phénomène particulier qui ait besoin d'être expliqué, dès qu'il n'est qu'une matiere métallique dissoute par beaucoup de sels; il est ordinaire à bien des sels de se disposer par aiguilles. On sçait que les pyrites ne sont qu'un composé de soufres & de sels; quand on les garde plusieurs années, & surtout si elles sont exposées à l'humidité de l'air, elles s'y dissolvent, leur surface se couvre d'aiguilles de sel; souvent ces sels s'y arrangent par touffes composées de filets blancs, qui semblent autant de petites touffes de soie.

Nous n'avons rien dit d'un autre phénomène, que nous avons observé pendant que nous faisions rôtir notre matiere, qui peut-être ne doit pas être oublié, quoiqu'il ne lui soit pas particulier. Pendant qu'on rôtit la poudre fine de ce minéral, pendant que la couleur verte se change en une couleur noire, il s'y fait des bouillonnemens assez singuliers, & ils le sont d'autant plus que la poudre a été mise dans un vase plus étroit. On voit, par exemple, mieux ce bouillonnement dans un creuset conique que dans une cuilliere de fer. Ces bouillonnemens se font en différens endroits, & continuent pendant quelque temps dans les mêmes endroits où ils ont commencé. La poudre s'élève sur chacun de ces endroits à la hauteur d'un pouce & d'avantage; au-dessous de l'endroit où elle a commencé à faillir, il se forme un petit trou en maniere de tremie, & c'est par ce même trou que de nouvelle poudre sort continuellement. Le bouillonnement qui a commencé, continue, quoiqu'on retire le creuset du feu. Si ce bouillonnement cesse quelque part, dans le temps que la poudre a encore un degré de chaleur considé-

nable, on n'a qu'à percer la surface en un autre endroit pour déterminer un nouveau jet de poudre à s'y former.

La cause de ce bouillonnement ne peut être attribuée qu'aux parties volatiles qui se dégagent de notre poudre, quand elle a pris un certain degré de chaleur; on les supposera sulphureuses, salines, ou si l'on veut, simplement aqueuses, il n'importe pour l'explication de ce fait. Il suffit qu'on imagine qu'une vapeur cherche à s'élever de tous les petits grains, qu'une partie de la vapeur a la force de percer la surface, qu'elle s'échape, & qu'elle forme une route où de nouvelle vapeur va se rendre. Les petits trous en tremie qui paroissent ensuite sont tout autant de cheminées vers où cette vapeur se dirige; cette espece de fumée emporte les grains qu'elle rencontre en son chemin, elle les enleve même assez haut.

Une vraie preuve que c'est l'évaporation d'une matiere très-volatile qui produit cet effet, c'est que si la poudre est rôtie à un certain point, on a beau la chauffer, il ne s'y formera plus de jets, plus de bouillonnemens. Cet effet doit être d'autant plus considérable que la poudre sera plus légère, & qu'elle fournira plus de vapeurs.

J'ai voulu essayer si la poudre de charbon ne produiroit pas le même effet; elle ne bout point d'elle-même comme la nôtre, mais on peut la déterminer à bouillir, à donner de petits jets, il n'y a qu'à la percer quand elle est très-échauffée: les jets seront moins considérables que ceux de notre matiere, mais ils seront semblables.

La poudre de charbon peut encore servir à nous faire voir la vraie cause du bouillonnement de notre poudre; je l'ai fait extrêmement chauffer dans un creuset, & j'ai subitement plongé le creuset chaud dans l'eau froide, aussi-tôt le charbon s'est élevé en jets, il s'y est formé grand nombre de bouillonnemens & beaucoup plus considérables que ceux dont j'ai parlé ci-dessus; l'eau imbiboit le creuset; après l'avoir traversé, elle s'élevoit en vapeurs, assez fortes pour porter haut la poudre qui s'opposoit à leur passage. La preuve

qu'une pareille vapeur s'élevoit du creuset, c'est que quand il a été refroidi, ses parois intérieures ont paru très-humides.

On sçait aussi que le plâtre, chauffé sur le feu dans quelque vase, y bout : mais j'ignore si on a observé que la cause de son bouillonnement n'est dûe qu'à une vapeur aqueuse qui cherche à s'élever. La preuve en est que l'expérience réussit d'autant mieux que le plâtre a été plus long-temps exposé à l'humidité de l'air, & que lorsqu'il a été chauffé jusques à un certain point, ou pendant un certain temps, alors il ne bout plus.

Pour produire une espece de bouillonnement dans une poudre, il faut donc, comme nous l'avons déjà remarqué, que deux circonstances concourent ; sçavoir, que les parties de la poudre soient légères & fines, & qu'elles soient propres à fournir quelques vapeurs, ou qu'elles soient humides. Voici la preuve de la nécessité de l'une & de l'autre de ces circonstances. J'ai tenté de faire bouillir de la poudre d'os brûlés, elle est très-pesante, aussi n'a-t-elle donné aucun bouillonnement, quand elle a eu un degré de chaleur qui eût suffi à faire bouillir le plâtre. J'ai jetté dessus une goutte d'eau, ou pour rapporter plus naïvement l'expérience, j'ai craché dessus, aucun bouillonnement ne s'est fait encore dans cet instant : mais ayant mêlé la poudre avec un bâton, afin qu'elle recouvrit la salive que j'y avois jettée, alors les bouillonnemens ont commencé. Il s'en faisoit de nouveaux partout où je conduisois la poudre humectée au-dessous de la poudre sèche, les bouillonnemens étoient très-considérables, la quantité de la vapeur forçoit la poudre, quoique pesante, à s'élever très-haut.

La glaise pilée & réduite en poudre très-fine, le marbre pilé, & en général toute matiere réduite en poudre fine, font voir de pareils bouillonnemens, si ces matieres sont un peu humides ; & cela sera commun, comme nous l'avons dit, à toute poudre fine & légère, tant qu'elle laissera évaporer sur le feu une suffisante quantité d'humidité. Des vapeurs d'une autre espece qui s'éleveroient en aussi grande

20° MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
quantité, ou avec autant de force, produiroient le même
effet, car cet effet n'est point celui de l'eau, c'est celui de
la vapeur en général.

EXPLICATION DES FIGURES.

La FIGURE I. représente un morceau de notre miné-
ral cuivreux diminué de volume.

La FIG. II. représente une des touffes dont la masse
précédente est formée.

La FIG. III. est une portion de touffe grossie à la loupe.

La FIG. IV. est un des branchages de la touffe, grossi au
microscope, pour faire l'arrangement des filets dont il est
composé.

La FIG. V. est celle des filets qui composent les branchages.

SECONDE PARTIE DU CALCUL

DES DIFFERENCES FINIES.

Par M. NICOLE.

28 Avril
1723.

JE me propose dans ce Mémoire, de donner des métho-
des pour sommer des suites de grandeurs, dont chaque
terme est composé des produits de tant de facteurs qu'on
voudra, augmentant selon une loi quelconque, mais unifor-
me, soit que ces suites soient formées par des nombres en-
tiers, ou des fractions, & qu'elles soient composées d'un
nombre fini de termes pour les grandeurs entières, & d'un
nombre fini ou infini de termes pour les grandeurs rompues.

Toutes les suites qui peuvent être sommées par la métho-
de que l'on explique dans ce Mémoire, ne peuvent l'être par
celles que j'ai données sur cette matiere dans un Mémoire
imprimé en 1717, dans lequel cette seconde Partie a été
annoncée.

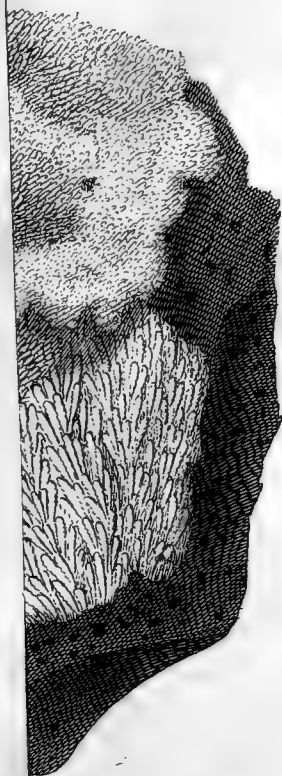


fig. 2.



fig. 4.



fig. 1.

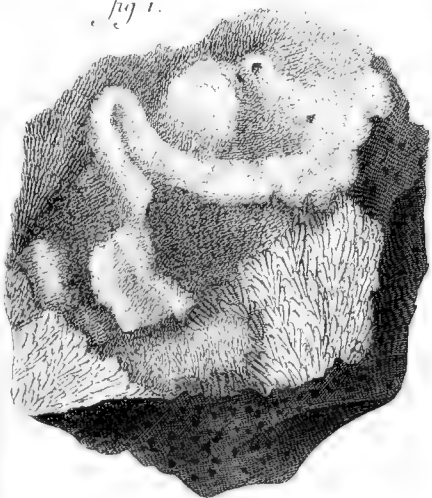


fig. 2.



fig. 3.



fig. 4.



On divise cette seconde Partie en deux sections, dont la première regardera les suites composées de nombres entiers, & la seconde celles composées de fractions.

SECTION I.

Des suites composées de nombres entiers.

Soit cette suite x . $x + n$. $x + 2n$. $x + 3n + x + m$.
 $x + m + n$. $x + m + 2n$. $x + m + 3n + x + 2m$
 $+ x + 2m + n$. $x + 2m + 2n$. $x + 2m + 3n + \&c.$
 dans laquelle les facteurs d'un même terme augmentent de la grandeur constante n , & pour devenir les facteurs du terme suivant, ils augmentent de la grandeur constante m .

Lorsque ces deux grandeurs m & n sont égales, la suite devient x . $x + n$. $x + 2n + x + n$. $x + 2n + x + 3n + \&c.$ où l'on voit que le premier facteur du second terme est le second facteur du premier terme, & ainsi des autres. Ce qui est le cas du Mémoire imprimé en 1717, où l'on a donné une méthode pour prendre la différence de telles suites, & la manière de les intégrer. Cette méthode ne peut satisfaire qu'à un petit nombre de cas, puisque le premier facteur du second terme peut être à telle distance indéterminée qu'on voudra du premier facteur, & ainsi des autres.

PROPOSITION I.

Soit cette expression algébrique x . $x + n$ composée de deux facteurs dont on demande la différence, en supposant que l'augmentation faite à x soit m , cette expression devient par cette augmentation $x + m$. $x + m + n$; la différence de l'une à l'autre est donc $x + m$. $x + m + n - x$. $x + n$, & en mettant pour $x + m$, $x + n + m - n$, on aura

(C iiij)

$x + n + m - n \times x + 2n + m - n - x. x + n$, la multiplication étant faite, il vient

$x + n. x + 2n + x + n. m - n + x + 2n. m - n + m - n - x. x + n = x + n. x + 2n + x + n. m - n \times 2 + n. m - n + m - n - x. x + n$ qui se réduit à (A) $x + n. x + 2n + 2m - 2n. x + n + m \times m - n - x. x + n$, & effaçant les termes qui se détruisent, il vient $2m. x + n + m. m - n$ pour la différence cherchée.

Soit maintenant cette expression algébrique $x. x + n. x + 2n$ composée de trois facteurs, dont on demande la différence, en supposant que la quantité dont x croît est m .

Il est clair que cette expression deviendra par l'accroissement $x + m. x + n + m. x + 2n + m$, ou $x + n + m - n. x + 2n + m - n. x + 3n + m - n$ dont il faut retrancher $x. x + n. x + 2n$. Le produit de deux premiers facteurs est en A. Si donc on multiplie ce produit par $x + 3n + m - n$, on aura

$x + n. x + 2n. x + 3n + 2. m - n. x + n. x + 3n + m. m - n. x + 3n + m - n. x + n. x + 2n + 2. m - n. x + n + m. m - n - x. x + n. x + 2n$, cette quantité se réduit, en observant que chaque terme ait des facteurs consécutifs, à $x + n. x + 2n. x + 3n + 2. m - n. x + n. x + 2n + 2. m - n. n \times x + n + m. m - n. x - n + m. m - n. 2n + m - n. x + n. x + 2n + 2. m - n. x + n + m. m - n - x. x + n. x + 2n$, ou (B) $x + n. x + 2n$.

$x + 3n + 3. m - n. x + n. x + 2n + 3. m. m - n.$
 $x + n + m. m - n. m + n - x. x + n. x + 2n$ qui se
réduit, en effaçant les termes qui détruisent, à cette ex-
pression

$3m. x + n. x + 2n + 3m. m - n. x + n + m. m - n. m + n$
la différence cherchée.

Pour la différence de cette expression composée de qua-
tre facteurs $x. x + n. x + 2n. x + 3n$, la quantité m
étant toujours l'accroissement des facteurs, on trouvera

$x + n + m - n \times x + 2n + m - n \times x + 3n + m - n$
 $\times x + 4n + m - n - x. x + n. x + 2n. x + 3n$, le pro-
duit des trois premiers facteurs a été trouvé en B . Si donc
on multiplie B par $x + 4n + m - n$, il viendra
 $x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n + 3. m - n. x + n. x + 2n.$
 $x + 4n + 3m. m - n. x + n. x + 4n + m. m - n. m + n.$
 $x + 4n + m - n. x + n. x + 2n. x + 3n + 3. m - n.$
 $x + n. x + 2n + 3m. m - n. x + n + m. m - n. m + n.$
 $- x. x + n. x + 2n. x + 3n$, & en réduisant tous les
termes à avoir des facteurs consécutifs, on aura

$x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n + 3. m - n. x + n. x + 2n.$
 $x + 3n + 3n. m - n. x + n. x + 2n + 3m. m - n. x + n.$
 $x + 2n + 3m. m - n. 2n. x + n + m. m - n. m + n.$
 $x + n + m. m - n. m + n. 3n + m - n. x + n. x + 2n.$
 $x + 3n + 3. m - n. x + n. x + 2n + 3m. m - n. x + n$
 $+ m. m - n. m + n - x. x + n. x + 2n. x + 3n$, qui se
réduit à $x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n + 4. m - n.$
 $x + n. x + 2n. x + 3n + 6m. m - n. x + n. x + 2n.$

$+ 4m. m - n. m + n. x + n + m. m - n. m + n. m + 2n$
 $- x. x + n. x + 2n. x + 3n$, & en effaçant les termes qui
 se détruisent, il vient $4m. x + n. x + 2n. x + 3n + 6m$
 $m - n. x + n. x + 2n + 4m. m - n. m + n. x + n. + m.$
 $m - n. m + n. m + 2n$, pour la différence cherchée.

Enfin si l'on cherche la différence de cette quantité com-
 posée de cinq facteurs $x. x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n$,
 m étant l'augmentation, on trouvera $x + n. x + 2n.$
 $x + 3n. x + 4n. x + 5n + 5. m - n. x + n. x + 2n.$
 $x + 3n. x + 4n + 10m. m - n. x + n. x + 2n. x + 3n$
 $+ 10m. m - n. m + n. x + n. x + 2n + 5m. m - n.$
 $m + n. m + 2n. x + n + m. m - n. m + n. m + 2n$
 $m + 3n - x. x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n$, qui se ré-
 duit à $5m. x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n + 10. m + n.$
 $m. x + n. x + 2n. x + 3n + 10. m - n. m. m + n.$
 $x + n. x + 2n + 5. m - n. m. m + n. m + 2n. x + n$
 $+ m - n. m. m + n. m + 2n. m + 3n$. D'où il suit
 cette règle générale.

REGLE GENERALE.

*Pour prendre la différence finie d'une grandeur composée de tant de
 facteurs qu'on voudra, lesquels augmentent selon une loi arith-
 métique quelconque; & la quantité qui exprime l'augmentation
 que l'indéterminée doit recevoir, étant aussi telle qu'on voudra.*

1°. La différence cherchée contiendra autant de termes
 que la grandeur, dont on cherchoit la différence, conte-
 noit de facteurs.

2°.

2°. Pour avoir le premier terme, il faut d'abord multiplier par le nombre des facteurs, ensuite par la différence ou l'augmentation que l'indéterminée doit recevoir, qui est m , & enfin retrancher le premier facteur.

3°. Pour avoir le second terme, il faut multiplier le coefficient du premier par le nombre de ses facteurs, & diviser par 2, ensuite multiplier par $m - n$, & retrancher le dernier facteur.

4°. Pour avoir le troisieme terme, il faut multiplier le coefficient du second par le nombre de ses facteurs, & diviser par 3, ensuite multiplier par $m + n$, & retrancher encore le dernier facteur de ce terme.

5°. Pour avoir le quatrieme terme, il faut multiplier le coefficient du troisieme par le nombre de ses facteurs, & diviser par 4, puis multiplier par $m + 2n$, & retrancher le dernier facteur, & ainsi de suite.

COROLLAIRE I.

Il suit de ce qui vient d'être dit, que la différence d'une grandeur composée de plusieurs facteurs, contient autant de termes moins un que la puissance d'un binôme qui seroit égale au nombre de ces facteurs, & que les coefficients sont aussi ceux du binôme dont on auroit retranché le premier terme.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $m = n$, tous les termes où $m - n$ se trouve, s'évanouissent, alors les différences qui ont été trouvées se réduisent à

$$2n. x + n.$$

$$3n. x + n. x + 2n.$$

$$4n. x + n. x + 2n. x + 3n.$$

$$5n. x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n. \&c.$$

qui est le cas du premier Mémoire imprimé en 1717.

Mem. 1723.

D

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose $n = 0$, les quantités composées de plusieurs facteurs deviendront des quarrés, des cubes, des 3^{mes}, 4^{mes} ou 5^{mes} puissances, &c. Et en effaçant dans les différences trouvées les quantités où n se trouve, on aura

$2 m x + m m$ pour la différence des quarrés.

$3 m x x + 3 m^2 x + m^3$ pour celle des cubes.

$4 m x^3 + 6 m m x x + 4 m^3 x + m^4$ pour celle des 4^{mes} puissances.

$5 m x^4 + 10 m m x^3 + 10 m^3 x x + 5 m^4 x + m^5$ pour celle des 5^{mes} puissances.

REMARQUE.

Si l'on examine la maniere dont ces différences ont été trouvées, & les différentes parties dont elles sont composées, on verra de quelle maniere il faut décomposer, pour retrouver l'expression algébrique dont elles sont la différence. Cette expression algébrique s'appellera *l'intégrale de la différence donnée*.

Mais comme à la différence donnée il peut manquer plusieurs parties, pour qu'elle puisse être intégrée, voici la méthode de découvrir ces parties manquantes, & de trouver l'intégrale d'une différence quelconque.

PROPOSITION II.

Une expression algébrique composée de tant de facteurs qu'on voudra, augmentant selon une proportion arithmétique, trouver son intégrale.

I. Soit la quantité $x + n$, dont on demande l'intégrale (on suppose que la grandeur, dont x croît, est m). Pour la trouver, soit supposé $Ax. x + n + Bx$ être l'intégrale qu'on cherche, les coëfficiens A & B sont indéterminés & constants. Si l'on prend la différence de cette formule, on trouvera $2 Am. x + n + A. m. m - n$, laquelle doit être égale
 $+ B. m.$

à la différence donnée. On aura donc cette équation

$$2 Am. x + n + Am. m - n = x + n. \\ + Bm.$$

Si l'on compare les termes de cette équation qui ont les mêmes facteurs, il résultera ces deux nouvelles équations

$$2 Am. x + n = x + n, \& Am. m - n + B = 0, \text{ la première}$$

$$\text{donne } A = \frac{x}{2m}, \& \text{ la seconde donne } B = - \times \frac{m-n}{2m}.$$

Si donc on substitue dans l'intégrale supposée les valeurs de A & de B , on aura $\frac{x \cdot x + n}{2m} - \times \frac{m-n \cdot x}{2m}$ pour l'intégrale cherchée, ce qui est évident; car si l'on prend la différence de cette quantité, on trouvera $x + n + \frac{m-n}{2} - \frac{m-n}{2} = x + n$, qui étoit la différence proposée.

II. Soit la quantité proposée $x + n. x + 2n$ dont on demande l'intégrale, on supposera que cette intégrale est

$$A. x. x + n. x + 2n. + B. x. x + n + C. x, \text{ dont la différence est} \\ 3 Am. x + n. x + 2n. + 3 Am. m - n. x + n + Am. m - n. m + n \\ + 2 Bm. x + n \quad + Bm. m - n \\ + Cm$$

laquelle différence doit être égale à la différence donnée $x + n. x + 2n$.

Si l'on compare les termes homologues de cette équation, on aura $3 Am = 1$, $3 Am. m - n = -2 Bm$, & $Am. m - n. m + n + Bm. m - n = -Cm$, d'où résulte

$$A = \frac{1}{3m}, B = - \frac{m-n}{2m}, C = - \frac{m-n. m + n}{3m} + \frac{m-n}{2m} \\ = \frac{m-n. m - 5n}{6m}, \& \text{ si l'on substitue dans l'intégrale supposée pour } A, B, C, \text{ les valeurs que l'on vient de trouver, on}$$

$$\text{aura } \frac{x \cdot x + n. x + 2n}{3m} = \frac{m-n. x \cdot x + n}{2m} + \frac{m-n. m - 5n \cdot x}{6m} \text{ pour}$$

D ij

28 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
l'intégrale cherchée, ce qui est visible; car si l'on en prend la
différence, on aura $x + n. x + 2n + m - n. x + n$

$$+ \frac{m-n. m+n}{3} - \times m - n. x + n - \times \frac{m-n}{2} + \frac{m-n. m-5n}{6}$$

$$= x + n. x + 2n + m - n \times \frac{m+n}{3} - \frac{m+n}{2} + \frac{m-5n}{6}$$

$$= x + n. x + 2n.$$

III. Soit la quantité $x + n. x + 2n. x + 3n$, dont on
demande l'intégrale.

On supposera que cette intégrale est

$$A x. x + n. x + 2n. x + 3n + B. x. x + n. 2 + 2n + C. x. x + n + D. x.$$

Dont la différence est

$$4 A n. x + n. x + 2n. x + 3n + 6 A m. m - n. x + n. x + 2n + 4 A m. m - n. m + n. x + n + A m \times m - n. m + n. m +$$

$$+ 3 B m. x + n. x + 2n + 3 B m. m - n. x + n + B m. m - n. m + n$$

$$+ 2 C m. x + n + C m. m - n$$

$$+ D. m$$

Cette différence est égale à la différence proposée $x + n.$
 $x + 2n. x + 3n$. Si donc on compare les termes homo-
logues de cette équation, on aura $4 A m = 1$,

$$3 B = -6 A. m - n, 2 C = -4 A. m - n. m + n$$

$$- 3 B. m - n, D = -A. m - n. m + n. m + 2n.$$

$$- B. m - n. m + n - C. m - n, \text{ d'où résulte } A = \frac{1}{4 m};$$

$$B = -\frac{m-n}{2 m}, C = -\frac{m-n. m+n}{2 m} + 3. \frac{m-n}{4 m}, \&$$

$$D = -\frac{m-n. m+n. m+2n}{4 m} + \frac{m-n. m+n}{2 m} + \frac{m-n. m+n}{2 m}$$

$$- 3. \frac{m-n}{4 m}, \text{ ces valeurs se réduisent à } A = \frac{1}{4 m},$$

$$B = -\frac{m-n}{2 m}, C = \frac{m-n. m-5n}{4 m}, D = \frac{m-n. 3n. m-3n}{4 m}.$$

Si l'on substitue dans l'intégrale supposée les valeurs de A ,

B, C, D, que l'on vient de déterminer, on aura pour l'in-

tégrale cherchée $\frac{x \cdot x + n \cdot x + 2n \cdot x + 3n}{4m} - \frac{m - n \cdot x \cdot x + n \cdot x + 2n}{2m}$

+ $\frac{m - n \cdot m - 5n \cdot x \cdot x + n}{4m} + \frac{m - n \cdot 3n \cdot m - 3n \cdot x}{4m}$, ce qui est évi-

dent; car la différence de cette quantité est $x + n \cdot x + 2n$.

$x + 3n + \frac{6 \cdot m - n \cdot x \cdot x + n \cdot x + 2n}{4} + m - n \cdot m + n \cdot x + n$

+ $\frac{m - n \cdot m + n \cdot m + 2n}{4} - \frac{3 \cdot m - n \cdot x \cdot x + n \cdot x + 2n}{2} - \frac{3 \cdot m - n \cdot x \cdot x + n}{2}$

- $\frac{m - n \cdot m + n}{2} + \frac{m - n \cdot m - 5n \cdot x \cdot x + n}{2} + \frac{m - n \cdot m - 5n}{4}$

+ $\frac{3n \cdot m - n \cdot m - 3n}{4}$. Le premier terme reste, le second s'é-

vanouït, le troisieme est $m - n \times m + n - \frac{3m + 3m}{2} + \frac{m - 5n}{2}$

= $\frac{m - n}{2} \times 0$ qui s'évanouït encore, le quatrieme est $m - n$

$\times \frac{mm + 3mm + 2nn}{4} - \frac{mm + nn}{2} + \frac{3mn - 9nn}{4} + \frac{m^2 - 6mn + 5n^2}{4}$

= $m - n \times 0 = 0$. Il ne reste donc que $x + n \cdot x + 2n$.

$x + 3n$; ce qui doit être. Le premier, second & troisieme

terme, &c. sont distingués par la quantité des facteurs.

Application à la recherche des sommes des suites.

EXEMPLE I.

Soit la suite $3 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 9 \cdot 11 + 12 \cdot 14 + 15 \cdot 17 + \&c.$ dont on demande la somme de tant de termes que l'on voudra.

Si l'on examine cette suite, on verra que $n = 2$, $m = 3$, & qu'un terme quelconque de cette suite peut être exprimé par $x + 2 \times x + 4$, c'est donc l'intégrale de cette quantité que l'on cherche; car il est évident que cette intégrale fera la somme de toutes les grandeurs représentées par $x + 2$

$\times x + 4$, lesquelles précèdent ce terme; c'est-à-dire que si $x + 2$. $x + 4$ est le quatrième terme, son intégrale sera la somme des trois premiers, & ainsi de suite, car la somme des trois premiers diffère de celle des quatre premiers, de la quantité du quatrième terme, qui est donc la différence de la somme des trois premiers.

L'intégrale de $x + n$. $x + 2n$ a été trouvée (article 2.)

$$\frac{x \cdot x + n \cdot x + 2n}{3m} - x \frac{m - n \cdot x \cdot x + n}{2m} + \frac{m - n \cdot m - 5n \cdot x}{6m}. \text{ Si}$$

donc on substitue pour m & n leurs valeurs 3 & 2, on aura

$$\frac{x \cdot x + 2 \cdot x + 4}{9} - \frac{x \cdot x + 2}{6} - \frac{7x}{18} \pm q, \text{ la quantité } q \text{ expri-}$$

me ce qui manque, ou ce qu'il y a de trop à l'expression trouvée, pour qu'elle soit l'intégrale de la suite proposée. Pour

trouver la valeur de q , il faut supposer que $x + 2$. $x + 4$ représente le premier terme de la suite, auquel cas la somme de la suite doit être nulle. Cette supposition donne $x = 1$, & l'intégrale trouvée devient par-là la substitution de $x = 1$, $\frac{1 \cdot 1 + 2}{9} - \frac{1 \cdot 1}{6} - \frac{7}{18} = \frac{1}{18}$ ou $\frac{7}{9}$, ce qui fait voir que $q = \frac{7}{9}$ doit être retranché de la grandeur trouvée.

On aura donc pour l'intégrale cherchée $\frac{x \cdot x + 2 \cdot x + 4}{9}$
 $- \frac{x \cdot x + 2}{6} - \frac{7x}{18} - \frac{7}{9}$. Si l'on veut avoir les cinq premiers termes de la suite proposée, $x + 2$, dont le sixième terme vaut 18, x est donc 16, en substituant 16 pour x , on trouve $\frac{16 \cdot 18 + 20}{9} - \frac{16 \cdot 18}{6} - \frac{7 \cdot 16}{18} - \frac{7}{9} = 585$ qui est la somme des cinq premiers termes. Si l'on demande les 1000 premiers termes, on aura le 1001^{me} terme, ou $x + 2$. $x + 4 = 3003$. 3005 qui donne $x = 3001$, les 1000 termes demandés sont donc $\frac{1001 \cdot 1003 + 3005}{9} - \frac{1001 \cdot 1003}{6}$
 $- \frac{7 \cdot 1001}{18} - \frac{7}{9} = 3007504500$.

COROLLAIRE.

Si la suite proposée avoit été celle des quarrés des nom-

bres naturels pris à une distance quelconque, mais toujours égale, la différence $x + n$. $x + 2n$ seroit devenue xx , puisque dans cette supposition $n = 0$, & son intégrale

$$\frac{x \cdot x + n \cdot x + 2n}{3m} - \frac{x \cdot x + n \cdot x + 2n - n}{2m} + \frac{m - n \cdot m - 5n \cdot x}{6m}$$

deviendra $\frac{x^3}{3m} - \frac{xx}{2} + \frac{1}{6}mx$, qui exprimera la somme de tant de quarrés de nombres naturels qu'on voudra, éloignés entre eux de la quantité m , à quoi il faut ajouter $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}m - \frac{1}{3m}$, parce que quand $x = 1$, l'intégrale qui doit être nulle, devient $\frac{1}{3m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}m$. On aura donc $\frac{x^3}{3m} - \frac{xx}{2} + \frac{1}{6}mx + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}m - \frac{1}{3m}$ pour l'intégrale exacte.

Si donc on demande la somme des quarrés 1. 16. 49. 100. 169. 256. 361. 484. + &c. ou $m = 3$, on aura $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}$ pour la somme cherchée depuis le premier terme jusqu'au terme exprimé par xx .

Si l'on demande les quatre premiers, xx dans le cinquième terme vaut 13, donc $x = 13$. Si donc l'on substitue cette valeur d' x , on aura $\frac{2107}{9} - \frac{169}{2} + \frac{13}{2} - \frac{1}{9} = 166$, ce qui doit être.

Si $m = 1$, la formule deviendra $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, qui exprimera la somme des quarrés des nombres naturels pris de suite, qui sont 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. &c. de manière que si l'on demande la somme des sept premiers, le huitième fera 64, ou $x = 8$. Si donc on substitue cette valeur, il viendra $\frac{512}{3} - \frac{64}{2} + \frac{8}{6} = 140$.

EXEMPLE II.

Soit la suite 2. 5. 8 + 7. 10. 13 + 12. 15. 18 + 17. 20. 23 + &c. dont on demande la somme de tant de termes que l'on voudra.

Il est clair que dans cet exemple $n = 3$, $m = 5$, & qu'un terme quelconque de cette suite, peut être exprimé par $x + 3$. $x + 6$. $x + 9$, x ayant successivement les valeurs = 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22.

$x + 3. x + 6. x + 9$ est donc la différence de la somme que l'on cherche.

L'intégrale de $x + n. x + 2n. x + 3n$, a été trouvée (art. 3.) $\frac{x. x + n. x + 2n. x + 3n}{4m} - \times \frac{m - n. x. x + n. x + 2n}{2m}$
 $+ \frac{m - n. m - 5n. x. x + n}{4m} + \frac{m - n. 3n. m - 3n. x}{4m}$. Si donc on substitue dans cette formule pour $m, 5$, & pour $n, 3$, elle deviendra $\frac{x. x + 3. x + 6. x + 9}{20} - \times \frac{2. x. x + 3. x + 6}{10}$
 $- \frac{2. 10. x. x + 3}{20} - \frac{2. 9. 4. x}{20}$ qui est l'intégrale cherchée.

Pour sçavoir s'il ne manque rien à cette intégrale, il faut supposer que $x + 3. x + 6. x + 9$, représente le premier terme de la suite, auquel cas l'intégrale trouvée doit être nulle. Or lorsque $x + 3 = 2$, l'on a $x = -1$, mettant -1 pour x dans l'intégrale, elle deviendra $-\frac{1. 2. 5. 8.}{20}$
 $+ \frac{2. 1. 2. 5}{10} + \frac{2. 10. 1. 2}{20} + \frac{2. 9. 4. 1}{20} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}$, ce qui marque que cette quantité est de trop. On aura donc pour l'intégrale exacte $\frac{x. x + 3. x + 6. x + 9}{20} - \frac{2. x. x + 3. x + 6}{10}$
 $- \frac{2. 10. x. x + 3}{20} - \frac{2. 9. 4. x}{20} - \frac{18}{5}$, qui se réduit à $\frac{x. x + 3. x + 6. x + 9}{20} - \frac{x. x + 3. x + 6}{5} - x. x + 3 - \frac{18x}{5} - \frac{18}{5}$.

Si l'on veut la somme des trois premiers termes, il faut examiner ce que vaut $x + 3$, dans le quatrième terme on trouve 17, donc $x = 14$, en substituant 14 pour x , il vient $\frac{14. 17. 20. 23}{20} - \frac{14. 17. 20}{5} - 14. 17 - \frac{18. 14}{5} - \frac{18}{5}$
 $= 4230$.

Si l'on demande les cent premiers termes, il viendra pour cette somme $\frac{499. 502. 505. 508}{20} - \frac{499. 502. 505}{5} - 499. 502 - \frac{18. 499}{5} - \frac{18}{5} = 12, 981, 051, 346, 244$.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

Si la fuite proposée avoit été celle des cubes des nombres naturels pris à la distance m , on auroit eu dans ce cas $n=0$, & l'intégrale seroit $\frac{x^4}{4m} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}mxx$; à quoi il faut ajouter $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m - \frac{1}{4m}$, parce que quand $x=1$, l'intégrale doit être nulle: or la supposition de $x=1$ donne pour l'intégrale $\frac{1}{4m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}m$, qui doit par conséquent être ajouté avec des signes contraires; on aura donc pour l'intégrale exacte $\frac{x^4}{4m} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}mxx + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}m - \frac{1}{4m}$.

Si l'on demande la somme des cubes pris de trois en trois, qui sont 1. 64. 343. 1000, &c. auquel cas $m=3$, ce qui donne $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx - \frac{1}{3}$ pour la somme de tant de termes que l'on voudra de cette fuite. Si l'on veut la somme des quatre premiers, on aura 13 pour le cinquième terme. Donc $x=13$, cette valeur étant substituée, il vient $\frac{28561}{12} - \frac{2197}{2} + \frac{1}{4} \times 169 - \frac{1}{3} = 1408$.

Si l'on demande les cubes des nombres naturels pris de suite, on aura alors $m=1$, & l'intégrale deviendra pour ce cas $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx$, de sorte que si l'on veut les dix premiers cubes des nombres naturels, qui sont 1. 8. 27. 64. 125. 343. 512. 729. 1000, = 3025, le onzième terme sera 11, donc $x=11$. Si l'on substitue 11 à la place de x , on aura $\frac{14641}{4} - \frac{1331}{2} + \frac{121}{4} = 3025$ pour la somme cherchée.

EXEMPLE III.

Soit la fuite 1. 4. 7. 10 + 5. 8. 11. 14 + 9. 12. 15. 18 + &c. dans laquelle $n=3$ & $m=4$, l'expression générale d'un terme quelconque d'une fuite composée de quatre facteurs sera $x+n. x+2n. x+3n. x+4n$, dont l'intégrale sera supposée être, $A. x.x+n. x+2n. x+3n$.

Mem. 1723.

E

$$\frac{x+4n+Bx}{x+2n+D} \cdot \frac{x+n}{x+n+E} \cdot \frac{x+2n}{x+3n+C} \cdot \frac{x+n}{x+n}.$$

La différence de cette formule est $5Am \cdot \frac{x+n}{x+2n} \cdot \frac{x+3n}{x+4n+10Am} \cdot \frac{m-n}{x+n} \cdot \frac{x+2n}{x+3n} + 10Am \cdot \frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{m+n}{x+n} \cdot \frac{x+2n}{x+2n} + 5Am \cdot \frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{m+n}{m+2n} \cdot \frac{x+n+A}{m} \cdot \frac{m-n}{m+2n} \cdot \frac{m+n}{m+3n} + 4Bm \cdot \frac{x+n}{x+2n+4Bm} \cdot \frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{x+n+B}{m-n} \cdot \frac{m+n}{m+2n} + 3Cm \cdot \frac{x+n}{m-n} \cdot \frac{x+2n+3Cm}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m+n} + 2Dm \cdot \frac{x+n}{m-n} \cdot \frac{m+n}{m+n} + Em$, qui doit être égale à $x+n$.

Si donc on compare les termes homologues de cette équation, on aura ces nouvelles équations; $5Am = 1$, $10Am \cdot \frac{m-n}{m+n} + 4Bm = 0$, $10Am \cdot \frac{m-n}{m+n} + 6Bm \cdot \frac{m-n}{m+n} + 3Cm = 0$, $5Am \cdot \frac{m-n}{m+n} + 2Dm = 0$, $Am \cdot \frac{m-n}{m+n} + Bm \cdot \frac{m-n}{m+n} + 2Cm \cdot \frac{m-n}{m+n} + Dm \cdot \frac{m-n}{m+n} + Em = 0$.

$$\text{D'où l'on tire, } A = \frac{1}{5m}, B = -\frac{1}{2m} \times \frac{m-n}{m}, C = -\frac{1}{2m} \times \frac{2m-2n \times m+n}{3m} + \frac{m-n}{m}, D = -\frac{1}{2m} \times \frac{m-n \cdot m+n \cdot m+2n}{2m} + \frac{m-n}{m} \cdot \frac{m+n}{m} - 3 \times \frac{m-n}{2m}.$$

$$\begin{aligned}
 E &= -x \frac{m-n. m+n. m+2n. m+3n}{5m} + \frac{m-n. m+n. m+2n}{2m} \\
 &+ 2x \frac{m-n. m+n}{3m} - \frac{m-n. m+n}{m} + \frac{m-n. m+n. m+2n}{2m} \\
 &- \frac{m-n. m+n}{m} - \frac{m-n. m+n}{m} + \frac{3m-n}{2m}, \text{ qui se réduit à } \\
 A &= \frac{1}{5m}. B = -x \frac{m-n}{2m}. C = -\frac{2mm+2nn+3mm-6mn+3nn}{3m} \\
 &= \frac{mm-6mn+5nn}{3m} = m-n \times \frac{m-5n}{3m}. D = m-n. \\
 m+n &\times \frac{m-4n}{2m} - x \frac{m-n. m-5n}{2m}. E = m-n. \\
 m+n. m+2n &\times \frac{m-2n \times A}{5m} + \frac{m-n. m+n \times -7m+11n}{3m} \\
 &+ \frac{m-n. m-n}{2m}.
 \end{aligned}$$

Si maintenant on substitue dans ces valeurs de A, B, C, D & E , pour m & n , leurs valeurs 3 & 2, elles se réduiront à $A = \frac{1}{20}, B = -\frac{1}{8}, C = -\frac{11}{12}, D = -\frac{45}{8}, E = -\frac{503}{24}$.

Si donc on substitue ces valeurs dans l'intégrale supposée, on aura $\frac{1}{20} \times x. x+3. x+6. x+9. x+12 - \frac{1}{8} \times x. x+3. x+6. x+9 - \frac{11}{12} \times x. x+3. x+6 - \frac{45}{8} \times x. x+3 - \frac{503}{24} x + q$.

Pour déterminer la valeur de q , on supposera $x+3=1$, donc $x=-2$; cette valeur d' x doit donc rendre l'intégrale nulle, c'est-à-dire, que $\frac{1}{20} \times -2. 1. 4. 7. 10 - \frac{1}{8} \times -2. 1. 4. 7. - \frac{11}{12} \times -2. 1. 4 - \frac{45}{8} \times -2. 1 - \frac{503}{24} \times -2 + q = 0$; d'où il suit $-28 + 7 + \frac{22}{3} + \frac{45}{4} + \frac{503}{12} = -q$, qui donne $q = -47$. L'intégrale demandée est donc $\frac{1}{20} x. x+3. x+6. x+9. x+12 - \frac{1}{8} x. x+3. x+6. x+9 - \frac{11}{12} x. x+3. x+6 - \frac{45}{8} x. x+3 - \frac{503}{24} x - 47$.

Si l'on veut avoir les deux premiers termes, on aura dans ce cas $x + 3 = 9$; donc $x = 6$, & la somme cherchée sera $\frac{1}{20} \times 6. 9. 12. 15. 18 - \frac{1}{6}. 6. 9. 12. 15 - \frac{1}{12}. 6. 9. 12 - \frac{1}{6}. 6. 9 - \frac{1}{24}. 6 - 47 = 6440$.

EXEMPLE IV.

Si la suite qu'on se propose de sommer, étoit composée de plusieurs suites multipliées les unes par les autres, il faudroit la réduire à des suites uniformes, avant d'en trouver la somme par la méthode générale.

Soit la suite $1. 3 + 2. 5 + 3. 7 + 4. 9 + 5. 11 + 6. 13 + \&c.$ dont on demande la somme.

Cette suite est le produit des deux suites $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \&c.$ Et $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \&c.$ en supposant que chaque terme de la première est multiplié par le correspondant de la seconde. Ces deux suites n'ayant pas la même différence, il est évident que dans la suite composée il se trouvera deux différences. Si l'on veut qu'il n'y ait que la même différence, la suite composée se réduira en deux autres, de cette manière :

$$\begin{aligned} &1. 3 + 2. 4 + 3. 5 + 4. 6 + 5. 7 + \&c. \} \\ \text{Et } &1. 0 + 2. 1 + 3. 2 + 4. 3 + 5. 4 + \&c. \} = 1. 3 + 2. 5 + 3. 7 + 4. 9 + \&c. \end{aligned}$$

La somme de la suite proposée sera donc égale aux deux autres suites, dont la première a pour formule $x + 2 \times x + 4$, & la seconde $x - 1 \times x - 2$, l'intégrale de la première est $\frac{x. x + 2. x + 4}{3} + \frac{x. x + 2}{2} + \frac{9. x}{6} + q$, & celle de la seconde est $\frac{x. x - 1. x - 2}{3} - x \frac{x. x - 1}{1} + 2x + p$. Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de q & p , pour avoir l'intégrale exacte de la suite proposée. Or pour avoir ces valeurs, il faut supposer que $x - 2 \times x + 4$ représente 1×3 , & que $x - 1 \times x - 2$ représente 1×0 , auquel cas les deux suites doivent être nulles. Donc alors $x = -1$ pour la première suite, & $x = 2$ pour la seconde. Si donc on

substitue dans les intégrales pour x ces valeurs, on aura

$$\frac{-1 \cdot 1 \cdot 3}{3} + \frac{-1 \cdot 1}{2} + \frac{5 \cdot 6}{6} + q = 0, \& \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{3} - \frac{2 \cdot 1}{1} + 2 \cdot 2 + p = 0, \text{ de la premiere équation, on tire } q = 3, \\ \& \text{ de la seconde } p = -2. \text{ L'intégrale exacte est donc}$$

$$\frac{x \cdot x + 2 \cdot x + 4}{3} + \frac{x \cdot x + 2}{2} + \frac{3}{2} x + 3 \text{ pour la premiere}$$

$$\text{suite, \& } \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{3} - x \cdot x - 1 + 2x - 2 \text{ pour}$$

la seconde, dont la somme vaut la suite proposée.

Si l'on veut avoir les deux premiers termes de chaque suite, dont la somme vaut les deux premiers termes de la

suite proposée, il faut supposer que les formules $x + 2$

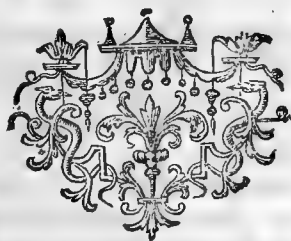
$xx + 4$ & $x - 1 \times x - 2$ de chacune de ces suites représentent chacune le troisieme terme de sa suite, & alors

on aura $x + 2 = 3$ pour la premiere suite, & $x - 1 = 3$ pour la seconde, ce qui donne $x = 1$ & $x = 4$. Si donc

on substitue dans les intégrales trouvées pour x ces valeurs, on aura $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 11$ pour la premiere,

& $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} - \frac{4 \cdot 1}{1} + 8 - 2 = 2$ pour la seconde, les deux ensemble valent donc 13; ce qui doit être, puisque

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13.$$



M E M O I R E
S U R

L E S Y E U X G E L E S ;

Dans lequel on détermine la grandeur des chambres qui renferment l'humeur aqueuse.

Par M. P E T I - T , Medecin.

30 Avril
1723.

M BRISSEAU, Medecin des Hôpitaux du Roi, & Professeur dans l'Université à Douay, est, je croi, le premier qui a donné le nom de *chambre* à l'espace compris entre le crySTALLIN & la cornée qui contient l'humeur aqueuse ; & comme cet espace est divisé en deux parties par l'uvée, il a donné le nom de *premiere chambre* à la partie antérieure, que nous appellerons, avec le Sçavant Heister *, *chambre antérieure*, comprise entre l'iris & la cornée, & il a nommé *seconde chambre*, l'espace compris entre le crySTALLIN & l'uvée, & que nous appellerons *chambre postérieure*.

* Compend.
anatomic.
p. 210.

Quoique M. Brisseau, M. Antoine & M. Heister ayent suffisamment prouvés que la cataracte n'a d'autres causes que l'endurcissement joint à l'opacité du crySTALLIN, il se trouve néanmoins encore des personnes qui tiennent pour la membrane. Ils ont eu beau démontrer qu'il est tout-à-fait impossible d'abattre cette prétendue membrane, sans traverser le crySTALLIN^a, en perçant l'œil à deux ou trois lignes de la cornée, comme on le fait pour l'ordinaire ; leur démonstration s'est trouvée infructueuse à l'égard de leurs adversaires qui ont crû éluder la difficulté, en supposant que la chambre postérieure de l'humeur aqueuse est plus grande que la chambre antérieure, trompés peut-être par les figures de Vesale, de Brigs & d'autres Auteurs.

^a Fabricius ab Aquapendente l'a crû de même il y a plus de 100 ans. Voyez sa *Chirurgie imprimée en 1618. p. 58.*

Galien a crû que le crySTALLIN touche à l'uvée : *De usu partium, cap. 4. & 6. De Oculis, cap. 4.*

J'avois bien remarqué dans les différentes dissections des yeux d'hommes, de chiens, de bœuf, & d'autres animaux, qu'il y avoit une espace rempli d'humeur aqueuse entre le crySTALLIN & l'uvée : mais cet espace est si petit dans les yeux gelés, qu'un de nos plus habiles Anatomistes s'y est (en quelque maniere) laissé tromper^a ; je dis, *en quelque maniere*, ce que j'expliquerai plus amplement dans un autre Mémoire. Si cette opinion se fût trouvée véritable, c'en étoit fait du système de la cataracte par la membrane, ses sectateurs n'avoient plus de faux-fuyans. Il me paroît pourtant qu'ils ne peuvent tirer aucun avantage d'un si petit espace, & s'il n'est pas plus grand dans l'état naturel que celui que l'on reconnoît par l'épaisseur de la glace dans les yeux gelés, il ne s'en trouve pas assez pour loger & faire agir l'aiguille dont on se sert pour l'opération de la cataracte, sans courir le risque de blesser l'uvée ou le crySTALLIN, quand on perce l'œil à une ligne ou une ligne & demie de la cornée.

^a V. Mem.
de l'Acad.
1721, pag.
318. &
319.

La facilité que l'on a trouvée de faire geler les humeurs des yeux^b, a fourni l'occasion de reconnoître la grandeur de l'espace occupé par l'humeur aqueuse ; M^{rs} Heister & Morgagni ont fait voir par ce moyen sur les yeux d'hommes & sur les yeux de cochon, que la chambre postérieure de l'humeur aqueuse est de beaucoup plus petite que la chambre antérieure. C'est ce que j'ai aussi démontré, mais avec beaucoup plus de précision, à la Compagnie, le 16 Janvier de cette année, non-seulement sur les yeux d'hommes, mais encore sur les yeux de chiens, de moutons, de bœufs, de chevaux. J'avois déjà fourni sur cette matiere, le 8 Mars 1721, un petit Mémoire, en attendant que je pûsse en donner un plus ample & plus circonstancié, tel que je le donne aujourd'hui. Mais avant d'entrer dans le détail de mes observations, il faut expliquer ce que j'entends par grand & petit diametre de l'œil & par son axe.

^b On avoit
déjà trou-
vé cette fa-
cilité en
1678.

J'appelle grand diametre de l'œil, une ligne droite horizontale qui traverse l'œil en passant par son centre, qui est parallele au grand diametre de la cornée dans le bœuf, le

40 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
mouton. La ligne *CD* de la premiere figure est le grand dia-
metre.

Le petit diametre est une ligne droite, verticale, qui tra-
verse l'œil en passant par son centre, & qui est perpendicu-
laire au grand diametre. La ligne *AB* de la premiere & de
la seconde figure est le petit diametre; je l'ai nommé ainsi,
parce qu'il est le plus souvent plus court que le grand dans
le mouton, le bœuf, le cheval, mais on les trouve quelque-
fois égaux. Ils sont toujours l'un & l'autre plus longs que l'a-
xe, parce que dans ces animaux l'œil est applati dans sa par-
tie postérieure.

L'axe de l'œil est une ligne droite qui le traverse, en pas-
sant par le centre de la cornée & le centre du crysallin. La
ligne *AB* dans la seconde figure, & la ligne *CD* dans la
3^{me}, la 4^{me}, la 5^{me}, la 6^{me}, la 7^{me} figure est l'axe qui, dans
l'homme, dans le singe, dans le chien, le loup, le chat, est
pour l'ordinaire égal aux diametres, & quelquefois plus
long dans l'homme & dans le singe, mais qui, dans le chien,
le loup & le chat, se trouve quelquefois plus court d'un quart
de ligne.

Tous les yeux que j'ai fait geler ont été auparavant dé-
pouillés de leurs muscles, de leur graisse, & de toutes les
parties membraneuses qui enveloppent la sclérotique, &
dans cet état ils ont été pèsés & mesurés avant d'être exp-
sés à la gelée. Les uns ont été posés sur le nerf optique, la
cornée en haut, & les autres suspendus avec un fil par le nerf
optique, la cornée embas.

Pour rendre ces expériences plus exactes, il faut qu'il
fasse un froid considérable, afin que les yeux puissent se ge-
ler de maniere que les humeurs deviennent une glace assez
dure. Les yeux que j'ai exposés aux premieres gelées du mois
de Février, mon Thermometre étant au 18^{me} degré, n'ont
gelé qu'imparfaitement, l'humeur aqueuse étoit gelée dans
les deux chambres : mais la glace ne faisoit pas assez de corps
pour en mesurer l'épaisseur, n'étant gelée que par parcelles en-
tre-mêlées d'humidité. Dans quelques-uns le crysallin étoit
gelé

gelé dans sa circonférence ; dans d'autres il n'étoit point du tout gelé , il paroissoit même plus mol qu'il n'est dans son état naturel ; & dans quelques yeux d'hommes , de moutons , de bœufs , l'humeur vitrée étoit gelée par plans de glace qui étoient dans les uns parallèles au diamètre de l'œil , & dans d'autres aux différens plans de leur axe ; dans les uns situés horizontalement , & dans d'autres situés verticalement ; j'en ai vû aussi qui ressembloient à des crystaux pyramidaux à quatre ou cinq faces. L'eau se gele quelquefois dans des fioles de ces différentes manieres , lorsque la gelée n'est pas forte.

Les yeux n'ont commencé à se geler assez bien que lorsque mon thermometre s'est trouvé au 15^{me} ou au 16^{me} degré , & pour lors il m'a été facile de bien démontrer la glace de la chambre postérieure : mais ils se sont gelés bien plus fort , lorsque mon thermometre s'est baissé sur le 13^{me} degré , qui est le plus bas où il se soit trouvé en 1721 , & c'est dans ce temps-là que j'ai fait la plus grande partie des observations que je rapporte dans ce Mémoire.

Ce n'est pas sans dessein que je parle de ces différens degrés de gelés : c'est de-là que dépend le plus ou le moins de justesse & de précision de ces observations.

Les yeux d'homme qui ont été bien gelés , étant coupés suivant la longueur de leur axe en deux parties , la glace de l'humeur aqueuse s'est trouvée épaisse dans la chambre antérieure , près du trou de l'uvée où elle a le plus d'épaisseur , à cause de la convexité de la cornée , d'une demi-ligne dans les unes , de deux tiers de ligne dans les autres ; & dans quelques-uns elle avoit une ligne entière. Elle diminue peu-à-peu d'épaisseur à mesure qu'elle s'éloigne du centre de la cornée , & qu'elle s'approche de la sclérotique , où elle s'engage sous le biseau de la cornée , & y finit en vive arrête.

M. Brisseau est encore le premier , si je ne me trompe , qui a remarqué que la sclérotique & la cornée sont unies ensemble par une surface inclinée que l'on appelle *biseau* ou *chamfrain*. Le biseau de la cornée est dessous , celui de la sclérotique est appliqué dessus & à la partie externe du biseau

de la cornée. C'est à l'extrémité du biseau de la cornée que l'uvée est attachée ; c'est-là aussi où finit la glace de la chambre antérieure.

La glace de la chambre postérieure étoit épaisse d'un demi-quart de ligne dans les uns , dans les autres d'un demi-tiers , jusqu'à un quart de ligne ; & cette épaisseur s'augmentoit peu-à-peu jusqu'à la circonférence du crystallin, où elle se trouvoit épaisse d'un demi-tiers de ligne dans les uns, d'un quart de ligne dans les autres , jusqu'à trois demi-quarts.

La glace de cette chambre postérieure se trouve assez souvent continue avec celle de l'humeur vitrée , principalement si l'œil a été exposé à une forte gelée ; car lorsque l'humeur vitrée vient à se geler , elle se rarefie d'autant plus que la gelée est forte , comme je le prouverai dans la suite de ce Memoire : elle s'avance au-delà & vers les côtés du crystallin, pousse les processus ciliaires du côté de l'uvée , en les détachant du crystallin , & pour lors la glace qui se forme entre l'uvée & les processus ciliaires se trouve très-mince , & quelquefois il ne s'en trouve point du tout ; ce qui arrive de même dans le chien , le mouton , le bœuf & le cheval : il est facile de distinguer la glace de l'humeur aqueuse, d'avec celle de la vitrée ; il y a dans celle-ci quantité de petites fibres blanches.

La glace de la chambre antérieure dans les yeux du chien-dogue , près du trou de l'uvée , étoit épaisse d'une ligne dans les uns, d'une ligne & demie dans les autres ; & diminuant peu-à-peu d'épaisseur , elle alloit finir , comme dans l'homme , en vive arrête à la circonférence de la cornée.

Elle étoit épaisse dans la chambre postérieure d'un quart de ligne jusqu'à un tiers près du trou de l'uvée ; mais elle étoit d'une demi ligne à la circonférence du crystallin.

J'ai trouvé dans les yeux d'un loup , qui a l'œil de la même forme que celui du chien-dogue, la glace de la chambre antérieure épaisse de cinq quarts de ligne , & celle de la

chambre postérieure d'une demi-ligne près du trou de l'uvée.

Dans les yeux de mouton la glace de la chambre antérieure s'est trouvée épaisse près du trou de l'uvée de cinq quarts de ligne dans les uns ; dans d'autres elle étoit de sept quarts , & j'en ai trouvé un où elle étoit épaisse de deux lignes ; & diminuant peu-à-peu , elle alloit finir à la circonférence de la cornée , comme dans l'homme , & tous les animaux à quatre pieds. La cornée est elliptique à sa partie externe dans ces animaux : mais elle est ronde à sa partie interne.

La glace de la chambre postérieure étoit épaisse dans les uns d'un quart de ligne , & d'un tiers dans les autres près du trou de l'uvée : mais elle avoit deux tiers de ligne à la circonférence du crySTALLIN.

Dans les yeux de bœuf j'ai trouvé la glace de la chambre antérieure épaisse dans les uns de cinq quarts de ligne , dans les autres de sept quarts : j'en ai démontré à la compagnie qui étoit épaisse de deux lignes & demie dans son milieu , & diminuoit peu-à-peu jusqu'à la circonférence de la cornée où elle finissoit.

Dans la chambre postérieure la glace étoit épaisse d'un tiers de ligne dans les uns , & d'une demi-ligne dans les autres , près du trou de l'uvée ; elle se trouvoit épaisse de trois quarts de ligne à la circonférence du crySTALLIN.

Dans les yeux de chevaux la glace étoit épaisse dans la chambre antérieure , près du trou de l'uvée , de trois lignes dans les uns , & dans d'autres de trois lignes & demie ; & diminuant peu-à-peu , comme dans les yeux précédens , s'alloit engager sous le biseau de la cornée.

La glace de la chambre postérieure étoit épaisse d'un tiers de ligne , jusqu'à une demi-ligne près du trou de l'uvée , mais de deux tiers de ligne à la circonférence de la cornée : ainsi la chambre postérieure dans le cheval est plus petite à proportion que dans les yeux précédens.

Le crySTALLIN dans tous les yeux bien gelés étoit dur & blanc. Lorsqu'on le dégageoit de son chaton , étant coupé par

la moitié, on voyoit la capsule qui l'enveloppoit qui restoit presque dans sa situation naturelle, & qui ne s'éloignoit que peu de la glace de l'humeur aqueuse. Elle étoit transparente & ferme, & ressembloit à de la corne très fine & très-transparente, à laquelle Vesale la compare. La partie postérieure de cette membrane crySTALLINE étoit plus fine & plus molle; on ne voyoit point sa partie antérieure si tendue ni si ferme dans les yeux qui n'étoient pas bien gelés; elle étoit molle & ridée après avoir retiré le crySTALLIN, & pour lors elle ressembloit mieux à une pellicule d'oignon, à laquelle Vesale la compare dans le même chapitre, de même que Galien^b. Ce qui fait assez connoître que quelque fine que soit cette membrane, elle ne laisse pas de se geler en conservant sa transparence.

On comprendra assez facilement qu'elle se trouve d'autant plus épaisse, qu'elle enveloppe de plus gros crySTALLINS; elle est pourtant quelquefois plus épaisse dans des yeux, que dans d'autres de même espèce.

Je remarquerai encore une chose particuliere, & que l'on ne peut bien voir que dans des yeux gelés: c'est que l'uvée dans l'homme fait une surface plane, ainsi qu'elle est représentée dans la 3^{me} figure^c. Vesale^d lui donne la même surface. Mais dans les animaux à quatre pieds cette surface est convexe à sa partie antérieure; & cette convexité est d'autant plus grande, que les yeux sont plus gros, comme on le voit dans la 4^{me}, 5^{me}, 6^{me}, & 7^{me} figure.

Après ce que je viens de dire de la glace de la chambre postérieure, il semble qu'il n'y a qu'à couper des yeux bien gelés pour la démontrer: mais j'ai fait voir à la compagnie qu'il faut apporter beaucoup de soin & d'exactitude pour la découvrir, même dans les yeux les mieux gelés & les mieux remplis d'humeur aqueuse. L'enduit noir de la partie postérieure de l'uvée & des processus ciliaires se communique à la glace, lui cause une ombre qui l'empêche de paroître. Mais une des choses qui contribue encore à la cacher, c'est que la glace est un corps dur qui ne peut être

^a Lib. 7.
cap. 14.

^b De Ocul.
1. 3. cap. 3.

^c Mem. de
l'Academie
1721. pag.
217. où
M. Winslow
n'est pas de
ce senti-
ment.

^d Lib. 7.
cap. 14.

coupé net par un scalpel, quelque tranchant qu'il puisse avoir, & plus il est tranchant, plus facilement il est émoussé par la dureté de la glace, & pour lors il arrive deux choses. La première est que la glace se brise par petites parcelles : la seconde est que le scalpel émoussé entraîne avec lui des parties noires de l'uvée & des processus ciliaires qu'il mêle & qu'il confond avec les parcelles de la glace, & fait, pour ainsi dire, une espece de voile qui couvre la glace de la chambre postérieure ; l'uvée & les processus ciliaires paroissent confondus avec elle ; l'on ne voit qu'un corps brun assez épais, quoique l'uvée ait tout au plus un douzieme de ligne d'épaisseur dans l'homme avec son enduit noir : mais ôtez le masque qui la cache, on la découvre facilement. Il n'y a pour cela qu'à prendre un œil bien gelé, le couper par son axe en deux parties, & avec la pointe d'un instrument enlever la glace de la chambre antérieure, puis détacher l'uvée le plus délicatement que l'on peut de la glace de la chambre postérieure ; après quoi cette glace qui paroissoit un corps noir se manifeste, & l'on peut en mesurer l'épaisseur, quoiqu'elle ait encore un peu de noirceur que l'uvée lui a laissé.

L'on peut encore s'en assurer d'une autre maniere ; car sans couper l'œil par son axe, il n'y a qu'à enlever la cornée toute entiere ; on ôte la glace de la chambre antérieure, puis on emporte l'uvée, & l'on trouve la glace de la chambre postérieure.

La noirceur de l'uvée n'est pas la seule cause qui empêche qu'on ne trouve avec facilité la glace de la chambre postérieure, principalement dans l'homme : il se rencontre encore des difficultés par rapport à la quantité de l'humeur aqueuse qui se trouve plus ou moins grande, non seulement à proportion de la grandeur des yeux, mais encore dans les yeux de même grandeur.

On trouve pour l'ordinaire dans les yeux de l'homme la pesanteur de 3 grains & demi, jusqu'à 4 grains & demi d'humeur aqueuse : s'il n'y en a que trois grains & demi, cela doit

diminuer la quantité de la glace de près du quart. L'on trouve encore bien moins de glace dans les yeux qui ont été gardés quelques jours après la mort. Si l'on ne prend les yeux d'homme, de chien, & d'autres animaux tout nouvellement morts, on les trouve toujours flétris, après en avoir ôté la graisse, les muscles, & tout ce qui enveloppe le globe de l'œil. Si l'on pose ces yeux du côté du nerf optique, la cornée s'enfonce vers le crySTALLIN, plus ou moins, selon le temps que l'animal est mort, & que la dissipation qui s'est faite des humeurs, est plus ou moins grande. Si au contraire on suspend ces yeux flétris par le nerf optique, les humeurs s'appesantissent du côté de la cornée, la rendent convexe, & la partie postérieure de la sclérotique se trouve gaudronnée & froncée. Mais lorsque ces yeux sont gelés, ils ne paroissent plus flétris; ils sont au contraire fort tendus; l'on ne trouve plus d'affaissement à la cornée des yeux posés du côté du nerf optique, & la sclérotique des yeux suspendus par le nerf optique, a perdu son froncis. Malgré ce gonflement, on ne doit pas s'attendre de trouver dans la chambre postérieure de ces yeux, la même épaisseur de glace que l'on trouve dans les yeux qui n'ont point été flétris: car, comme les yeux ne se flétrissent que par l'évaporation des humeurs qu'ils contiennent, que l'humeur aqueuse est la première à se dissiper, comme l'expérience le confirme, & que plus la gelée est forte, plus il se dissipe d'humeur aqueuse, comme nous le verrons ci-après, lorsque l'humeur vitrée vient à se geler, elle se raréfie avec d'autant plus de facilité vers la partie antérieure, qu'elle y trouve moins de résistance; elle pousse le crySTALLIN du côté de l'uvée, & diminue la chambre postérieure, de manière que j'ai eu bien de la peine à y trouver de la glace, & quelquefois je n'en ai point trouvé du tout. On ne doit donc pas s'étonner si quelques personnes n'ont point trouvé de chambre postérieure.

Ce ne sont pas seulement les yeux flétris qui se gonflent & se dilatent en gelant: cela arrive aussi à ceux qui n'ont pas eu le temps de se flétrir; car comme les membranes prêtent

& peuvent s'étendre , les yeux grossissent à proportion de la raréfaction de la glace. Je me suis convaincu de cette vérité par un grand nombre d'expériences : il suffira d'en rapporter trois , faites sur des yeux de bœuf.

Dans la première expérience l'œil que j'ai pris étoit fort peu flétri ; il pesoit une once 36 grains ; il avoit 18 lignes trois quarts de grand diamètre , 18 lignes & demie de petit diamètre , & 16 lignes & un quart d'axe. Je l'ai posé sur une assiette de fayence du côté du nerf optique , à huit heures du matin , mon thermometre étant au 14^{me} degré. Je l'ai laissé sur une fenêtre jusqu'au lendemain huit heures du matin. Lorsque je l'ai retiré , le thermometre étoit resté au 14^{me} degré ; il étoit bien gelé , dur & fort tendu , la sclérotique noire , la cornée opaque & blanchâtre : il pesoit 7 dragmes 65 grains ; ainsi il avoit diminué de 43 grains ; il avoit 19 lignes de grand diamètre , 18 lignes trois quarts de petit diamètre , & 17 lignes d'axe. Il étoit donc augmenté d'un quart de ligne dans son grand diamètre , autant dans son petit diamètre , & de trois quarts de ligne dans son axe. J'ai coupé cet œil en deux parties par son axe. J'ai trouvé les humeurs fort bien gelées , la glace de la chambre antérieure étoit épaisse de deux lignes , & la glace de la chambre postérieure étoit épaisse d'une demi-ligne près du trou de l'uvée , le cristallin opaque , blanc & fort dur , ayant huit lignes de diamètre , & six lignes d'axe ou d'épaisseur.

Dans la seconde expérience l'œil de bœuf pesoit 7 dragmes 67 grains ; il n'étoit point flétri ; il avoit 18 lignes de grand & de petit diamètre , 15 lignes & deux tiers d'axe. Je l'ai suspendu avec un fil par le nerf optique , mon thermometre étant au 14^{me} degré & demi à neuf heures & demie du matin. Je l'ai retiré le lendemain à neuf heures du matin , il étoit bien gelé , dur comme une pierre , la sclérotique toute noire , la cornée opaque & blanchâtre : le froid avoit augmenté d'un demi degré pendant la nuit , mon thermometre étoit au 14^{me} degré.

Cet œil gelé pesoit 7 dragmes 20 grains ; il étoit donc

48 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
diminué de 47 grains. Il avoit 18 lignes & demie de grand
& de petit diametre, & 16 lignes & demie d'axe : il étoit
augmenté de demi ligne dans chacun de ses diametres , &
de près d'une ligne dans son axe.

La glace de la chambre antérieure étoit épaisse de sept
quarts de ligne , & la glace de la chambre postérieure seu-
lement d'un tiers de ligne près du trou de l'uvée ; le crystal-
lin avoit sept lignes & demie de diametre , & cinq lignes
deux tiers d'axe ou d'épaisseur.

Dans la troisieme experience l'œil de bœuf n'étoit point
flétri ; il pesoit 7 dragmes 24 grains ; il avoit 17 lignes &
un quart de grand & petit diametre , 15 lignes d'axe. Je
l'ai exposé à la gelée , suspendu avec un fil par le nerf opti-
que , à onze heures du matin , mon thermometre au 13^{me}
degré. Je l'ai retiré le lendemain à sept heures du matin , la
sc.érotique étoit toute noire , la cornée blanche opaque ,
tout l'œil arrondi , dur comme une pierre : il pesoit 6 drag-
mes 40 grains. Il étoit donc diminué de 56 grains en vingt
heures. Il avoit 18 lignes de grand & petit diametre , & 16
lignes trois quarts d'axe : il étoit donc augmenté de trois
quarts de ligne dans chacun de ses diametres , & d'une li-
gne trois quarts dans son axe.

La glace de la chambre antérieure avoit deux lignes d'é-
paisseur , & avoit été poussée au-delà du biseau de la cornée
en quelques endroits où l'uvée s'est trouvée détachée de la
cornée & de la sclérotique.

La glace de la chambre postérieure n'avoit qu'un quart
de ligne près du trou de l'uvée.

Le crystillin étoit blanc , dur , opaque ; il avoit des fosses
& des cannelures irrégulieres qui étoient en plus grande
quantité , & plus profondes à sa partie postérieure qu'à sa
partie antérieure ; marque certaine qu'il avoit été violem-
ment comprimé. C'est ce qui arrive toujours dans les fortes
gelées , & même dans les yeux bien gelés avec la glace &
le salpêtre.

Ce crystillin avoit sept lignes trois quarts de diametre ,
&

& cinq lignes un quart d'épaisseur : il pesoit 42 grains. Je l'ai laissé dégeler par lui-même dans mon cabinet, où il s'est dégelé en trois quarts d'heure. Il est devenu plus mol qu'il n'est pour l'ordinaire, transparent, plein de petites bulles d'air renfermées sous la membrane crySTALLINE ; il n'a ni diminué ni augmenté de poids en dégelant.

Il y a plusieurs choses à remarquer dans les trois exemples que je viens de rapporter. La premiere est qu'ils ont tous trois diminué de poids, & ils ont d'autant plus diminué de poids, que la gelée a été plus forte, ce qui est conforme aux expériences de M. Gauteron, de la Société de Montpellier *a*, & de M. de Mairan de cette Academie *b* : ce dernier en a donné d'excellentes raisons. La seconde, qu'ils ont augmenté de volume, & qu'ils ont d'autant plus augmenté de volume que la gelée a été plus forte. Le premier a moins augmenté que le second, & celui-ci moins que le troisieme. Il semble néanmoins que le premier auroit dû augmenter plus que le second, puisque mon thermometre marquoit d'abord moins de froid au second œil qu'au premier : mais j'ai assez souvent observé, en exposant des yeux & des liqueurs à la gelée, qu'ils ont mieux gelé, lorsque mon thermometre étoit au 16 ou au 17^{me} degré, que d'autres yeux & d'autres liqueurs que j'avois exposés au 14 ou au 15^{me} degré. J'ai recherché d'où pouvoit provenir une chose si particuliere, & voici ce que j'ai remarqué.

a Mem. de
l'Acad. des
Sc. 1709.
p. 451.
b Differt.
sur la gla-
ce. p. 146.

Si mon thermometre se baïssoit du 17 au 16^{me} degré, le vent étant au nord ou au nord-est ou à l'est, pour lors la gelée se trouvoit plus forte que lorsque mon thermometre passoit du 14 au 15^{me} degré, le vent se changeant du nord à l'ouïest ou au sud-ouïest ou au sud, & c'est à peu-près ce qui est arrivé aux deux yeux dont je viens de parler ; car le premier a été exposé, lorsque le froid commençoit à diminuer, mon thermometre avoit monté du 13 au 14^{me} degré, le vent étant au nord-ouïest. Le second au contraire a été exposé, lorsque le froid augmentoit, mon thermometre étant descendu du 15 au 14^{me} degré & $\frac{1}{2}$, & de-là au 14^{me}, le vent étant passé au nord.

Mem. 1723.

G

La troisieme chose que nous avons à observer sur nos trois yeux gelés , c'est que leur volume s'est plus augmenté par leur partie postérieure que dans tout le reste de leur circonférence , & que l'augmentation a été à proportion plus grande dans le troisieme que dans le second , & dans le second que dans le premier , & je l'ai toujourns remarqué dans tous les yeux de bœufs, de moutons & de chevaux, que j'ai fait geler; ce que je n'ai point observé dans les yeux d'hommes & de chiens , qui ont pour l'ordinaire l'axe aussi long que les diametres. J'ai vu au contraire que lorsque l'axe s'est trouvé plus long que les diametres, comme il arrive quelquefois dans l'homme , ces yeux grossissoient plus par leur côté que par leur partie postérieure , & que lorsque les yeux d'hommes se trouvoient quarrés ou aplatis par leur côté (ce qui est pour l'ordinaire produit par la compression des muscles droits) ils s'arrondissoient en gelant. Enfin tous les yeux que j'ai fait geler ont affecté de prendre une figure plus arrondie.

Cet effet ne se remarque pas seulement dans les yeux des animaux à quatre pieds que l'on fait geler, on le voit encore dans ceux que l'on met tremper dans l'eau , dans le vin , & dans d'autres liqueurs ; à mesure qu'ils deviennent plus tendus , ils s'arrondissent par leur partie postérieure plus à proportion que par leur côté , car si les diametres deviennent plus longs d'un quart de ligne , l'axe s'allonge d'une demi-ligne ou trois quarts de ligne.

J'en ai recherché la cause dans l'épaisseur & la force de la sclérotique , j'ai trouvé qu'elle est plus épaisse dans sa partie postérieure que vers ses côtés : mais il n'est pas aisé de se persuader que cette épaisseur lui donne plus de facilité de s'étendre , vu que dans les yeux d'hommes elle est aussi plus épaisse à sa partie postérieure que vers les côtés , & ces yeux d'hommes se gonflent par les côtés où elle est plus mince plutôt que par sa partie postérieure. Voilà ce qui rend ce phénomène difficile : car quoique l'on puisse dire en général que les yeux grossissent & se gonflent par les endroits où les membranes s'étendent le plus facilement , néantmoins il

n'est pas facile de concilier ce qui arrive aux yeux d'hommes, & d'animaux à quatre pieds ; ainsi ce fait demande encore beaucoup d'observations & d'expériences pour pouvoir en donner une explication plausible, ce qui sera le sujet d'un autre Mémoire que je donnerai, lorsque j'aurai fait toutes les observations & les expériences dont j'ai besoin. Je parlerai dans ce Mémoire des yeux gelés par la glace & la neige, mêlés avec différens sels & différentes liqueurs ; des différentes évaporations des humeurs des yeux à différentes températures de l'air, & des yeux trempés pendant quelque temps dans différentes liqueurs.

La quatriemé chose que nous avons à observer, c'est que la glace de la chambre postérieure est moins épaisse dans le troisieme exemple que dans le second, & dans le second que dans le premier, ainsi la glace de la chambre postérieure a été d'autant moins épaisse que la gelée a été plus forte. L'on sçait que la raréfaction des liqueurs dans la gelée dépend de l'air qu'elles contiennent, qu'elles ont d'autant plus de force à se raréfier, que la quantité de ces liqueurs est plus grande, puisqu'il y a plus d'air. Cela étant, il faut que l'humeur aqueuse cede à la force de l'humeur vitrée. Il y a dans l'homme vingt fois autant d'humeur vitrée que d'humeur aqueuse ; dans le bœuf il y en a dix fois, & neuf fois autant dans le mouton. L'on verra dans mon Mémoire des découvertes sur les yeux, les proportions des humeurs bien déterminées dans toutes les especes d'animaux dont je parlerai.

Lorsque l'on fait geler un œil de bœuf, je suppose que l'humeur vitrée se dilate avec seulement quatre fois autant de force que l'humeur aqueuse, elle pousse & fait avancer le cristallin en devant, la flexibilité des procès ciliaires les fait avancer en devant encore plus que le cristallin ; c'est pour cette raison qu'on les trouve presque toujours détachés du cristallin, l'humeur aqueuse est obligée de leur céder la place, elle est chassée de la chambre postérieure dans la chambre antérieure avec d'autant plus de force & en plus

grande quantité que la gelée est plus grande ; elle est souvent contrainte de s'échaper jusques sous la sclérétique , en détachant l'uvée de la cornée , & dans cette occasion le crystallin souffre d'étranges compressions , comme on le remarque dans le troisieme exemple.

De-là on doit inférer qu'il est difficile de déterminer avec précision , par les yeux gelés , la véritable grandeur de la chambre postérieure , d'autant plus qu'il s'évapore , en gelant , une portion de l'humeur aqueuse. Néanmoins pour peu qu'on soit attentif à ce qui se passe dans un grand nombre d'yeux gelés à différens degrés de froid , on peut , en quelque maniere , la déterminer sans beaucoup s'éloigner de la précision. C'est sur ce fondement que je crois pouvoir assurer que la chambre postérieure , dans les yeux d'homme & de mouton , contient à peu-près le tiers de toute l'humeur aqueuse. Dans le chien il y en a le quart ; il s'en trouve autant dans le bœuf , mais dans le cheval il n'y en a environ que la cinquieme partie. Je rapporte pourtant ceci sans répondre de la précision , & seulement afin qu'on puisse voir en quelque maniere à quoi l'on doit s'en tenir sur la grandeur respective de ces chambres , qui peut varier comme toutes les autres parties du corps dans les animaux de même espece , & cela est d'autant plus probable , que j'ai trouvé dans les yeux des cornées plus convexes les unes que les autres , quoique la corde de l'arc qu'elles forment fût de la même longueur. Je ferai voir dans un autre Mémoire la grandeur des chambres de l'humeur aqueuse sans le secours de la gelée , & je démontrerai que le crystallin est rarement éloigné de l'uvée plus d'un quart de ligne.

La dernière chose que nous avons à observer , est que les crystallins n'ont point augmenté de volume , l'air ne leur a pourtant point manqué. La première pensée qui m'est venue là-dessus , est que le crystallin se trouve si fort comprimé entre l'humeur vitrée & l'humeur aqueuse , que l'air qu'il contient n'a pû se dilater avec facilité , d'autant plus qu'il est le dernier à ressentir la force de la gelée , & cette raison

paroît suffire , & n'avoir pas besoin d'autre démonstration. J'ai pourtant voulu voir ce qui arrive aux crySTALLINS gelés à part. J'ai trouvé qu'ils ont diminué de volume plutôt qu'augmenté , & l'on ne doit pas s'en étonner ; car comme les liquides n'augmentent leur volume en gelant , qu'à proportion de la dilatation de l'air qu'ils contiennent , tant que les parties du liquide conservent leur mouvement , les particules d'air ne se dilatent point par le froid , ce qui est prouvé par les liquides qui ne se gèlent point. Quelque grand froid qu'il fasse , on ne les voit point augmenter de volume , ils diminuent au contraire d'autant plus que la gelée est plus forte : mais lorsque les parties d'un liquide viennent à perdre leur mouvement , les particules d'air s'unissent les unes avec les autres, forment des molécules qui se dilatent d'autant plus à proportion de la quantité des particules d'air qui les composent , & augmentent par ce moyen le volume du liquide.

De ce que je viens de dire , il est facile de déduire la raison pour quoi nos crySTALLINS n'augmentent point de volume en gelant : la matière dont ils sont formés est trop visqueuse, elle empêche que les particules d'air ne puissent facilement se communiquer , & s'unir les unes avec les autres, ce qui est nécessaire pour en augmenter le volume.

J'ai pourtant remarqué que lorsque les crySTALLINS se sont dégelés , il s'est trouvé des bulles d'air très-petites sous la membrane crySTALLINE , & qu'il y en avoit encore de plus petites dispersées dans la substance des crySTALLINS : mais il y a apparence que ces bulles se sont formées, lorsque les crySTALLINS se sont dégelés; effectivement ils étoient d'une très-grande mollesse après être dégelés , ce qui marque un peu de desunion dans les parties. C'est ce qui arrive pour l'ordinaire dans le dégel des corps mols , & dans ce dérangement il y a une petite quantité de particules d'air qui peuvent s'unir les unes avec les autres , & former des bulles , mais qui ne sont pas assez de volume pour produire une augmentation sensible dans les crySTALLINS , car je n'en ai point trouvé qui aient augmenté de volume en dégelant.

EXPLICATION DES FIGURES

qui représentent les yeux gelés de différens animaux.

La premiere Figure représente un œil de bœuf, vû par sa partie antérieure.

AB, le petit diametre de l'œil.

CD, le grand diametre.

E, la cornée.

La seconde Figure représente un œil de bœuf vû de côté.

AB, l'axe de l'œil.

CD, le grand diametre.

E, la cornée.

Toutes les autres Figures représentent des yeux gelés, coupés par-leur axe.

La troisieme Figure est l'œil d'un homme.

La quatrieme est l'œil d'un chien.

La cinquieme est l'œil d'un mouton.

La sixieme est l'œil d'un bœuf.

La septieme est l'œil d'un cheval.

Les lettres de chacune de ces Figures représentent les mêmes parties.

AB, le grand diametre de l'œil.

CD, son axe.

C, la cornée.

EE, la glace de l'humeur aqueuse dans la chambre antérieure.

FF, l'uvée qui fait une surface plane dans l'œil de l'homme, & convexe dans les autres animaux.

G, le crySTALLIN.

HH, la glace de l'humeur aqueuse dans la chambre postérieure.

I, I, l'extrémité des processus ciliaires qui ont été détachés du crySTALLIN par la gelée.

Fig. 2.

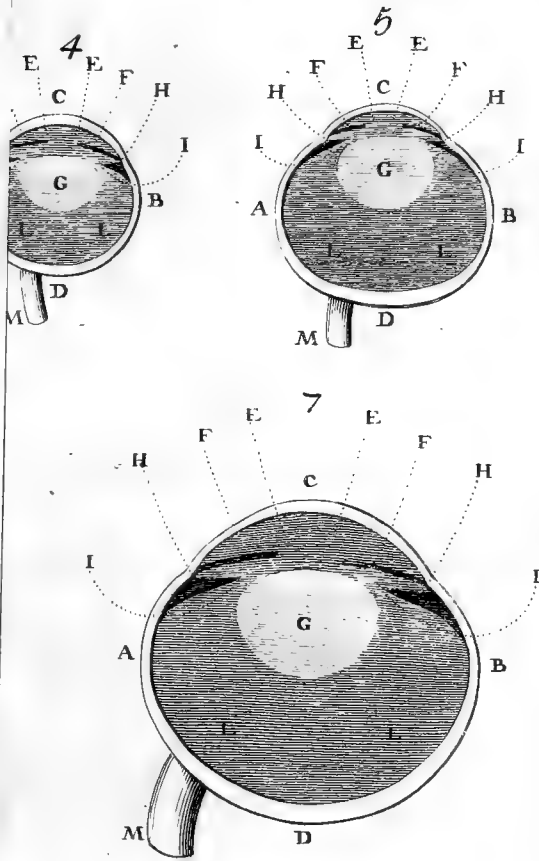
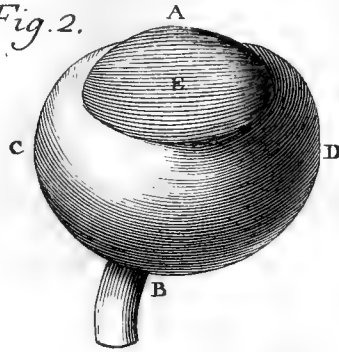


Fig 1

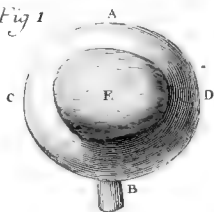
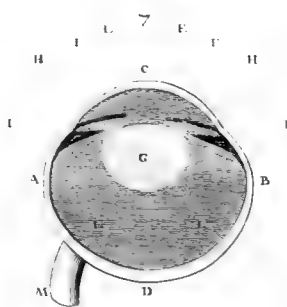
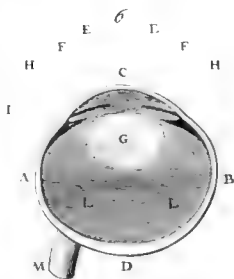
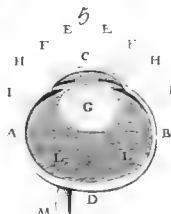
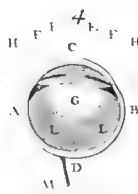
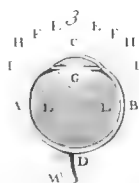
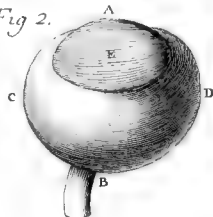


Fig 2.



L, L, la glace de l'humeur vitrée.

M, le nerf optique représenté dans sa situation naturelle dans tous les yeux.

METHODE GENERALE

Pour transformer les nombres irrationnaux en séries de fractions rationnelles les plus simples & les plus approchantes qu'il soit possible.

L'on explique à cette occasion un endroit important d'Archimede, qui paroît n'avoir pas été entendu par ses Commentateurs.

Par M. DE LAGNY.

LORSQUE le rapport de deux grandeurs est exprimé 17 Mars
1723.
ou en tout, ou seulement en partie par des nombres irrationnaux, l'on ne doit regarder cette expression que comme une espece de formule exemplaire, au moyen de laquelle on peut approcher indéfiniment du rapport cherché en nombres entiers; l'esprit n'apperçoit clairement & ne connoît parfaitement en ce genre que cette dernière expression. Aussi l'exacte & peut-être trop scrupuleuse antiquité rejettoit entièrement les nombres irrationnaux, non-seulement comme n'étant pas de véritables nombres, mais comme ne pouvant servir à former aucune idée précise du rapport cherché, ni même dans une infinité de cas une idée tant soit peu approchante, comme il arrive dans les polynomes irrationnaux liés de plusieurs signes radicaux qui s'affectent les uns les autres, & qui sont mêlés de signes + & -. Tel est, par exemple, le rapport du côté du pentagone au côté du quindécagone, inscrits dans le même cercle, car le diamètre étant 4, le côté du pentagone $= \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, & le quindécagone $= \sqrt{7 - \sqrt{5}} = \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$, mais même

56 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 dans les irrationnaux les plus simples, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c.
 il y a une obscurité essentielle, ou, pour parler plus exacte-
 ment, une inintelligibilité nécessairement attachée à cette
 espece d'expression.

Le Traité d'Archimede sur la mesure du cercle, le dixié-
 me Livre des Élémens d'Euclide, & presque tout l'ouvrage
 de Diophante fournissent des preuves évidentes de la ma-
 niere de penser des Anciens sur ce sujet.

Le premier, au lieu d'opérer sur $\sqrt{3}$, s'est servi de deux
 valeurs approchées $\frac{265}{153}$ & $\frac{1351}{780}$, dont la premiere donne la
 valeur de $\sqrt{3}$ par défaut, & l'autre par excès, l'une & l'autre
 à très peu-près, car le quarré de $\frac{265}{153}$ est $\frac{70.225}{23.409} = 3 - \frac{2}{23409}$,
 & le quarré de $\frac{1351}{780} = \frac{1.825.201}{608.400} = 3 + \frac{1}{608400}$.

Quels détours n'a pas pris le second dans son dixieme
 Livre, pour exprimer les rapports des grandeurs incommen-
 surables? Il finit par celui du côté du quarré à sa diagonale;
 rapport fameux chez les Anciens, & cité comme tel par
 de grands Philosophes.

Le troisieme donnant la regle pour résoudre les équa-
 tions du second degré, ajoute comme condition nécessaire
 & essentielle, ce qui exclud les irrationnaux, & en effet
 tout le mérite de la méthode de Diophante consiste à éviter
 par certaines hypotheses ingénieuses les nombres irration-
 naux qui se présentent les premiers, & pour ainsi dire d'eux-
 mêmes & naturellement dans les questions numériques in-
 déterminées.

Ce n'est que depuis environ deux siècles qu'on a inventé
 les expressions des nombres irrationnaux, avec la méthode
 d'opérer, qu'on a d'abord appelée l'*algorithme*, & qu'on au-
 roit dû appeller la *logistique* de cette espece de nombres.
 Ces expressions & cette logistique sont utiles & même né-
 cessaires pour abréger le calcul & les démonstrations: mais,
 encore une fois, lorsqu'il s'agit d'exprimer les rapports de
 deux ou de plusieurs grandeurs, il faut, si l'on veut se ren-
 dre intelligible, avoir recours aux nombres rationaux, &
 même aux nombres entiers. Par exemple, le rapport de l'aire
 du

du quarré, à l'aire du quarré de la diagonale, est exactement exprimé par le rapport de 1 à 2 : mais le rapport du côté de ce même quarré à sa diagonale est exprimé très-imparfaitement & inintelligiblement par le rapport de 1 à $\sqrt{2}$; & comme il est démontré qu'il est absolument impossible de trouver deux nombres quarrés entiers & déterminés, tels que le plus grand soit précisément double du plus petit, tout ce que peut faire de mieux une intelligence finie quelconque, c'est de trouver *régulièrement, indéfiniment, & sans aucun tâtonnement* (remarquez ces trois conditions, & surtout la dernière) c'est, dis-je, de trouver ainsi la série de tous les nombres quarrés pris deux à deux, tels que la différence du plus grand au double du plus petit, soit par excès, soit par défaut, soit la plus petite qu'il soit possible ; & il est évident que cette différence ne sçauroit être plus petite que l'unité. Telle est la série suivante $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \&c.$ dont les quarrés des numérateurs comparés aux quarrés des dénominateurs, sont

$$1 = 2 \times 1 - 1.$$

$$9 = 2 \times 4 + 1.$$

$$49 = 2 \times 25 - 1.$$

$$289 = 2 \times 144 + 1.$$

$$1681 = 2 \times 841 - 1.$$

Et ainsi de suite à l'infini, suivant la formule générale & exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a + 2b}{1a + 1b}$. Et il est évident que pour continuer cette série à l'infini, & par conséquent pour approcher indéfiniment du rapport de $\sqrt{2}$ à 1, ou de la valeur de $\sqrt{2}$, il ne faut absolument aucun tâtonnement, puisque l'on n'emploie jamais dans l'opération que l'addition & la duplication sans aucune division ni extraction des racines, qui sont les deux seules opérations où il entre en général essentiellement du tâtonnement, qui est ce qui fatigue & rebute le plus les calculateurs, comme étant une opération indigne des sciences exactes.

On ajoute ordinairement des tranches d'un certain nombre de zéro pour continuer l'approximation par extraction

Mem. 1723.

H

58 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
de racines. Cette méthode suppose en général une expression
purement arbitraire des nombres, suivant une progression
géométrique continue quelconque. L'usage a introduit la
progression *décuple*. Mais outre qu'il est évident qu'on de-
vroit exclure des méthodes mathématiques tout ce qui est
purement arbitraire, pour ne suivre que la méthode démon-
strativement la plus simple & la plus naturelle, ou plutôt
la seule méthode naturelle & raisonnable; il y a deux défauts
dans cette méthode d'addition de zéro. Le premier est le
tâtonnement qui est inséparable en général de l'extraction
des racines. Le second & le plus essentiel, c'est que l'on ne
peut, en la suivant, trouver absolument rien de réglé dans la
suite des chiffres du numérateur. Il est aisé de démontrer cet-
te impossibilité qui empêche la série d'être *régulière*; car si la
suite des numérateurs étoit réglée ou géométriquement ou
arithmétiquement, ou d'une manière mixte quelconque de
progressions connues, l'on pourroit intégrer la série en nom-
bres rationnaux, puisque la série des dénominateurs est ré-
glée en progression géométrique continue de 10 à 1, &
par conséquent le nombre irrationnel donné à transformer
en série ne seroit pas irrationnel; ce qui est absurde &
contre l'hypothèse. Reprenons pour exemple $\sqrt{2}$. Si l'on
continue l'extraction de la racine quarrée de 2, en ajoutant
à 2 tant de tranches qu'on voudra, par exemple huit tran-
ches de deux zéro chacune, l'on trouvera pour racine

$$1 \frac{41.421.356 + \&c.}{100.000.000 + \&c.}, \text{ c'est-à-dire, } 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} \\ + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100.000} + \frac{1}{1.000.000} + \frac{5}{10.000.000} \\ + \frac{6}{100.000.000}, \&c.$$

Et dans toute autre extraction de racine irrationnelle d'une
équation quelconque, l'on trouvera pour racine $a + \frac{b}{10}$
 $+ \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \frac{e}{10.000}, \&c.$

L'on épuiserait inutilement non-seulement toutes les let-
tres de notre alphabet, mais celles de cent alphabets de cent
langues toutes différentes, & tous les alphabets possibles,

sans pouvoir jamais trouver de suite réglée dans les numérateurs.

Si au contraire l'on substitue l'ordre simple & naturel à l'arrangement arbitraire, non-seulement la série sera parfaitement réglée, suivant la nature de l'équation qui a produit l'irrationnel donné: mais on la trouvera sans aucun tâtonnement, & l'on abrégera indéfiniment plus le calcul que par cette addition arbitraire & mécanique des tranches de zéro, & c'est une maxime constante & générale en matière de méthodes arithmétiques & algébriques, *que la méthode fondée en raison démonstrative & nécessaire est en tout sens & à tous égards indéfiniment préférable aux méthodes fondées sur l'arbitraire.*

Si l'on suit la méthode ordinaire, l'on exprimera moins exactement par de plus grands nombres un rapport qui peut s'exprimer plus exactement par de plus petits. Ce qui est absurde & un vrai paralogisme de calcul, & il est surprenant qu'on ne s'en soit point aperçu.

Les nombres d'approximation ainsi trouvés par addition de tranches de zéro, & par la continuation de l'extraction des racines, ou même en général par toute autre méthode plus ou moins praticable, peuvent & doivent uniquement servir de matériaux pour trouver enfin la seule bonne & véritable série, en y appliquant la méthode du triangle des rapports que je donnai à l'Académie le 2 Décembre 1705. L'exemple que je vais donner tombe de lui-même & directement dans ce cas simple du triangle des rapports: mais c'est un cas particulier.

Archimède nous fournit le premier modèle de transformation d'un nombre irrationnel $\sqrt{3}$ en fractions rationnelles. Il s'agissoit d'exprimer en nombres les rapports du diamètre du cercle aux périmètres des polygones inscrits & circonscrits de 3, de 6, de 12, de 24, de 48 & de 96 côtés, afin de déterminer assez exactement, pour la pratique, le rapport du diamètre à la circonférence.

On pourroit demander pourquoi Archimède a préféré

pour le nombre des côtés des polygones réguliers, cette progression géométrique continue 3, 6, 12, 24, 48, 96, à celle-ci qui paroît bien plus simple 4, 8, 16, 32, 64, 128. Je réponds que le rapport parfait d'égalité entre le côté de l'hexagone inscrit & le rayon est apparemment ce qui l'a déterminée au choix de la première progression. Mais le côté du triangle équilatéral inscrit au cercle étant au rayon comme $\sqrt{3}$ à 1, Archimede ne pouvoit exprimer ce rapport qu'en substituant, comme il a fait, deux fractions rationnelles qui exprimassent cette valeur $\sqrt{3}$ à très peu près & en très-petits nombres, l'une par défaut, & l'autre par excès, afin d'avoir des limites suffisantes. Il choisit $\frac{265}{153}$ & $\frac{1351}{780}$.

Ce choix est fait avec beaucoup d'art, & aucun des Commentateurs, que je sçache, ne s'est apperçu de la méthode qui peut l'y avoir conduit.

Il est pourtant, ce me semble, plus important, plus utile & plus satisfaisant pour le Lecteur, de trouver le chemin qu'ont suivi les grands Géometres pour parvenir à leurs nouvelles découvertes, que de se laisser simplement convaincre par la démonstration. On devient en quelque maniere soi-même inventeur; l'on apprend du moins à le devenir.

Voici donc les différens pas qu'Archimede fit apparemment dans cette recherche.

1°. Il est évident que s'il étoit possible d'exprimer exactement la valeur de $\sqrt{3}$, ce seroit par une fraction dont la valeur seroit plus grande que 1, & plus petite que 2, & dont le quarré du numérateur contiendrait exactement trois fois le quarré du dénominateur: mais cela étant absolument impossible, Archimede ne pouvoit rien faire de mieux que de trouver méthodiquement & régulièrement la suite de chaque deux nombres quarrés; tels que le quarré du plus grand ne surpassât ou ne fût surpassé par le triple du quarré du plus petit que le moins qu'il soit possible.

Lorsque cet excès & ce défaut ne sont chacun que d'une unité, il est évident que c'est la plus petite différence possi-

ble, & c'est ce qui arrive dans la transformation de $\sqrt{2}$ en la série ci-dessus $\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17-}{12}$, $\frac{41+}{29}$, &c.

La même chose arrive dans $\sqrt{5}$, qui se transforme dans la série $\frac{2+}{1}$, $\frac{9+}{4}$, $\frac{38+}{17}$, $\frac{161-}{72}$, $\frac{682+}{305}$, &c. & dans $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, &c. & en géuéral dans $\sqrt{aa+1}$.

Le second cas est lorsque l'une des deux différences est seulement d'une unité dans le quarré multiple, & que l'autre différence est plus grande, comme il arrive dans $\sqrt{3}$, où l'excès dans le quarré triple n'est que d'une unité; mais le défaut est de 2.

Enfin le troisieme cas est lorsque ces différences sont en général toutes deux plus grandes que l'unité, mais pourtant les plus petites qu'il soit possible.

La dernière perfection de la méthode dans la résolution des équations qui ont des racines irrationnelles, est de trouver ces racines si approchées, que la différence de l'homogene de comparaison qui en résulte soit toujours moindre que l'unité & par excès & par défaut. Il n'y a point d'autre limitation qui ne soit arbitraire. Celle-ci est fondée sur la nature même des nombres.

Il y a apparence qu'Archimede reconnut d'abord simplement par induction & en tâtonnant, que la première espece de fraction qui se présente pour $\sqrt{3}$, c'est $\frac{2}{1}$, car le quarré 4 du numérateur 2 excède d'une unité le triple du quarré 1 du dénominateur 1: en effet $4 = 3 \times 1 + 1$.

La seconde fraction qui se présente ensuite est $\frac{5}{3}$, car le quarré 25 du numérateur 5 est surpassé de 2 par le triple du quarré 9 du dénominateur 3; en effet $25 = 3 \times 9 - 2 = 27 - 2$.

La troisieme fraction est $\frac{7}{4}$, qui donne $\frac{49}{16}$ & $49 = 3 \times 16 + 1$.

On trouvera de même la quatrième fraction $\frac{17}{11}$ qui donne $\frac{289}{121}$ & $361 = 3 \times 121 - 2$.

Et la cinquieme $\frac{26}{17}$, qui donne $\frac{676}{289}$ & $676 = 3 \times 225 + 1$.

Et la sixième $\frac{11}{1}$, qui donne $\frac{1681}{1} \& 5041 = 3 \times 1681 - 2$.

Voilà donc déjà un commencement de série alternative par excès & par défaut, trouvée simplement par induction.

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}.$$

Or suivant l'excellente remarque de M. Descartes dans sa Géométrie : *dès qu'en matière de séries ou progressions l'on a un certain nombre de termes connus, l'on a bien-tôt toute la suite, c'est-à-dire, la méthode de continuer la série à l'infini* ; il ne s'agit plus que d'un peu de sagacité pour découvrir l'ordre, la liaison, l'analogie dans ces premiers termes de la série.

On voit ici une série de six termes alternativement excédans & défailans. J'en forme deux séries de trois termes chacune, l'une toute d'excédans, & l'autre toute de défailans.

Excédans $\frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$, &c.

Défailans $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$, &c.

Et c'est le second pas qu'il falloit faire.

Le troisième est donc d'examiner l'ordre, la liaison, l'analogie qui regnent dans chacune de ces deux séries. C'est en général ce qu'il y a de plus difficile : mais il est aisé ici de s'appercevoir que chaque numérateur suivant est égal au double du numérateur précédent plus le triple du dénominateur aussi précédent, & que chaque dénominateur suivant est égal au double du dénominateur précédent plus le numérateur aussi précédent.

Ainsi dans la première série, en considérant les numérateurs de la série $\frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$,

Je vois que $7 = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7$.

& $26 = 2 \times 7 + 3 \times 4 = 14 + 12 = 26$.

Et en considérant les dénominateurs de la même série,

Je vois que $4 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$.

que $15 = 2 \times 4 + 7 = 8 + 7 = 15$.

Dans la seconde série $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$, &c. c'est précisément la même analogie ; car en considérant les numérateurs,

Je vois que $19 = 2 \times 5 + 3 \times 3 = 10 + 9 = 19$.

que $71 = 2 \times 19 + 3 \times 11 = 38 + 33 = 71$.

Et en considérant les dénominateurs,

Je vois que $11 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$.

que $41 = 2 \times 11 + 19 = 22 + 19 = 41$.

Ce n'est jusqu'ici qu'une induction; & pour avoir une entière & parfaite certitude, il y a un quatrième pas à faire, c'est de supposer en général la fraction génératrice $\frac{a}{b}$, telle que dans la première série l'on ait $1 a a = 3 b b + 1$, & que dans la seconde série l'on ait la fraction génératrice $\frac{A}{B}$, telle que $1 A A = 3 B B - 2$, afin d'examiner ensuite si les deux fractions résultantes en général $\frac{2a+3b}{1a+2b}$ & $\frac{2A+3B}{1A+2B}$ conservent indéfiniment la même propriété, en sorte que la fraction $\frac{a}{b}$ représentant un terme quelconque de la première

série, on soit assuré que la fraction $\frac{2a+3b}{1a+2b}$ doivent infailliblement représenter le terme immédiatement suivant de la même série, & de même pour $\frac{A}{B}$ & $\frac{2A+3B}{1A+2B}$ dans la seconde série. Or c'est ce qui se démontre aisément, car le carré du numérateur $2a+3b$ est $4aa+12ab+9bb$. Le carré du dénominateur $1a+2b$ est $1a+4ab+4bb$, dont le triple est $3aa+12ab+12bb$.

La différence du carré du numérateur au carré du dénominateur est $1aa-3bb$.

Or par l'hypothèse $1aa=3bb+1$. Donc cette différence $1aa-3bb=1$. Ce qu'il falloit démontrer pour la première série.

On démontrera de même dans la seconde série que la différence sera $3BB-1AA$, & comme par l'hypothèse $1AA=3BB-2$, cette différence sera $=2$. Ce qu'il falloit démontrer pour la seconde série.

Je puis donc continuer indéfiniment ces deux séries, en me servant de la formule exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+3b}{1a+2b}$, ou

$\frac{A}{B}$ & $\frac{2A+3B}{1A+2B}$, & je trouverai les deux séries suivantes.

Première série. $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$, $\frac{362}{209}$, $\frac{1351}{780}$, &c.

Seconde série. $\frac{5}{3}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{71}{41}$, $\frac{265}{153}$, $\frac{989}{571}$, $\frac{3691}{2631}$, &c.

Ordre des termes. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

Et voilà les deux fractions d'Archimede trouvées $\frac{1351}{780}$ qui est le sixieme terme dans la premiere série, & $\frac{265}{153}$ qui est le quatrieme terme dans la seconde série. La question me paroît pleinement approfondie par rapport à Archimede. Il est aisé de trouver ensuite la méthode générale pour tous les nombres quarrés irrationnaux.

Le premier est $\sqrt{2}$, qui exprime le rapport de la diagonale du quarré à son côté = 1.

Le second est $\sqrt{3}$, qui exprime le rapport du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle au rayon du même cercle = 1, & c'est de ce rapport de $\sqrt{3}$ à 1 transformé en série de fractions rationnelles que dépend immédiatement la détermination très-prompte & très-simple du rapport du diametre à la circonférence, tel que je l'ai donné dans les Mémoires de l'Académie en 1719, page 135 & suivantes, par la tangente de 30 degrés, & qu'on pourroit encore abrégier & perfectionner par la tangente de 15 degrés, qui se réduit à trouver la série de $2 - \sqrt{3}$ aussi aisée & plus prompte que celle de $\sqrt{3}$.

Le troisieme est $\sqrt{5}$, qui entre nécessairement dans l'expression du rapport du côté du pentagone au rayon du cercle, & de même pour les polygones de 10, de 20, de 40, de 80, &c. côtés.

Le quatrieme est $\sqrt{6}$, qu'on peut transformer ou *mediatement* par $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$, ou *immédiatement* par la formule exemplaire qui lui est propre.

Le cinquieme est $\sqrt{7}$, qui entre nécessairement dans l'expression du rapport du côté de l'heptagone au rayon, & des polygones

polygones de 14, 28, 56, 112, &c. côtés, comme je pourrai le démontrer dans un Mémoire particulier sur l'heptagone; & ainsi des autres irrationnaux du second degré, où l'on peut remarquer l'analogie du nombre des côtés du polygone régulier dans l'expression de son rapport au rayon avec le nombre quarré irrationnel correspondant, &c.

Voici ces formules exemplaires dans une parfaite analogie.

Pour $\sqrt{1}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{1a+1b}{1a+1b}$ rationnel.

Pour $\sqrt{2}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{1a+2b}{1a+1b}$

Pour $\sqrt{3}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+3b}{1a+2b}$

Pour $\sqrt{4}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+4b}{1a+2b}$ rationnel.

Pour $\sqrt{5}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+5b}{1a+2b}$

Pour $\sqrt{6}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+6b}{1a+2b}$

Pour $\sqrt{7}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+7b}{1a+2b}$, ou $\frac{2a+7b}{1a+3b}$.

Pour $\sqrt{8}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a+8b}{1a+2b}$, ou $\frac{3a+8b}{1a+3b}$.

Pour $\sqrt{9}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{3a+9b}{1a+3b}$ rationnel.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{13}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{3a+13b}{1a+3b}$, ou $\frac{4a+13b}{1a+4b}$.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{41}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$, ou $\frac{7a+41b}{1a+7b}$.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{46}$ $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{6a+46b}{a+6b}$, ou $\frac{7a+46b}{1a+7b}$.

En général tout irrationnel du second degré peut s'exprimer par $\sqrt{aa+b}$, & par $\sqrt{AA-B}$. Dans le premier cas soit $aa+b=c$ & $a \equiv d$, la formule sera $\frac{a}{b}$ & $\frac{ad+cb}{1a+ab}$;

puis supposant $ad + cb = e$ & $1a + ab = f$, on aura $\frac{ae + cf}{1e + af}$ pour second terme; puis supposant $ae + ef = g$ & $1e + af = h$, on aura pour troisieme terme $\frac{ag + ch}{1g + ah}$, & ainsi de suite à l'infini.

Dans le second cas pour $\sqrt{AA - B}$, on supposera de même $AA - B = C$ & $A = D$, & l'on aura $\frac{A}{B}$ & $\frac{AD + CB}{1A + AB}$, &c. Universellement pour $\sqrt{ax \pm b} = \frac{1x}{1y}$ en supposant $ax \pm b = c$, l'on aura $\frac{ax + cy}{1x + ay}$.

Il est aisé d'observer l'analogie dans la série des formules ci-dessus : elle comprend également les nombres irrationnels du second degré, & les nombres rationnels. Ce qui est une propriété assez singulière, & en même-temps une preuve de la bonté de la méthode.

REMARQUE I.

On peut d'abord former quatre séries d'approximation dans chaque cas particulier d'irrationnel du second degré, deux séries sur chacune des deux formules exemplaires, dont l'une est la formule par excès, & l'autre la formule par défaut. Par exemple, dans $\sqrt{41}$, l'on peut former les quatre séries suivantes; car supposant $a = 6$ & $b = 1$, & se servant de la formule exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, on formera la premiere série $\frac{6}{1}, \frac{7}{12}, \frac{65}{47}, \frac{11833}{1648}, \frac{116666}{21121}, \text{ \&c.}$

La même premiere formule $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$ & $\frac{1a}{1b}$, supposant $a = 7$, donne la seconde série $\frac{7}{1}, \frac{53}{13}, \frac{1011}{101}, \frac{12787}{1997}, \text{ \&c.}$

La seconde formule $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$ & $\frac{1a}{1b}$, en supposant $a = 7$ & $b = 1$

donne la troisieme série $\frac{7}{1} \mid \frac{90}{14}$ ou $\frac{45}{7} \mid \frac{1204}{188}$ ou $\frac{171}{47} \mid \frac{16136}{2520}$ ou $\frac{2017}{315} \mid \frac{216272}{33772}$ ou $\frac{13517}{2111} \mid \text{ \&c.}$

Enfin la même seconde formule $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$, en supposant

$a = 6$, donne la quatrième série $\frac{6}{1} \mid \frac{83}{13} \mid \frac{1114}{174}$ ou $\frac{567}{87} \mid$
 & $b = 1$
 $\frac{14932}{2332}$ ou $\frac{1840}{289} \mid \frac{200136}{31256}$ ou $\frac{25017}{3907} \mid$ &c.

REMARQUE II.

Mais ce qui doit paroître surprenant, & qui est un vrai paradoxe, c'est que chacune de ces deux formules $\frac{6a+41b}{1a+.6b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+.7b}$ fournira une infinité d'autres séries qui approcheront toutes & chacune indéfiniment de la valeur cherchée $\sqrt{41}$, en supposant a égal à un nombre quelconque, & b égal aussi à un autre nombre quelconque, avec cette seule condition ou restriction que a soit plus grand que b ; par exemple, on peut supposer $a = 100$, & $b = 7 = 13 = 91$, &c. $= 99$, & la force, ou, pour ainsi dire, la vertu de la formule est telle qu'on approchera toujours indéfiniment, quelque extravagante que paroisse d'abord la supposition, soit par excès, comme de $\frac{100}{7} = \sqrt{41}$, ou par défaut, comme de $\frac{100}{97} = \sqrt{41}$.

REMARQUE III.

Il y a évidemment un choix à faire de la meilleure, non-seulement des quatre séries primitives, mais de l'infinité des autres séries possibles. Tout se réduit enfin à la série formée par le triangle des rapports, qui est la plus simple & la meilleure de toutes.

$\frac{6}{1} \mid \frac{13}{2}, \frac{32}{5}, \frac{307}{67} \mid \frac{826}{125}, \frac{2049}{320}, \frac{25414}{3960} \mid$ &c.
 Et qui se forme ainsi par la suite des quotiens générateurs $6 \mid 2, 2, 12 \mid 2, 2, 12 \mid$ à l'infini, en continuant par 2, 2, 12.

La série des numérateurs, $6 \mid 13, 32; 397 \mid 826, 2049, 25414 \mid$ se forme ainsi :

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	
6.	13.	32.	397.	826.	2049.	25414.	&c.
$2A+1.$	$2B+1A.$	$2C+1B.$	$2D+1C.$	$2E+1D.$	$2F+1E.$	$2G+1F.$	

La série des dénominateurs 1, 2, 5, 67, 129, 320, 3969, &c. se forme ainsi & de même que celle des numérateurs.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	
1.	2.	5.	67.	129.	320.	3969.	&c.
$\left \begin{array}{l} 2a + 0. \\ 2b + 1a. \\ 2c + 1b. \\ 2d + 1c. \\ 2e + 1d. \\ 2f + 1e. \end{array} \right $							

REMARQUE IV.

La méthode d'*approximation* ne doit être employée que dans le cas où la méthode d'*exactitude* est impossible. Il est vrai d'un côté que celle-ci est infiniment plus parfaite que l'autre, quoique la différence ou l'erreur puisse devenir indéfiniment petite; mais c'est par rapport au temps qu'il faudroit employer dans l'*approximation* pour atteindre à l'*exactitude*. Ce temps est infini. Il faudroit l'éternité toute entière. En ce sens la méthode d'*exactitude* est infiniment plus parfaite que celle d'*approximation*: mais d'un autre côté celle-ci est d'un usage indéfiniment plus fréquent & plus étendu que l'autre, parce que dans tout genre & toute espèce de problèmes ou d'équations au-dessus du premier degré, il y a une infinité plus de cas où les racines cherchées sont irrationnelles, qu'il n'y en a où elles sont rationnelles. Ainsi il y a une espèce de compensation pour le prix de ces deux genres de méthode par rapport au calcul.

REMARQUE V.

1°. On étendra dans d'autres Mémoires cette méthode d'*approximation* à tous les membres irrationaux simples & composés de tous les degrés à l'infini.

2°. On fixera dans chaque cas les limites d'*approximation*.

3°. On abregera indéfiniment l'opération & le calcul par de nouvelles séries dérivées de la série fondamentale, qui donne tous les termes de suite, en trouvant les termes, suivant un nouvel ordre d'exposans en progression arithmétique ou géométrique quelconque ou composé de ces deux

progressions. C'est précisément comme on abrège l'addition des simples unités une à une par l'addition ordinaire, & comme on abrège l'addition par la multiplication & la formation des puissances.

4°. Après avoir trouvé en nombres entiers les racines approchées de toutes les équations par ma méthode des progressions arithmétiques de tous les degrés à l'infini, on appliquera la méthode d'approximation à toutes ces mêmes équations, en sorte que *sans aucun tâtonnement* on réduira à moins d'une unité la différence de l'homogene de comparaison résultant de la racine approchée trouvée à l'homogene donné, quelque immense que pût être d'abord cette différence; & c'est, ce me semble, à quoi se réduit tout ce qu'on peut souhaiter dans la science du calcul.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES

*Sur quelques mouvemens extraordinaires des omoplates
& des bras.*

Et sur une nouvelle espece de muscles.

Par M. WINSLOW.

LA myologie des extrémités du corps humain est la partie de l'anatomie que l'on croit la plus facile & la plus connue. La dissection de ces muscles n'embarasse pas même les commençans. Leur démonstration se fait communément d'une manière à faire croire qu'un coup d'œil suffira pour en comprendre le mécanique & l'usage. Et comme plusieurs grands maîtres avoient travaillé là-dessus, je croyois aussi cette matiere presque épuisée, & par conséquent assez stérile pour un Académicien, jusqu'à ce que *M. l'Abbé Bignon* me fit l'honneur de m'engager à un nouvel examen des articulations, comme il paroît par les Mémoires de l'Académie de l'année 1719.

7 Avril
1724.

Je commençai d'abord par quelques-uns des muscles de l'omoplate. Ensuite je découvris dans plusieurs autres des usages dont personne n'avoit parlé, comme on peut voir dans les Mémoires imprimés depuis. Je ne peux m'empêcher à cette occasion de marquer ma douleur au sujet de la perte que j'ai faite, aussi-bien que toute l'Académie, par la mort de feu *M. Varignon*, qui m'avoit fort encouragé par le contentement qu'il me témoignoit de mon entreprise, & encore plus par une espece de convention de travailler avec moi sur cette matiere, qu'il aimoit & qu'il avoit autrefois étudiée avec beaucoup de plaisir.

Il se présente aujourd'hui une occasion très-particuliere d'admirer l'artifice de quelques mouvemens extraordinaires des omoplates & des bras, qu'il n'est pas si aisé de comprendre que l'on pourroit s'imaginer. En voici l'histoire.

Un Venitien nommé *Dominique Create*, âgé de 64 ans; un peu maigre & d'une taille médiocre, fait les tours suivans avec ses omoplates & ses bras.

1°. Il fait saillir très-considérablement les bouts ou les angles inférieurs de ses omoplates, & les éloigne du dos, en sorte que les omoplates soulevent la peau, forment un creux considérable entre elles, & paroissent comme des ailerons ou des moignons d'ailes pointues. *Voyez la premiere Figure.*

Il remue les omoplates dans cette attitude avec une grande vitesse en haut, en-bas, de côté & d'autre, & de plusieurs autres mouvemens combinés de ceux-ci.

2°. Il approche les omoplates l'une de l'autre, de maniere que leurs bases se touchent tout-à-fait & couvrent l'épine du dos. Il les approche avec tant de force, qu'en mettant une canne ou un bâton le long de l'épine du dos, il l'embrasse entièrement avec les omoplates, & les tient si fermement, qu'une autre personne ayant empoigné le bâton ou la canne ainsi embrassés, souleve par-là tout le corps du Venitien de terre. *Voyez la seconde Figure.*

Par le même mouvement d'omoplates il embrasse le bout d'une grosse corde attachée au plancher, & en retirant ses

jambes , il demeure suspendu en l'air , & se laisse balancer , ou pour ainsi dire voltiger sans quitter la corde. Par ce moyen il manie encore fort adroitement un fleuret au dessus de sa tête , en courbant le corps en devant. Il joue aussi très-aisément du drapeau avec ses omoplates. Tout ceci , comme encore de casser une noix avec les épaules , n'est que la suite d'un même mouvement.

3°. Il se donne une espece d'estrapade , & cela d'une maniere assez surprenante. Voici comme il s'y prend. Il se tient debout , & après s'être lié les mains par un mouchoir assez près l'une de l'autre , desorte qu'elles ne puissent pas se quitter , il leve un pied après l'autre pour passer ses mains par dessous , & les porter derriere le dos. Il fait ensuite plusieurs mouvemens & efforts pour les jeter plus en arriere & en haut ; ce qu'ayant réitéré plusieurs fois , il les passe de derriere en haut par dessus la tête , & les fait revenir sur le devant où elles étoient quand il commençoit , & cela sans qu'elles se soient quittées. Ayant fait ces tours de bras plusieurs fois de suite , il les fait autant de fois à contre-sens , c'est-à-dire , il jette les bras de devant en haut par dessus la tête , & de-là en arriere , d'où il les fait revenir par dessous les pieds & en devant où il finit. *Voyez la troisieme & la quatrieme Figure.*

4°. Il tourne le bras droit en maniere de moulinet sur l'articulation de l'épaule , comme s'il étoit tout-à-fait disloqué , de maniere que le bras , qui est toujours étendu , passe directement en arriere , & de-là en haut , de même qu'en devant & en bas. Il fait ces tours avec une grande vitesse , & les ayant faits plusieurs fois dans un sens , il les repasse autant de fois à contre-sens.

M. de Reaumur , qui s'est toujours signalé dans la compagnie par ses recherches infatigables & ses excellentes découvertes , mais sur-tout par sa maniere de travailler en vrai physicien , & conformément à l'intention de notre auguste Fondateur , de glorieuse mémoire , m'exhorta de donner une explication anatomique de ces tours , & me témoi-

72 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
gna ensuite que *M. l'Abbé Bignon* seroit bien-aise que j'en
fisse un mémoire pour l'assemblée publique.

Sur cela je vis notre Venitien en particulier chez *M. Sauré*, très-habile Chirurgien-Juré à Paris, que j'avois prié de le faire venir chez lui, comme c'étoit lui qui me l'avoit indiqué par rapport à mon travail sur les muscles. J'examinai là à mon aise & de près par la vue & par le maniement toutes les différences de mouvemens & d'attitudes qui se présentoiént avant, pendant & après chaque tour qu'il faisoit. Je fis principalement les observations suivantes.

1°. La conformation des omoplates, des clavicules, des bras, du dos & de la poitrine paroît assez naturelle.

Je fais exprès cette remarque pour distinguer les tours de notre Venitien comme naturels, d'avec ceux qui se font par des os dérangés, des cartilages écornés & des ligamens forcés dès la jeunesse.

2°. Pour éloigner ses omoplates du dos en maniere d'aïlons, il tournoit les bras en arriere, & joignoit derriere le dos ses deux mains par un certain entrelacement de ses doigts. Il avoit en même-temps le dos vouté & la tête baissée. Dans cette attitude la partie supérieure du muscle trapèze paroïssoit très-légerement bandée & le biceps gonflé.

3°. Pour joindre les omoplates & pour leur faire embrasser ou tenir un bâton, une épée, une corde, &c. il tournoit aussi les bras en arriere, & joignoit les mains, mais avec cette différence, qu'il tenoit toujours les bras exactement étendus & très-roides, soit qu'il fût debout pour embrasser la corde ou le bâton, soit qu'il se baissât pour prendre & manier l'épée & le drapeau. Dans cette attitude des bras, le biceps de chacun étoit entierement gonflé, bandé & dur, & le moignon de chaque épaule étoit baissé.

4°. A l'égard du mouvement d'estrapade, il se faisoit si vite, que l'on ne pouvoit pas bien fixer la vue pour suivre distinctement les différentes attitudes qui se succédoient, & il étoit comme impossible à notre Venitien de tenir pendant tant soit peu de temps les bras en place ou en repos dans
quelques-

quelques-uns des espaces qu'ils parcouroient entre leur attitude presque horizontale derrière le dos & leur attitude perpendiculaire sur la tête.

5°. Le mouvement de moulinet étoit encore plus prompt, & ne permettoit aucune inspection assez distincte pour faire des observations sur les attitudes successives des bras ainsi mus. Tout ce que je pûs remarquer ici, est qu'il disoit avoir besoin de faire encore ce tour à contre-sens pour raccommoder son bras; & il le fit outre cela ensuite tirer & secouer par une autre personne pour la même raison. Il observoit à peu-près la même chose après le mouvement d'estrapade. Il étoit plus long à se mettre en train pour ces deux sortes de mouvemens quand il avoit froid que quand il avoit chaud.

Après l'exposé historique des principaux tours du Vénitien, & l'examen que j'en ai fait, il faut voir comment on les peut expliquer par l'anatomie, & quelle utilité on peut tirer de cette curiosité.

A l'égard de la saillie extraordinaire des omoplates en manière d'aîlerons, on pourroit avec quelque raison croire qu'il n'y a que le plan supérieur du muscle trapeze qui puisse produire cet effet, en agissant sur l'omoplate comme sur un levier de la troisième espèce. Dans ce cas le point d'appui seroit à la partie supérieure de l'omoplate, qui seroit fixée à cet endroit en partie par le bras arrêté en arrière, & en partie par la portion supérieure du muscle grand-dentelé. Le plan supérieur du trapeze seroit la puissance qui, en tirant l'acromion en haut, souleveroit en même-temps comme une espèce de poids ou de résistance l'angle inférieur de l'omoplate avec la peau. C'étoit ainsi que je croyois d'abord avoir trouvé l'explication de ce phénomène vu de loin : mais en l'examinant de près, je me sentis bien puni, pour avoir voulu aller à trop grand pas contre mon ordinaire; car je trouvai très-peu de résistance dans le muscle trapeze, & je vis avec étonnement une grande contraction dans le muscle biceps, dont on borne communément l'usage à la flexion de l'avant-bras. Cependant je fus très-ravi de trouver encore un nouvel em-

74 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ploi de ce muscle, outre ceux que j'avois déjà découverts & publiés dans les Mémoires de l'Academie de 1720.

Ce nouveau phénomène du muscle biceps me parut d'abord fort extraordinaire : mais après avoir bien confronté sa situation naturelle avec l'attitude que le Venitien donne à ses bras dans cette occasion, je crois l'avoir compris dans la maniere suivante. Quand on tient les mains jointes derriere le dos, ayant les coudes fléchis, il faut nécessairement que la partie antérieure de l'os du bras soit tournée vers les côtes, & les autres parties à proportion, comme il paroît assez évidemment par la situation forcée du coude & du pli de chaque bras dans cette attitude. On sçait que le muscle biceps est attaché par son extrémité inférieure à l'avant-bras, & par deux extrémités supérieures à l'omoplate, sçavoir au-dessus de sa cavité glenoïde & à la pointe de son avance nommée *coracoïde* ; on sçait aussi que le corps de ce muscle est placé le long de la partie presque antérieure de l'os du bras. Ainsi dans l'attitude présente, l'os du bras étant contourné de la maniere que je viens de dire, ce muscle est aussi tourné vers les côtes, & paroît même en arriere, comme on voit par la premiere figure. Il s'ensuit de-là qu'étant contracté ou raccourci dans cette situation, & son extrémité inférieure étant fixée par l'avant-bras qui est arrêté derriere le dos, il doit mouvoir l'omoplate sur la tête de l'os du bras en maniere de levier de la premiere espece, c'est-à-dire, appliquer sa partie supérieure aux côtes, & par le même mouvement en écarter sa partie inférieure. Pour rendre cet écartement plus sensible, il faut pousser les mains fortement contre le dos. En observant cette derniere circonstance, que j'expliquerai dans la suite, il est facile à chacun, principalement à ceux qui sont maigres, de faire le même tour, mais non pas dans le même degré que le Venitien.

Le second tour de cet homme ou son adresse d'approcher ses omoplates, & de tenir fortement entre elles différentes choses, me parut d'abord plus difficile à comprendre que le premier. On dit communément que les omoplates sont

tirées vers l'épine du dos par les muscles nommés *rhomboides*, & par une portion du trapeze : mais il est assez évident qu'ils ne peuvent pas se raccourcir jusqu'à joindre tout-à-fait les omoplates, & que s'ils le pouvoient, ils empêcheroient les omoplates d'embrasser. Avant l'examen particulier de ce tour, je croyois en avoir trouvé tout l'artifice dans les seuls muscles appellés *grands dorsaux*, & je pensois que les bras étant tirés en arriere par la portion supérieure de ces muscles, pourroient pousser les omoplates vers l'épine du dos. Mais en regardant de près, je fus aussi surpris que dans l'examen du premier tour, de n'y sentir presque aucun effort, & de voir encore le muscle biceps employé & être extraordinairement gonflé. Je compris bien-tôt par-là que la mécanique de ce second tour étoit presque la même que celle du premier, & que le muscle biceps étoit encore ici le principal acteur ou moteur, mais par une direction différente. Car l'os du bras étoit ici tourné de maniere que le biceps étoit situé dans un sens presque opposé à celui qu'il avoit dans le premier tour ; les coudes étoient presque tournés l'un vers l'autre ; les bras étoient très-étendus & les mains jointes. Dans cette attitude les deux biceps se mettant en contraction, & étant fixés par leurs extrémités inférieures, meuvent encore les omoplates sur leur articulation en maniere de levier de la premiere espece, mais autrement que dans le premier tour, car ils tirent l'apophyse coracoïde & la partie supérieure du col de chaque omoplate directement en dehors, & par-là poussent leurs bases vers l'épine du dos, & les approchent. Pour serrer fortement les omoplates ainsi jointes, il faut que les bras soient fermement étendus, les mains jointes & les coudes en même-temps contournés vers l'épine du dos avec effort, comme je l'expliquerai plus en détail dans la suite de ce Mémoire. Le muscle coraco-brachial y contribue aussi.

Le mouvement d'estrapade n'est pas si difficile à expliquer qu'il est à imiter. Le plus rude & le seul extraordinaire de ce tour est de lever les bras derriere le dos, & de les hausser

tout de suite pour les faire passer au-dessus de la tête sans dégager les mains liées. Tout le reste est très ordinaire, & on comprend facilement que pour passer les mains liées par dessous les pieds, il ne faut que pouvoir bien plier une jambe, & se tenir en même-temps ferme sur l'autre. En faisant cette espece d'estrapade à contre-sens, la grande difficulté se rencontre au même point, sçavoir quand il faut renverser les bras de devant en arriere par dessus la tête, les mains liées ensemble. Ainsi de tout le cercle que les bras décrivent par ce mouvement, c'est environ le tiers qui renferme toute la difficulté, & qui est compris en arriere entre le dos & la tête.

Avant que d'expliquer ce mouvement, il faut faire souvenir que l'articulation de l'os du bras avec l'omoplate est sphéroïde & semblable à ce que les faiseurs d'instrumens de mathématique appellent *genou*; que la tête hémisphérique de l'os du bras est posée obliquement, & qu'elle est tournée un peu de dedans en arriere, & non pas directement vers les côtes, comme les figures ordinaires du squelete le représentent. Elle est ainsi tournée pour répondre à la cavité articulaire de l'omoplate qui est située à proportion. Il faut encore avant que d'expliquer ce tour, faire disparoître une difficulté très-chimérique, qui néantmoins est ici la plus éblouissante, & cache, pour ainsi dire, celle qui mérite plus d'attention. Car en regardant ce tour, on est d'abord porté à croire que le mouvement des bras autour du centre de leur articulation avec les omoplates n'est que simple, uniforme & à peu-près semblable à celui des rayons de roue autour de l'essieu. Mais pour peu que l'on y fasse attention, sans même sçavoir l'anatomie, on voit bien que l'on ne pourroit faire ce mouvement uniforme sans tordre & déchirer les parties molles qui lient & soutiennent l'articulation. De plus il n'y a point d'organe pour accomplir un tel mouvement, quand même il seroit possible. Ainsi il ne faut pas encore le confondre avec celui d'une estrapade réelle qui dérange l'articulation & blesse considérablement les parties qui l'entourent.

Une vraie connoissance de la structure & de la mécanique de cette articulation & de ces parties dissipe entierement la fausse apparence que la vitesse du mouvement favorise, & elle découvre ce qui s'y passe réellement, de la maniere suivante.

L'un & l'autre bras n'a qu'un simple mouvement de rayon dans les trois quarts plus ou moins du cercle de ce tournoyement autour du centre de l'articulation, comme il est facile à chacun de voir, en portant le bras directement, successivement & lentement en haut, en devant, en bas & en arriere. Mais dans l'espace ou dans le tiers de cercle de la circonvolution qui reste à faire de derriere en haut, ce mouvement devient composé & comme triple. La colonne de l'os du bras, en parcourant cet espace en ce tiers de cercle, fait en même-temps deux petits mouvemens différens autour de son axe; car étant parvenue de devant par enbas en arriere par un simple mouvement de rayon de roue, elle commence là à se tourner peu-à-peu en maniere de pivot autour de son axe jusqu'à un certain degré où elle fait encore un petit tour de pivot à contre-sens pour revenir au simple mouvement de rayon. Ceux qui se laissent facilement emporter & éblouir par une seule nouveauté vraie ou fausse, ne songeroient pas à ces deux petits tours essentiels que la vitesse du mouvement dérobe à la vûe, & ils forgeroient là-dessus un système très-spécieux, quoique faux.

Après avoir découvert cette difficulté apparente, celle qu'on peut regarder comme réelle est le grand renversement des bras derriere les épaules & la tête. Un peu d'attention à ce que je vais dire, en facilitera l'explication. On sçait que plusieurs mouvemens du bras ne se font pas tant par son articulation avec l'omoplate que par les différentes attitudes changeantes de l'omoplate qui les favorisent. Cela est assez évident par l'inspection des épaules de ceux qui sont maigres, pendant qu'ils font différens tours de bras. Une longue habitude rend les articulations plus aisées, les ligamens plus souples & les muscles plus agissans, comme quantité d'exem-

78 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ples ordinaires le prouvent assez , sans parler des habitudes
forcées. Par dessus tout cela , le Venitien ayant l'avantage
de pouvoir reculer ses omoplates très-considérablement, il a
aussi plus de facilité à renverser ses bras. Il paroît même
qu'il ne recule pas les deux épaules dans le même-temps ,
mais l'une après l'autre , pour ne pas les froisser ou blesser
par leur rencontre. Il faut encore observer qu'il fait plusieurs
mouvemens préparatifs avant que d'en venir à celui d'estra-
pade , pour rendre les muscles & les ligamens souples , &
pour exprimer une quantité suffisante de la lymphe mucila-
gineuse qui arrose ces articulations , & les rend plus glissan-
tes.

Le mouvement de moulinet dépend de la même mécani-
que que celui d'estrapade : mais il est plus aisé quand il est
une fois en train , parce qu'il se fait par un seul bras & tout
de suite sans obstacle. Ce mouvement paroît aussi en quelque
maniere dans ceux qui tournent la fronde.

Je remets à la suite de ce Mémoire l'explication de plu-
sieurs autres phénomènes par rapport aux muscles coadju-
teurs des mouvemens qui ont paru dans ces tours du Veni-
tien. J'y joindrai mes remarques sur l'utilité qui en résulte ,
avec la découverte de la nouvelle espece de muscles que
j'ai annoncée dans le titre.

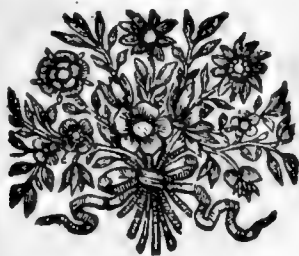


Fig. 2.



Fig. 4.



Fig 1



Fig 2



Fig 3



Fig 4



PROPOSITION ELEMENTAIRE SUR LES TRIANGLES.

Par M. DE BEAUFORT.

THÉOREME.

En tout triangle la somme des quarrés de deux côtés est égale à ^{24 Avril-} deux fois la somme des quarrés de la moitié du troisieme côté, ^{1723.} & de la ligne menée du milieu de ce côté à l'angle opposé.

DÉMONSTRATION.

SOIT le triangle ABC , dans lequel la ligne AD est Fig. 1.
menée de l'angle A au milieu D du côté BC : je dis que
la somme des quarrés de AB & AC est double de la somme
des quarrés de AD & CD .

Je distingue dans cette proposition trois cas que je vais
démontrer:

Le premier est, lorsque le côté AB est égal à la ligne AD . Fig. 2.

Le second, quand ce côté est plus grand. Fig. 3.

Le troisieme, quand il est plus petit. Fig. 4.

PRÉPARATION.

Ayant du centre A & du rayon AD décrit dans tous les
cas le cercle $DEHG$, & prolongé CA en G , & BA
en H .

On aura pour le premier cas $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$ Fig. 2.
 $+ EC \times 2AE + EC^2 = \overline{AD}^2 + EG \times CG = \overline{AD}^2$
 $+ DC \times CB = 2\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$.

On trouvera pour le second cas $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AF}^2$ Fig. 3.

$$\begin{aligned}
 &+ \overline{FB} \times \overline{2AF} + \overline{FB} + \overline{AE} + \overline{EC} \times \overline{2AE} + \overline{EC} \\
 &= \overline{2AD} + \overline{DB} \times \overline{BK} + \overline{DC} \times \overline{CK} = \overline{2AD} + \overline{DC} \times \overline{CB} \\
 &= \overline{2AD} + \overline{2DC}.
 \end{aligned}$$

Fig. 4.

Dans le troisieme cas, on voit aussi que $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} \times \overline{2AE} + \overline{EC} + \overline{AF} - \overline{BF} \times \overline{2AF} - \overline{FB} = \overline{2AD} + \overline{DC} \times \overline{KC} - \overline{DB} \times \overline{KB} = \overline{2AD} + \overline{DC} \times \overline{CB} = \overline{2AD} + \overline{2DC}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

Fig. 5.

Lorsque le côté AB est égal au côté AC , la ligne AD est perpendiculaire au côté BC , & la démonstration qui se trouve la même en devient plus aisée, & fournit un moyen facile de prouver la propriété du triangle rectangle, comme on le voit dans le Corollaire suivant.

COROLLAIRE.

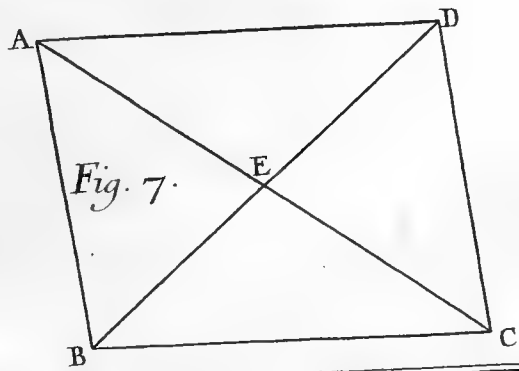
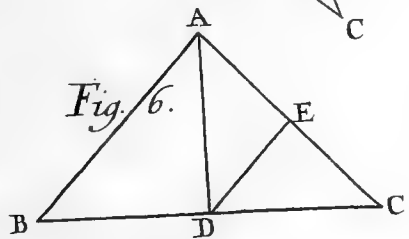
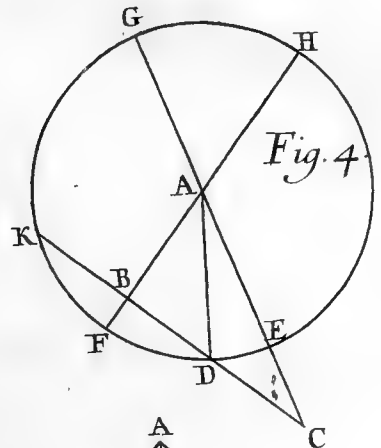
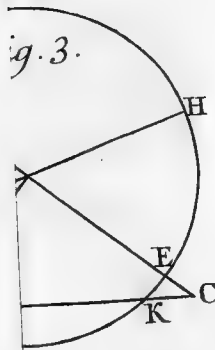
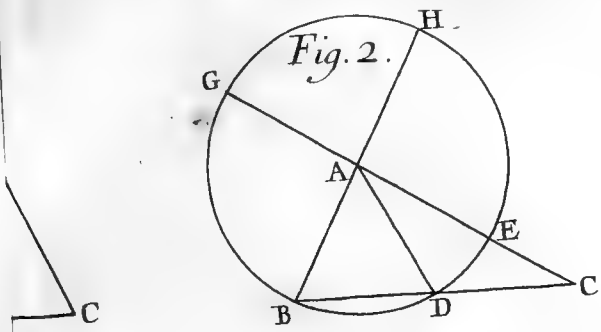
Fig. 6.

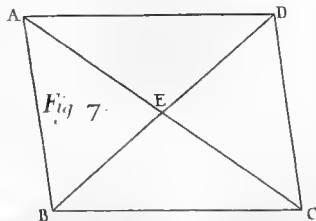
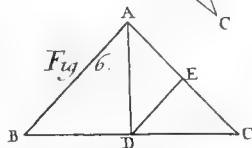
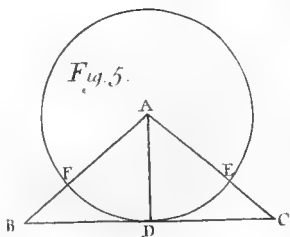
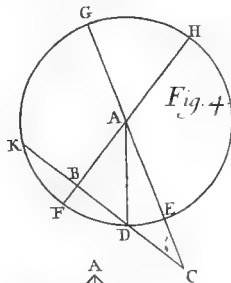
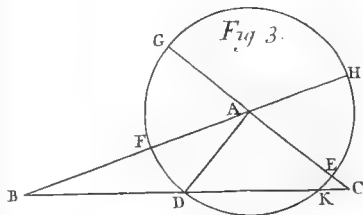
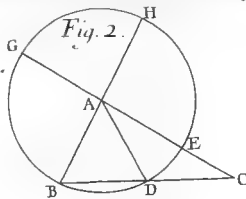
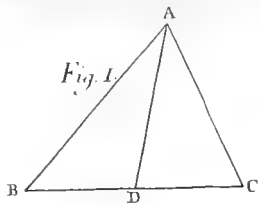
Dans le triangle isoscele ABC on a $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{2AD} + \overline{2DC}$, donc dans le triangle ADC rectangle $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$. On prouvera la même chose en menant DE qui coupe AC en deux également, ce qui donnera selon le théorème $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{2DE} + \overline{2CE} = \overline{4CE} = \overline{AC}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

J'ai évité de me servir dans cette démonstration de la propriété du triangle rectangle que je voulois déduire de la propriété générale que je viens de prouver dans tous les triangles.

Voici encore un Corollaire qui se tire du théorème, & que je mets ici par l'utilité dont il peut être. M. de Lagny s'en





s'en est servi pour trouver l'angle que font les asymptotes de l'hyperbole qui donne les logarithmes ordinaires. On en peut voir la démonstration qu'il a donnée page 319. des Mémoires de l'Académie de l'année 1706.

C O R O L L A I R E.

La somme des quarrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des quarrés des diagonales.

Dans le parallélogramme $ABCD$, on voit que $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$ & $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{CE}^2 + 2\overline{BE}^2$. Donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{AC}^2$. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 7.

E X P E R I E N C E S

Qui montrent avec quelle facilité le FER & l'ACIER s'aimantent, même sans toucher l'AIMANT.

Par M. DE REAUMUR.

C'EST ceux qui ont le plus travaillé sur l'aimant, regardent le fer comme une espèce d'aimant imparfait. Il tient à bien peu qu'il n'en ait les propriétés, puisqu'un simple & presque instantané contact de cette pierre les lui communique ; il les acquiert même seul sans toucher l'aimant. Les fameuses croix des clochers d'Aix & de Chartres ont assez appris qu'exposé à l'air pendant une longue suite d'années, il semble se convertir en véritable aimant. Mais il ne lui faut pas un temps considérable pour en prendre plus faiblement les vertus ; une barre de fer posée verticalement a bien-tôt deux poles comme l'aimant, dont l'un attire une des pointes de l'aiguille aimantée, & dont l'autre repousse la même pointe : on sçait qu'on peut trouver dans chaque

Mem. 1723.

L

23 Fevr.
1723.

cheminée de quoi faire cette expérience; les pincettes y sont propres, pourvû qu'on ait l'attention de ne les pas renverser de haut embas. M. Rohault rapporte qu'ayant fait rougir un morceau d'acier long & délié, & l'ayant ensuite trempé en le tenant perpendiculaire à l'horison, il a trouvé à chacun de ses bouts la vertu d'un des poles de l'aimant, jointe à celle d'attirer assez bien la limaille de fer.

Le fer & l'acier sont ici pour nous la même chose. Il y a une façon dont ils s'aimantent beaucoup plus sûre & plus commune que la précédente, & cependant plus connue des ouvriers en fer que des physiciens. Dans les boutiques des Serruriers, des Couteliers, des Taillandiers, on ne voit qu'outils aimantés; presque tous ceux dont ces ouvriers se servent pour couper ou percer le fer à froid, comme ciseaux, forets, poinçons, se chargent de limaille de fer dès qu'on les en approche, il y en a même qui enlèvent aussi-bien de petits clouds qu'ils le feroient si on les eût fait toucher par un aimant médiocre; les limes même se trouvent souvent aimantées: en un mot, cela est propre à tous les ouvrages qui entament le fer.

Quelque commune que soit cette maniere dont l'acier s'aimante, je ne sçache point que les physiciens l'aient encore examinée. En général on étudie trop la physique dans son cabinet. Elle m'a paru meriter attention, & m'a insensiblement engagé à faire diverses expériences que je rapporterai dans ce Mémoire. Tout ce qui a rapport aux propriétés de l'aimant, nous offre des faits surprenans: mais le nombre de tant de faits connus ne doit pas nous faire négliger ceux qui se présentent de nouveau. Plus nous en rassemblons, & plus nous serons en état de rendre raison de ceux que nous sçavons déjà, ou de juger si les explications que nous en donnions sont les véritables.

J'ai commencé par examiner si les outils dont je viens de parler, tiennent leur propriété d'attirer le fer du fer, même qu'ils ont coupé ou percé, ou s'ils ne la doivent point à la trempe. J'en ai fait forger de différentes especes & de diffé-

rentes grandeurs en chaque espece ; je les ai fait tremper, & j'ai essayé si immédiatement après la trempe ils étoient en état d'attirer la limaille. Je n'en ai trouvé aucun à qui elle eût donné cette propriété, au moins sensiblement ; à peine enai-je vu qui enlevassent un grain de limaille ou deux, & peut-être eussent-ils fait davantage avant d'être trempés.

L'expérience de M. Rohault déjà citée, m'a même engagé de répéter celles-ci plusieurs fois, & cela, parce qu'outre les poles qu'il a reconnus à la verge d'acier qu'il a trempée verticalement, il lui a trouvé la vertu d'attirer une quantité de limaille de fer assez considérable. J'ai pourtant eu beau tremper l'acier dans les circonstances qu'il décrit, je n'ai jamais vu que la trempe lui ait donné aucune vertu d'attirer sensiblement. Je ne doute pas néanmoins que le morceau d'acier dont il a parlé, n'eût la propriété qu'il lui a attribuée : mais apparemment que ce n'étoit pas de la trempe qu'il la tenoit. Nous verrons dans la suite bien des circonstances qui auroient pû la lui donner, auxquelles apparemment M. Rohault n'aura pas pris garde.

Il est donc sûr que les outils d'acier qui viennent d'être trempés, n'ont nullement la vertu d'attirer le fer : mais il ne faut qu'un instant pour la leur donner. Qu'on prenne un ciseau ou un poinçon au sortir de la trempe, qu'on pose le taillant de l'un ou la pointe de l'autre sur un morceau de fer, n'importe sous quelle inclinaison, & qu'on donne ensuite un coup de marteau sur l'autre bout de l'outil, en voilà assez, on a aimanté sa pointe ou son taillant ; qu'on présente cette pointe ou ce taillant à de la limaille, elle l'attirera, elle s'en hérifiera. Il a suffi à l'outil de couper le fer pour prendre la vertu de l'attirer. Après le premier coup de marteau, cette vertu est encore foible ; on l'augmente si on applique une seconde fois la pointe de l'outil sur un morceau de fer, & qu'on frappe sur l'autre bout une seconde fois. Cette opération simple, répétée un nombre de fois, ajoutera toujours à la nouvelle force attractive : mais il y a un terme par de-là lequel on répéteroit inutilement l'opération, la vertu de

l'outil n'y gagneroit plus rien. Ceux dont on s'est servi pendant plusieurs mois ne sont pas plus forts que ceux dont on ne s'est servi que pendant un jour, & même que ceux dont on ne s'est servi que pendant quelques quarts d'heure.

Il y a pourtant diverses circonstances qui contribuent à augmenter cette force : mais avant de les rapporter, cherchons quelle est la cause de cet effet singulier ; pourquoi un morceau de fer, qui n'a sensiblement aucune des propriétés de l'aimant, aimante néanmoins l'acier par qui il est percé ou coupé, aussi-bien que le pourroit faire un aimant foible ? Les expériences qui me restent à rapporter, seront peut-être plus naturellement placées à la suite des conjectures que j'ai à proposer sur la cause de cet effet, elles pourront servir à les appuyer.

Je suppose qu'on ne sçauroit douter que la vertu attractive de l'aimant ou du fer aimanté ne dépende de la matiere magnétique qui circule dans l'aimant & autour de l'aimant, & de même dans le fer & autour du fer aimanté. Ceux qui raisonnent sur des idées claires, ne me le contesteront pas. Au reste je ne m'embarrasse à présent ni de la figure de cette matiere, ni d'examiner si elle entre par un des poles, & sort par l'autre, ou si elle entre par l'un & par l'autre, ni comment cette matiere attire, si c'est en chassant le fluide qui est entre le fer & l'aimant, ou simplement en poussant le fer. Toutes ces questions regardent un traité général de l'aimant, que je n'ai ici en vûe en aucune sorte. Il suffit qu'on m'accorde que la vertu attractive de l'aimant est l'effet des tourbillons de matiere magnétique qui circulent dedans & autour de cette pierre ; que le fer quand il s'aimante, acquiert de pareils tourbillons ; & que de-là il suit que, toutes choses d'ailleurs égales, plus la quantité de matiere qui compose un tourbillon devient grande, & plus la vertu attractive devient forte.

Je fais encore une autre supposition, qui ne m'est pas moins nécessaire que la précédente. Je demande à présent qu'on me l'accorde ; peut-être ferai-je voir qu'on ne m'aura rien accor-

dé de trop, que je pouvois même demander davantage. Cette seconde supposition est que le fer dans lequel les propriétés de l'aimant ne se manifestent point, est cependant actuellement rempli de matiere magnétique qui y circule, & qui peut-être y est en quelque sorte emprisonnée; je veux dire que dans l'intérieur de tout fer il y a actuellement de la matiere magnétique qui y forme une infinité de petits tourbillons différens qui ont chacun leurs poles particuliers, & que la plûtpart des passages, par où cette matiere pourroit s'échâper, sont peut-être bouchés.

Cette seconde supposition admise, rien n'est plus aisé que de comprendre comment un outil d'acier s'aimante, lorsqu'il perce un morceau de fer. Dans l'instant que le coup de marteau tombe sur l'outil, la pointe de cet outil presse les parties du fer, elle les sépare les unes des autres, & continue de presser les parties séparées: les tourbillons qui se trouvoient dans le chemin qui a été ouvert, sont donc dérangés; ceux même qui se trouvoient entre les parties du fer qui se sont rapprochées sont alors trop comprimés: la matiere de ces tourbillons est donc forcée de prendre d'autres directions; sçavoir, celles où elle trouve moins de résistance; & ce sont sans doute celles qui la conduisent à enfilier l'outil d'acier; ses parties plus dures, plus roides que celles du fer, n'ont point, ou ont été très-peu comprimées, pendant que les autres l'ont été considérablement. Qu'on se souviene aussi que nous avons démontré ailleurs que les parties de l'acier trempé sont plus écartées les unes des autres que celles de l'acier non trempé. La matiere magnétique a donc plus de facilité à entrer dans l'acier qu'à continuer à circuler dans le fer, ou peut-être même se trouvoit-elle déjà gênée à décrire de trop petits tourbillons, elle s'y ouvre de nouveaux passages, ou aggrandit ceux qui y étoient déjà; & toute cette matiere tendant à prendre la même route, l'acier se trouve dans le même cas où il seroit, si on l'eût appliqué contre un des poles d'un aimant foible.

Si on répète l'opération, on augmente la vertu attractive.

de l'outil ; de nouvelle matiere sera forcée à pénétrer : elle s'ouvrira de nouveaux chemins , ou elle aggrandira ceux qui étoient ouverts ; la circulation de la matiere magnétique se fera plus librement , ou , ce qui est la même chose , plus abondamment dans l'acier , par conséquent sa vertu d'attirer sera augmentée. Mais après qu'on aura répété cette opération un certain nombre de fois , on ne doit plus trouver d'accroissement dans la force attractive de l'Acier. La pointe a beau percer de nouveau fer , elle a beau rompre de nouveaux tourbillons , forcer de nouvelle matiere magnetique à sortir, cette matiere trouve assez de passages tout formés dans l'acier , sans avoir besoin de s'en faire de nouveaux : elle a plus de facilité à suivre les premiers qu'à s'en ouvrir d'autres.

Ces faits , ce me semble , se déduisent très naturellement de notre seconde supposition ; si on avoit cependant quelque peine à admettre , que la pression que souffrent les parties voisines de l'outil qui coupe ou perce le fer , suffit pour déranger des tourbillons que nous avons supposé entre ses parties , cette difficulté pourroit être levée par une expérience déjà connue , & que j'ai répétée bien des fois. L'existence des tourbillons magnétiques est incontestable dans l'acier aimanté ; qu'on donne quatre à cinq coups de marteau , même assez légers , sur l'acier qui s'est aimanté en coupant le fer , ou en touchant quelque aimant foible , on lui ôte toute , ou presque toute sa vertu attractive : ces coups ont donc la force de détruire les tourbillons de matiere magnétique , quoiqu'ils pressent peut-être beaucoup moins les parties du fer sur lesquelles ils tombent , que le ciseau ne presse les parties qui s'opposent à son action.

Mais la supposition que nous avons faite des tourbillons de matiere magnétique emprisonnée en quelque sorte dans le fer même , paroitra peut être une difficulté considérable contre notre explication. Ce métal ne semble pas propre à s'opposer au cours de la matiere magnétique ; cette matiere qui le pénètre si aisément , peut-elle y être en quelque sorte emprisonnée ? Il est vrai que des torrens de matiere magné-

tique, tels qu'en fournit l'aimant, peuvent sur le champ s'ouvrir des passages dans le fer, mais lorsque cette matiere coule moins rapidement, ce n'est qu'à la longue qu'elle aimante du fer au point nécessaire, pour le mettre en état d'attirer d'autre fer. Les obstacles qui sont forcés par des torrens, résistent à des ruisseaux; les parties de fer opposent des résistances au passage de la matiere magnétique, qui ne peuvent être vaincus qu'après un temps considérable, lorsque les courans de cette matiere sont foibles. Ce que nous disons de la matiere qui tend à entrer dans le fer, nous le pouvons dire de celle qui tend à en sortir; le fer aimanté perd sa vertu attractive d'une infinité de manieres différentes. Quand il la perd, les passages qui donnoient entrée à la matiere, se bouchent; ces passages attendent-ils à se boucher, que toute la matiere qu'il contenoit fût sortie? La sortie n'est-elle pas fermée à celle-ci, quand l'entrée est fermée à l'autre? Les coups de marteau, par exemple, qui sur le champ font perdre au fer la vertu d'attirer, étrécissent ou bouchent sur le champ les ouvertures par où cette matiere magnétique couloit librement.

Enfin quoiqu'il puisse se faire que de petits tourbillons, des tourbillons foibles de matiere magnétique se trouvent renfermés dans le fer, on regardera sans doute l'existence de ces tourbillons comme prise gratuitement, & seulement en faveur du phénomène que nous avons voulu expliquer. Dès qu'elle y satisfait, & qu'il n'y a nul inconvénient à l'admettre, c'en seroit assez en bonne physique pour la recevoir: mais les expériences que nous rapporterons dans la suite, concourront à bien établir l'existence de ces petits tourbillons. Pour expliquer même dès-à-présent l'idée que ces expériences m'ont donnée du fer, je dirai que je le regarde comme un aimant imparfait, & cela, non-seulement parce qu'il a de la disposition à prendre les propriétés de l'aimant, mais je le regarde principalement comme tel, en ce qu'il est continuellement pénétré d'une grande quantité de matiere magnétique. Peut-être en a-t-il moins que l'aimant, c'est ce que

j'ignore : mais je crois qu'il en a une quantité très-considérable. Je ne veux pas seulement parler des petits tourbillons de matiere magnétique que j'ai supposé circuler dans l'intérieur du fer, je lui en crois d'autres qui entrent continuellement dans sa substance, qui ensuite en sortent ; en un mot, je lui crois, comme à l'aimant, une atmosphère, mais moins étendue. Si on me demande pourquoi le fer, avec cette abondance de matiere magnétique, ne produit pas les effets de l'aimant ? C'est qu'il manque de poles aussi-bien déterminés que ceux de l'aimant. C'est de ces poles que l'aimant tire sa force, c'est par eux que passe la plus grande partie de la matiere qui y circule ; il ne peut presque rien vers son équateur pendant que ses poles soutiennent des poids considérables. Un aimant dont les poles seront mieux marqués que ceux d'un autre, aura plus de force, quoique la même quantité de matiere magnétique circule dans l'un & dans l'autre. Si donc on conçoit que le fer est, pour ainsi dire, un aimant brouillé, un assemblage d'une infinité de petits aimants, qu'il ressemble à une masse de poudre d'aimant ; en un mot, que le fer a presque par-tout des poles insensibles, il sera aisé de concevoir que quoiqu'il se fasse autour de ce métal & dans son intérieur une grande circulation de matiere magnétique, qu'il n'en doit pas avoir plus de force attractive, parce que les tourbillons, les courans ne concourent pas vers le même endroit.

Je fis, sans le chercher, l'expérience qui m'a donné cette idée du fer. Pendant que j'éprouvois jusques à quel point on pouvoit aimer des outils d'acier, en leur faisant couper ou percer ce métal, j'étois proche d'une enclume, sur laquelle je posois les petits morceaux de fer avec lesquels j'essayois la force de mes aciers aimantés. Je mis sur ma main un des morceaux de fer qui venoit d'être attiré, étant sur l'enclume ; l'acier aimanté n'eut plus la force d'enlever ce fer, lorsqu'il fut sur ma main ; il ne put même se charger d'un morceau beaucoup plus léger. Je posai les morceaux que je voulois faire attirer sur d'autres corps, comme sur du bois,

sur

sur du papier, l'outil n'eut pas plus de prise sur eux que lorsqu'ils étoient dans ma main : mais aussi-tôt qu'ils eurent été remis sur l'enclume, l'acier enleva le plus gros des morceaux avec autant de facilité qu'il l'avoit fait auparavant. La même expérience répétée & variée ensuite de diverses façons, m'a donc fait voir que l'acier aimanté avoit plus de force pour attirer le fer posé sur d'autre fer, que pour attirer le même fer, lorsqu'il est posé sur tout autre corps. J'ai trouvé même que cette différence de force alloit quelquefois si loin, que la force étoit triple ou quadruple dans les circonstances avantageuses de ce qu'elle étoit dans les autres. J'ai en même-temps fait une autre remarque sur ces expériences, qui me paroît également digne d'attention ; c'est que l'acier aimanté non seulement attire plus pesant, lorsque le fer, qu'on lui donne à attirer est posé sur du fer ; mais que sa vigueur encore est d'autant plus augmentée, que la piece de fer qui sert de support à celui que l'on veut qui soit attiré, est plus grosse. Ce que l'acier aimanté a enlevé de dessus une enclume, il ne l'enleve pas de dessus une barre de fer qui est plate. De déterminer en quelle proportion cette force diminue par rapport à l'épaisseur du support, c'est ce que je n'ai pas fait, & qui n'est peut-être pas aisé à faire d'une maniere bien certaine : mais j'ai vu souvent que le fer qui étoit enlevé de dessus l'enclume, pesoit plus du double de celui qui étoit enlevé de dessus une barre ordinaire.

Ces expériences nous découvrent clairement une circulation de matière magnétique qui se fait autour du fer ; elles forcent à reconnoître que ce métal a comme l'aimant un atmosphere ; car sans ces tourbillons, sans cet atmosphere, il ne paroît pas qu'on puisse rendre de raison probable de l'augmentation de force qui survient au fer aimanté, & ces tourbillons, cet atmosphere étant accordés au fer, non seulement ce phénomène s'en déduit naturellement, il s'ensuit même nécessairement. Pour en être convaincu, il ne faut que se rappeler une expérience connue depuis long-temps ; sçavoir, que si on éprouve ce que peut porter, un morceau de

fer ou d'acier aimanté , & qu'ensuite on l'approche d'un aimant , jusqu'à faire entrer au moins un de ses bouts dans l'atmosphère de cet aimant , si on essaye alors sa force , on la trouvera beaucoup plus considérable qu'elle n'étoit auparavant ; il soutiendra un poids plus pesant : mais pour peu qu'on le retire de cet atmosphère , il ne lui restera plus que sa première force ; le poids dont il s'étoit chargé sera trop lourd , il le laissera tomber. De même un aimant foible mis dans le tourbillon d'un aimant plus fort , y acquiert de la force , qu'il ne conserve qu'autant qu'il reste dans cet atmosphère ; c'est même une des singularités de l'aimant que M. Descartes a expliquées.

La cause de ces derniers effets n'est point équivoque ; on ne peut absolument l'attribuer qu'à la matière magnétique qui circule autour de l'aimant ; une partie de cette matière se détourne ; elle prend sa route vers le fer aimanté , ou vers l'aimant le plus foible ; plus de matière magnétique les pénètre alors , ou , ce qui est la même chose , leur force attractive est augmentée.

L'augmentation de force qui se fait dans le fer ou l'acier aimanté , lorsque le fer qu'on lui veut faire attirer est posé lui-même sur d'autre fer , ne paroît être qu'un cas de l'expérience précédente. Si l'acier devient plus fort , c'est que la quantité de la matière magnétique qui circule autour de lui est augmentée. Or d'où vient cette nouvelle matière ? qui la fournit ? C'est sans doute le fer qui sert de support. On en doit donc conclure que ce fer a comme l'aimant un atmosphère de matière magnétique.

Une circonstance de cette expérience , dont nous n'avons pas encore parlé , contribue à établir cet atmosphère. C'est que si on éloigne un peu de l'enclume le fer aimanté qui s'y est chargé de ce qu'il pouvoit porter , aussi-tôt il devient trop foible , il laisse tomber son fardeau. La parité alors est entière entre cet acier & celui qu'on éloigne du tourbillon d'un aimant où on l'avoit placé. Qu'on ne croie pas que le mouvement qu'on donne à cet acier , en l'élevant ,

contribue à lui faire abandonner ce poids ; si on l'agite même beaucoup davantage en le transportant à fleur de l'enclume, il le conservera toujours.

Si l'acier ou le fer aimanté porte beaucoup plus pèsant quand il est proche d'une grosse masse de fer, que quand il est auprès d'une barre ; c'est donc que la grosse masse a un atmosphère qui fournit davantage de matière magnétique.

Dès qu'il sera établi qu'il se fait autour de tout fer & dedans tout fer une circulation de matière magnétique ; mais que cette matière est partagée en une infinité de petits tourbillons qui ont des pôles différens ; il paroîtra moins merveilleux que l'attouchement presque instantanée d'une pierre d'aimant mette le fer en état d'attirer d'autre fer. Les torrens qui sortent de la pierre ouvrent des routes dans une certaine direction, qui est celle du cours de ces torrens ; & ces routes une fois ouvertes, la matière même qui circuloit autour du fer, les enfle. Il avoit de son propre fonds assez de cette matière, il n'étoit question que de la réunir, que de la diriger, que de la mettre en état de concourir à produire le même effet.

Mais ce sont les seuls tourbillons de matière magnétique renfermés dans l'intérieur du fer que nous avons fait agir sur les outils d'acier qui percent ou coupent le métal. Nous avons dit que la violence qu'on leur fait, que la force qui les comprime, les contraint à prendre d'autres directions, & que la plus commode, la plus facile, celle qui offre, pour ainsi dire, une pente plus naturelle, est au travers de l'acier qui n'a point été comprimé comme le fer. En raisonnant sur cette explication, il m'a paru que si elle étoit juste, nous devions avoir encore un moyen d'aimer le fer ou l'acier sans lui faire toucher l'aimant, ni couper d'autre fer. Puisqu'elle suppose le fer pénétré de tourbillons de matière magnétique qui peuvent être comprimés & forcés à prendre d'autres directions lorsqu'on les presse, il s'ensuit que si on fait violence aux tourbillons, on les forcera à se réunir. Or

dès qu'on pliera & repliera plusieurs fois un morceau de fer dans le même endroit avant de l'y casser, on contraindra les tourbillons qui se trouveront en cet endroit à se réunir avec des tourbillons voisins, & par conséquent on donnera à ce même endroit une vertu attractive. Pour voir si l'expérience s'accommoderoit avec cette conséquence, j'ai pris un morceau de fenton de fer de Berry, c'est-à-dire, de fer très-doux, je l'ai ferré dans un étau à quatre à cinq pouces d'un de ses bouts; prenant ensuite à deux mains le bout le plus long, qui étoit au-dessus de l'étau, je l'ai plié & replié différentes fois dans le même endroit, & enfin il s'y est cassé: mais comme il étoit très-doux, ce n'a été qu'après avoir bien eu la torture. Aussi-tôt qu'il a été cassé, j'ai présenté la cassure de chaque bout à de la limaille de fer, & j'ai vu avec plaisir qu'elles s'en sont entièrement couvertes: elles en eussent moins attiré si elles n'eussent touché qu'un aimant foible.

Je ne m'en suis pas tenu à cette première expérience; j'ai cru même la devoir varier de bien des manières. J'ai fait des épreuves pareilles sur des barres très-grosses, & sur du fil de fer assez fin, sur du fer doux & sur du fer cassant, sur de l'acier trempé & sur de l'acier non trempé. Voici ce que ces nouveaux essais m'ont appris de plus remarquable. Toutes choses d'ailleurs égales, plus le fer qu'on a cassé est doux, plus il est fibreux, plus il s'est laissé tourmenter avant de se casser, & plus vigoureusement se trouve-t-il aimanté dans ses cassures. Les pressions réitérées plus de fois forcent une plus grande quantité de matière magnétique à prendre les mêmes routes; la matière en est, pour ainsi dire, mieux exprimée de certains endroits; elle est toute chassée vers d'autres. Le fer à lames, le fer cassant, s'aimante plus faiblement: mais l'acier trempé s'aimante encore moins. Pour l'acier non trempé, l'acier recuit, il s'aimante plus ou moins, selon qu'il est plus ou moins doux. Enfin en général je n'ai point trouvé de fer dont la cassure n'attirât au moins quelques grains de limaille, si on l'essaye dans l'instant qu'elle vient d'être faite; j'ajoute cette dernière circonstance, parce

que la vertu attractive s'affoiblit peu-à-peu , & quelquefois ne dure pas plus d'un jour.

Selon la grosseur , la figure , la longueur des morceaux de fer , on trouve aussi différens degrés de force attractive dans les cassures. Cette vertu n'est presque pas sensible dans du fil de fer de la grosseur des aiguilles ordinaires à tricoter ; elle n'augmente pas pourtant proportionnellement à la grosseur des barres : plus une barre est grosse , & moins elle se laisse plier de fois avant de se casser. Du fer en lame , & sur-tout du fil de fer , appelé *fil de fer à Chaudronnier* , choisi de la grosseur du petit doigt , sont les fers qui donnent les cassures les mieux aimantées. Ce qui est sur-tout essentiel , c'est que le morceau de fer qu'on casse ait une certaine longueur , sans quoi on ne trouvera aucun effet sensible. Un exemple seul conduira sur cet article. Si on prend un fil de fer à Chaudronnier long d'un pied , qu'on le casse à peu-près au milieu , les deux bouts formés par la cassure attireront bien la limaille. Si au contraire on casse un pareil fil de fer à un pouce ou deux d'un de ses bouts , la cassure du petit morceau n'attirera point du tout la limaille , pendant que la partie du long bout qui tenoit à ce petit morceau attirera la limaille très-vivement.

Au reste il est à remarquer que ce n'est précisément que le bout fait par la cassure qui s'aimante , que l'autre n'est nullement aimanté. En suivant le même raisonnement qui m'avoit conduit à soupçonner que ce bout cassé , après avoir soutenu plusieurs tortures , auroit une vertu attractive , j'ai cru en devoir conclurre qu'on pouvoit fortifier cette vertu , & cela en pliant & repliant le fer en divers endroits pris à diverses distances de ce bout ; que c'étoit un moyen de forcer de nouvelle matiere magnétique à se diriger vers ce bout. Pour m'assurer si les faits s'accommoderoient encore avec des conséquences si nécessaires de l'hypothese , que tout jusques ici a paru établir , j'ai choisi un fil de fer , gros environ comme le petit doigt , & long de près de deux pieds & demi. Après l'avoir serré dans l'étau , je l'ai plié & replié dans le

même endroit à diverses reprises, & l'a enfin cassé dans cet endroit, qui étoit éloigné d'à-peu-près cinq pouces d'une des extrémités du fil. Par cette division j'ai donc eu deux brins de fil, l'un long d'environ cinq pouces, & l'autre d'environ deux pieds & un pouce. L'un & l'autre de ces brins s'étoient bien aimantés à leur cassure, aussi étoient-ils d'un fer très-doux. Les bouts de chaque brin qui avoient été faits par la cassure, enlevoient de dessus l'enclume un de ces petits clouds appelés *broquettes*, mais de la plus petite.

Le plus long des deux brins étoit celui que j'avois destiné pour suivre mon expérience; je le ferrai dans l'étau environ un pouce & demi au-dessus du bout aimanté; alors je le pliai & repliai proche de cet endroit plusieurs fois, mais sans le casser. Après l'avoir tiré de l'étau, j'essayai si sa vertu attractive avoit été augmentée, & il me parut qu'elle l'étoit. Je répétai la même manœuvre pour m'assurer de cette augmentation, & pour voir jusqu'où elle iroit, c'est-à-dire, que je ferrai le fil de fer un peu au-dessus de l'endroit où je l'avois tourmenté, & je continuai de même à le plier & replier en huit endroits différens, qui tous étoient entre le bout aimanté & le milieu du fil. Après les nouvelles tortures données à un nouvel endroit du fer, j'éprouvois s'il s'étoit fait quelque augmentation dans la force attractive; il me parut qu'il n'y en avoit point eu qui n'y eût ajouté: mais l'effet de toutes ces opérations ensemble n'étoit pas équivoque; elles mirent le bout aimanté en état d'enlever quatre clouds, égaux chacun à celui qu'il portoit immédiatement après qu'il avoit été cassé.

Pour suivre cette expérience, & pour voir jusqu'où pourroit aller cette augmentation de force, je continuai à plier & replier mon fil de fer en différens endroits: je le pliai d'abord vers le milieu; ce fut ensuite entre le milieu & le bout non aimanté. Les effets qui arriverent alors, n'en paroîtront peut-être pas moins singuliers pour n'avoir pas été de ceux que j'avois prévus. Les nouvelles tortures que je donnai à mon fil, ne fortifierent point le bout aimanté; il

me semble même qu'elles l'avoient affoibli , & l'opération répétée un peu plus loin , m'en convainquit ; je ne pûs plus douter que le bout aimanté ne se fût affoibli. J'essayai aussitôt si le second bout n'avoit point gagné ce que le premier avoit perdu , & je trouvai effectivement que ce second bout commençoit à enlever la limaille , ce qu'il n'avoit fait en aucune façon pendant que le premier étoit dans toute sa vigueur. Je continuai à tourmenter mon fer en différens endroits , dont le dernier étoit toujours le plus proche du second bout , & je vis qu'à mesure que je multipliois ces opérations , sa force attractive augmentoit aux dépens de celle du premier bout. Il en acquit assez pour enlever les quatre clouds , & à peine en resta-t-il à l'autre suffisamment pour se charger de quelques grains de limaille.

Cette expérience nous apprend une nouvelle maniere d'aimer le fer , au moins aussi singuliere que les précédentes , & même de l'aimer mieux , pourvû que ce fer soit liant , & qu'il soit sous une forme qui permette de le plier avec quelque facilité. Il n'en est point qui y soit plus propre que celle du fil de fer. Mais la même expérience fait voir que pour le bien aimer , il faut que toutes les inflexions qu'on lui donne se trouvent plus proches d'un de ses bouts que de l'autre. Il n'est pas trop aisé d'expliquer pourquoi , lorsque ces inflexions s'éloignent du milieu , elles déterminent la matiere magnétique à prendre plutôt sa route vers le bout le plus proche que vers celui qui est déjà aimanté : vers le côté aimanté elle semble devoir trouver des chemins tous ouverts , mais plus longs. Est-ce que la longueur du chemin est pour elle une plus grande résistance à vaincre que celle qu'elle trouve à s'ouvrir de nouveaux chemins ? Il s'ensuivroit de-là que la matiere magnétique a continuellement des obstacles à surmonter pendant qu'elle se meut dans le fer. Si on suppose, avec la plupart des Physiciens , que les canaux par où elle coule sont hérissés de poils ; que la force nécessaire pour se faire passage a été celle qu'il lui a fallu employer pour les coucher ; la force dont elle a besoin pendant sa

circulation est celle qui est nécessaire pour tenir ces mêmes poils couchés ; ils sont sans doute de même nature que le fer dont ils font partie , ou dont ils ne sont que des parties plus fines : ils ont par conséquent du ressort , & ce ressort tend à leur faire reprendre des positions différentes de celles où la matiere magnétique les a mises. Dès que la matiere magnétique s'est ouverte passage vers le second bout du fil de fer , ce passage peut suffire & pour cette matiere & pour une partie de celle qui passoit par l'autre bout. Dans le fer aimanté les passages les derniers ouverts sont toujours les plus libres. La preuve en est que peu à peu ces passages se ferment à la matiere magnétique , puisqu'une force d'attirer très-sensible , ou , ce qui est la même chose , une circulation sensible est quelquefois détruite en moins de vingt-quatre heures , comme nous l'avons dit ci-dessus.

J'ai voulu voir ce qui arriveroit à un fil de fer qu'on tourmenteroit d'abord par son milieu , & ensuite à des distances égales de part & d'autre de ce milieu. Les plis & replis faits au milieu , & à des endroits qui n'en étoient pas éloignés , n'ont pas donné de vertu attractive sensible aux bouts : mais quand j'ai replié ce fer environ au tiers ou au quart de la distance qui est entre ce milieu & chaque bout , alors l'un & l'autre bout se sont aimantés , mais bien plus foiblement que si tous les plis & replis eussent été faits d'un seul côté ; ils ne portoit pas chacun le tiers ou le quart de ce qu'un des bouts eût porté s'il eût eu seul la force d'attirer.

Il est certain que si , après avoir plié le fer à plusieurs reprises entre un des bouts & le milieu , on le plie par de-là le milieu , on diminue le degré de force qu'on avoit donné au bout le plus proche des premiers plis : mais je n'ai pas toujours trouvé la même diminution , & il ne m'est pas toujours arrivé , comme dans la premiere expérience , de faire passer toute la force d'un bout dans l'autre.

Si peu de chose suffit pour donner au fer la vertu d'attirer , peu de chose aussi la lui peut faire perdre. Nous avons vu que des inflexions en sens contraire , faites d'un pouce
&

& demi, où de deux pouces en deux pouces, ont augmenté la force attractive d'un fil de fer, gros comme le petit doigt. Si après avoir donné un certain degré à cette force, on veut multiplier les inflexions, quoiqu'on les fasse entre le milieu & le bout aimanté, on affoiblit la force de ce bout; on parvient même presque à la détruire, en les multipliant jusqu'à un certain point. Trop de plis réitérés rétrécissent à la fin les passages, le cours de la matiere magnétique n'est plus assez libre. Le Pere Grimaldi avoit déjà observé aussi qu'un fil de fer aimanté par un véritable aimant, perd sa vertu magnétique, si on lui fait souffrir des inflexions réitérées, ou des frottemens continus. Enfin nous avons dit ci-dessus, que quelques coups de marteau ôtent à un outill la vertu d'attirer qu'il a acquise en coupant le fer; ils la font perdre de même au fer qui tient cette vertu des inflexions. Trop d'inflexions produisent à la fin l'effet des coups de marteau.

On ne doit pas s'attendre à aimanter un fil de fer, en le frappant à coups de marteau; ils forcent à la vérité la matiere à refluer: mais ils ne lui laissent aucune place commode où elle puisse se loger, tout ce qui se trouve sous le marteau est à peu-près également comprimé. Il n'en arrive pas de même au fer qui n'est plié qu'un certain nombre de fois, pendant les inflexions: certaines fibres sont moins distendues que les autres, elles restent plus au large. Mais il y a pourtant une maniere d'aimanter le fer à coups de marteau, quoique assez foiblement: si on ne le pouvoit point du tout, ce feroit une objection considérable contre l'explication dont nous avons fait usage jusqu'ici. Le fil de fer ne peut être aimanté, parce que toutes ses fibres sont pressées en même-temps. Mais cette raison ne doit pas empêcher d'aimanter à coups de marteau une barre large qu'on aura attention de ne frapper qu'au milieu ou près d'un de ses bords avec la panne d'un marteau; dans ce cas la matiere chassée a où se loger à son aise dans le fer même. Aussi ai-je reconnu qu'une barre de fer frappée fortement, avec les précautions dont nous venons de parler, acquiert la vertu attractive, moins

98 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cependant que le fer qui est plié & replié à diverses reprises.
C'est donc encore là une autre façon d'aimer le fer sur
le champ, sans lui faire toucher l'aimant. Mais c'est une des
plus foibles, soit que la matiere chassée trop brusquement
forte de la barre par divers chemins, soit que les corps ne
concourent pas assez à lui faire prendre une même direction.

Dans cette façon foible d'aimer le fer, il y a pourtant une circonstance à remarquer, qui seule donneroit beaucoup de probabilité à tout ce que nous avons dit de la matiere chassée des fibres du fer les plus comprimées pour aller en occuper d'autres où elle soit moins à l'étroit. Cette circonstance est que tout le bout de la barre n'est pas aimanté, il ne l'est jamais vis-à-vis les endroits qui ont soutenu les coups de marteau. S'il n'y a eu qu'une moitié de la largeur de la barre sur laquelle les coups soient tombés, il n'y aura que la moitié du bout qui répond à ce qui n'a pas souffert de percussions, qui soit aimanté. Si on a eu attention à faire tomber les coups au milieu de la largeur de la barre; que ces coups forment une trace dirigée selon la longueur de cette barre, & de part & d'autre de laquelle le fer n'ait point été frappé, le bout du fer ne sera aimanté que dans les deux endroits qui répondent à ce qui n'a pas été frappé, ou dans un de ces endroits. mais jamais le milieu ne le fera.

Cela s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit, pour rendre raison de la maniere dont on defaimante un fil de fer, en poussant trop loin le nombre des inflexions. A force de les multiplier, on chasse la matiere magnétique qui étoit dans le fer, elle ne peut y circuler à son aise. En lui ôtant de sa souplesse, en l'écroûissant, on exprime sa matiere magnétique. En veut-on une preuve? Qu'on mette recuire le fil de fer qui, pour avoir été replié trop de fois, a perdu la vertu magnétique qu'il-avoit acquise, & qui n'est plus en état d'en prendre de nouvelle; qu'on fasse, dis-je, recuire ce fil de fer; aussi-tôt qu'il aura été recuit, on pourra lui redonner toute la force d'attirer qu'il avoit ci-devant. Pendant le recuit, le feu écarte les parties du fer les unes des

autres, la matière magnétique trouve de grands espaces où elle se loge: mais quand le fer vient à se refroidir, cette matière s'y trouve renfermée, elle y est peut-être en quelque sorte emprisonnée, les parties du fer se rapprochent, & lui bouchent apparemment plusieurs passages par où elle sortoit librement; & c'est à cette matière renfermée dans le fer, que sont probablement dûs la plupart des effets que nous venons de rapporter.

Quoique nous croyions qu'il y a plus de matière magnétique dans le fer chaud que dans le fer froid, nous ne pensons pas cependant que le fer chaud soit plus en état de s'aimanter lui-même ou d'aimanter l'acier, que ne l'est le fer froid; si nous l'eussions pensé, nous eussions bien-tôt trouvé dans les boutiques des ouvriers en fer de quoi nous défaire de cette erreur. Nous avons dit que tous les outils qui coupent ce métal à froid sont aimantés: mais nous dirons à présent qu'au contraire tous les outils qui coupent le fer à chaud, n'ont nulle vertu attractive. Il y a plus: c'est qu'on fait perdre cette vertu à un outil aimanté, si on lui fait couper du fer rougi par le feu.

Que l'acier ne s'aimante point, en coupant un fer rouge, c'est encore un effet qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons voulu établir sur les tourbillons emprisonnés en quelque sorte dans le fer. Le taillant de l'outil a beau presser le fer chaud, il ne met pas pour cela la matière magnétique à l'étroit, il ne la force point à s'ouvrir une route au travers de ses pores, les parties du fer rouge sont écartées les unes des autres, elles présentent de toutes parts des passages; d'ailleurs ses parties tiennent peu ensemble, elles résistent faiblement à la force qui tend à les séparer.

Il y a un peu plus de difficulté à expliquer pourquoi l'acier aimanté perd sa vertu en coupant le fer chaud. Peut-être faut-il l'attribuer à ce qu'il s'échauffe alors lui-même; qu'il se fait une agitation dans ses parties, qui produit autant de changement dans leur situation qu'il en faut pour boucher des passages par où la matière magnétique avoit son

cours. Quoique les parties de l'acier qui pénètre dans le fer chaud, deviennent plus écartées les unes des autres, les canaux dans lesquels circuloit la matiere magnétique, sont dérangés. Enfin si on veut, on supposera que dans l'instant de la percussion, l'outil fait, pour ainsi dire, corps avec le fer chaud, & que les routes étant plus libres dans le fer chaud, que dans l'acier, qui alors a un degré de chaleur bien inférieur à celui du fer, la matiere magnétique de l'acier l'abandonne pour circuler dans le fer.

La premiere de nos expériences, & celle qui a donné occasion à toutes les autres, c'est celle des outils d'acier qui s'aimantent en coupant le fer; j'ai cru devoir éprouver si ces mêmes outils ne s'aimanteroient pas en coupant d'autres corps de différentes duretés. J'ai essayé sur de la limaille des ciseaux qui avoient coupé beaucoup de bois, d'autres qui avoient coupé du cuivre, & enfin d'autres qui avoient coupé des pierres plus dures que le fer. Je leur ai trouvé à tous quelque vertu attractive, plus foible cependant dans les outils qui n'avoient coupé que du bois, que dans ceux qui avoient coupé du cuivre. Ces expériences n'ont rien de contraire à celles que nous avons rapportées, & aux explications que nous en avons données, puisque nous avons vû que le fer ou l'acier frappé par le marteau, ou pressé ou tourmenté de quelque façon que ce soit, prend un certain degré de vertu attractive. On pourroit pourtant en conclurre que c'est inutilement que nous avons fait passer de la matiere magnétique du fer qui est coupé dans le ciseau qui le coupe; que les ciseaux qui coupent le fer ne s'aimantent plus vigoureusement que ceux qui coupent le bois, ou même le cuivre, que parce qu'ils sont plus pressés, que parce qu'ils agissent contre un corps plus dur. Deux remarques vont lever ce doute, & prouveront que l'explication doit subsister en son entier. La premiere est que l'outil, en coupant des pierres plus dures que le fer, ne s'aimante pas, à beaucoup près, aussi fortement qu'en coupant le fer. La seconde est que si avec ces mêmes outils qui ont coupé pendant long-temps du

bois, du cuivre, des pierres, ou coupé seulement une demi-ligne épais de fer; qu'on donne à ces outils un seul coup pour leur faire couper le fer, on leur fera prendre dans l'instant plus de huit à dix fois autant de force qu'ils n'en avoient pû acquérir. Ce surplus si considérable ne vient donc pas de la résistance qu'oppose le fer qui a été entaillé, mais de la matiere magnétique qu'il a fournie.

La figure des outils d'acier contribue à augmenter la force attractive qu'ils prennent en coupant le fer. Un ciseau dont le taillant est plat, s'aimante moins vigoureusement qu'un poinçon dont la pointe est conique. On peut le remarquer, en comparant les effets de différens outils: mais j'en ai fait l'épreuve de la façon le moins équivoque. J'ai fait forger une seconde fois le taillant d'un ciseau, je l'ai fait changer en une pointe conique, & alors il a attiré plus fortement. Toutes choses d'ailleurs égales, la grosseur de l'outil contribue aussi à augmenter sa force.

Ce qui pourtant est sur-tout nécessaire à l'outil, c'est d'avoir une certaine longueur, on a beau lui donner du diametre, s'il est extrêmement court, il ne s'aimante point, ou presque point. J'ai fait forger des poinçons qui n'avoient qu'un pouce de longueur, & qui avoient huit ou neuf lignes de diametre, ils n'attiroient que quelques grains de limaille, après avoir percé bien du fer. Au lieu que des poinçons longs de trois à quatre pouces, & qui n'avoient pas une ligne ou une ligne & demie de diametre, attireroient de petits clous. Nous avons fait faire une remarque pareille sur les fers qu'on aimante en les cassant. Lorsqu'un des bouts faits par la cassure est court, il n'attire rien, ou presque rien; il faut une certaine longueur au fer pour donner assez d'entrée à la matiere magnétique, la grosseur n'y supplée pas; l'augmentation de la force attractive que peut prendre un morceau de fer, n'est nullement proportionnelle à sa masse. L'on en trouvera une raison assez satisfaisante, si on fait attention que cette force est d'autant plus grande, que la matiere qui la produit passe en plus grande quantité par un

même endroit. De-là vient que certains aimants armés sont cent ou deux cents fois plus forts qu'avant d'être armés. Prenons deux cylindres de fer de masse égale, mais dont l'un soit beaucoup plus long que l'autre ; & supposons qu'il entre dans l'un & dans l'autre une égale quantité de matiere magnétique ; ce qui est tout ce que nous pouvons supposer de plus favorable au plus gros cylindre, puisqu'il a moins de surface. Si la matiere qui entre dans l'un & dans l'autre, & qui sort de l'un & de l'autre, vient se réunir aux deux bouts, qui sont les deux poles, il est sûr que celui qui a le moins de diametre sera plus puissant que celui qui en a le plus en raison renversée des bases ou des quarrés des diametres, puisque la quantité de matiere qui passera par chacun des points de l'un, sera à la quantité de matiere qui passera par chacun des points de l'autre dans ce rapport. Il y a peut-être encore bien d'autres circonstances qui contribuent à augmenter la force du petit cylindre : mais elles nous meneroient loin, & il suffit ici d'avoir entrevû que la différence des longueurs peut produire des augmentations de force attractive.

En commençant ce Mémoire, nous avons fait mention des pelles & des pincettes qui se trouvent ordinairement aimantées, ou qui ont deux poles, dont l'un attire une des pointes de l'aiguille, & repousse l'autre, & dont l'autre pole produit des effets contraires. Nous finirons par quelques remarques que nous avons faites sur cette expérience, & par quelques autres expériences qu'elle nous a donné occasion de faire, qui montrent avec quelle facilité le fer s'aimante. L'expérience des pelles & des pincettes ne manquera jamais, si on a attention à quelques circonstances, sçavoir de les présenter à l'aiguille, dont le support soit posé sur quelque plan fixe, & de les tenir toujours verticalement, ou à peu-près, & dans le même sens où elles étoient placées dans la cheminée; alors on ne manquera pas de trouver les deux poles, dont l'inférieur attirera la pointe de l'aiguille qui se dirige vers le sud, & le supérieur celle qui se dirige vers le nord. On trouvera quelquefois les mêmes poles, si on tient ces instrumens

horizontalement, & qu'on les fasse glisser auprès de l'aiguille; quelquefois aussi on ne les retrouvera pas, mais il sera rare qu'on les trouve, si on renverse ces instrumens de haut embas. Peut-être que ces circonstances auxquelles on n'a pas toujours fait assez d'attention, ont fait regarder cette expérience comme incertaine, & ont empêché qu'on la suivit davantage. Il m'a paru qu'on étoit convaincu que les pincettes & les pelles devoient leurs poles à la situation où elles ont été pendant un long-tems; ç'a été au moins le sentiment de M. Rohault.

Mais en répétant ces expériences, j'ai reconnu qu'il n'y avoit guere de fer moins propre à les faire que ceux des pelles & des pincettes. J'ai voulu essayer en combien de temps une barre de fer, une verge de fer, & tout morceau de fer droit, posé verticalement, acqueriroit deux poles qui feroient sur l'aiguille aimantée le même effet que ceux de l'aimant; & j'ai été surpris, lorsque j'ai vû qu'il ne falloit précisément qu'un instant à tout fer droit pour les acquérir. On peut bien appeller un instant le temps qu'il faut pour retourner une barre de fer, le haut embas, & il n'en faut pas davantage. Ayant placé, comme je l'ai dit ci-dessus, le support de mon aiguille aimantée sur un plan fixe, j'ai présenté à une des pointes de cette aiguille, tantôt le bout inférieur de cette barre, & tantôt le bout supérieur; & selon le bout de cette barre que j'avois approché de l'aiguille, j'ai élevé ou abaissé cette barre, en la tenant verticalement, de sorte que chacun de ses points a été successivement à la hauteur de l'aiguille; le bout inférieur de cette barre attiroit la pointe de l'aiguille qui est ordinairement tournée vers le sud, & vers le bout supérieur il y avoit un pole qui attiroit au contraire la pointe du nord. Si sur le champ je retournois la barre le haut embas, sur le champ les poles étoient changés, c'étoit toujours le bout d'embas, qui attiroit la pointe du sud. La même expérience avoit été faite long-tems avant moi par le Père Grimaldi, comme il paroît par l'art. 51 de la sixième proposition de son traité de la lumière. Au reste ce que nous venons de dire d'une barre, nous l'avons expé-

rimenté sur toutes sortes de morceaux de fers droits , comme sur du fenton , des verges de vitres , du fil de fer , &c.

Il suit de ces expériences que le fer a une grande disposition à être aimanté ; que la matiere magnétique le pénètre bien aisément , & change avec une grande facilité l'arrangement qu'elle avoit donné à ses pores , ou aux parties de ses pores , pour s'y menager des passages , puisqu'elle peut changer sur le champ les poles qu'elle lui a donnés. S'il ne se fait pas un changement de poles si subit dans les pelles & dans les pincettes qu'on retourne le haut embas , c'est à leur figure qu'il faut en attribuer la cause , la courbure de ces instrumens oppose un obstacle au cours de la matiere magnétique. On croiroit peut-être que cette courbure a moins de part à cet effet que la position dans laquelle elles ont été pendant longtemps ; que cette position a donné à la matiere magnétique la facilité de se faire des routes qu'elle ne peut changer dans un instant. Le Pere Grimaldi même , dans l'article 52 de la proposition que nous venons de citer ci-dessus , assure qu'une barre qui a resté long-temps droite , n'a plus l'espece d'indifférence dont nous avons parlé , à attirer par chacun de ses bouts l'une ou l'autre pointe de l'aiguille ; & cela peut-être , puisque par la suite des siècles une barre de fer peut devenir de véritable aimant. Mais je ne sçai à combien va le temps nécessaire pour donner à une barre de fer des poles qui ne puissent pas être changés sur le champ , il y faut peut-être des siècles , ou une longue suite d'années ; ce que je sçai , c'est que des mois n'y suffisent pas. J'ai présenté à une aiguille aimantée un barreau de fonte de fer , long de deux pieds & demi , & d'un pouce en quarré , qui avoit resté au moins dix mois dans une position verticale. Le bout inférieur n'a pas manqué d'attirer la pointe du sud : mais après que je l'ai eu retourné , le bout qui avoit resté en haut pendant si long-temps , a dans l'instant attiré la pointe du sud ; c'est-à-dire , que les poles de ce barreau ont été changés dans l'instant.

La remarque par laquelle nous finirons ce mémoire , c'est que le pole qui attire la pointe du nord est toujours plus éloigné

éloigné du bout supérieur du fer que le pôle, qui attire la pointe du sud, ne l'est du bout inférieur. Quelquefois le pôle inférieur se trouve presque dans le bout même, & n'a de force qu'aux environs, pendant que le pôle supérieur est considérablement éloigné du bout supérieur, & que la force de ce pôle se conserve jusqu'au haut de la barre. Est-ce que la matière magnétique entreroit dans le fer par son bout inférieur, & s'échapperoit ensuite en s'approchant du bout supérieur.

SUR LE DERNIER PASSAGE

*attendu de Mercure dans le soleil, & sur celui du
mois de Novembre de la présente année 1723.*

Par M. DELISLE le cadet.

DEPUIS la découverte des lunettes, Mercure n'a en-
core été vû que sept fois dans le soleil, quoiqu'on l'y
ait attendu quelques autres fois. La dernière fois qu'on a
cru qu'il y passeroit, a été le 8 Mai 1720 au matin; auquel
jour, suivant les tables les plus récentes, il devoit encore
paroître dans le soleil quelque temps après son lever. 2 Juin
1723.

Sur cette espérance que presque toutes les tables avoient
donné de pouvoir voir Mercure dans le soleil le 8 Mai au
matin, j'ai été attentif à regarder le soleil dès le 7 au soir.
Il y avoit dans ce temps-là plusieurs taches sur le soleil,
dont j'avois déterminé exactement la situation, pour y pou-
voir comparer Mercure, lorsqu'il paroîtroit; il ne parut point
de toute la journée du 7, où le temps fut assez favorable à
Paris. Le 8 au matin, le soleil se leva dans un brouillard
dont il se dégaa quelques minutes après: mais Mercure ne
parut point, en sorte que je fus assuré que si Mercure avoit
passé dans le soleil, il en étoit sorti avant $4^h \frac{1}{4}$ du matin.

M. Kirch, Astronome de la Société Royale de Prusse,
Mém. 1723.

O

eut aussi le tems assez favorable à Berlin : mais il n'aperçut point non plus Mercure sur le soleil , quoiqu'il ait pû voir le soleil peu après son lever , trois quarts d'heure plutôt qu'il n'a paru à Paris : ainsi on a pû être assuré qu'à 4^h du matin à Paris , Mercure n'étoit plus sur le soleil.

On a aussi regardé attentivement le soleil dès son lever le 8 au matin à Königsberg en Prusse , à Nuremberg , à Strasbourg , à Wittemberg : mais dans aucun de ces lieux on n'a pû voir Mercure , quoique le tems y ait été par-tout assez disposé : ce qui a fait reconnoître , ou que Mercure n'étoit point entré dans le soleil à cause de sa trop grande latitude , ou que ce passage s'étoit fait avant le lever du soleil.

On peut avec plus de raison espérer de voir cette année Mercure dans le soleil , parce que dans sa conjonction inférieure qui arrivera le 9 Novembre au soir , il n'aura que 4 à 5 minutes de latitude septentrionale. Par les Tables de M. de la Hire , cette conjonction arrivera à Paris à 5^h 30' 20'' ; l'entrée du centre de Mercure dans le soleil sera à 2^h 45' 38'' , & sa sortie à 8^h 1' 58'' , & il passera à 4' 28'' du centre du soleil vers le septentrion. Les éphemerides de Manfredi font arriver cette éclipse une demi-heure plus tard , & font passer Mercure une demi-minute seulement plus loin du centre du soleil : Voici la méthode & les principes sur lesquels j'ai déterminé les circonstances de ce passage que je viens de rapporter.

La conjonction de Mercure avec le soleil , vûe de la terre , est la rencontre apparente du centre de Mercure dans le cercle de latitude qui passe par le centre du soleil. Au moment de cette conjonction , Mercure , vû du centre du soleil , y paroît en conjonction avec la terre ; ce qui fournit le moyen de calculer les conjonctions apparentes de Mercure avec le soleil , vûes de la terre , en n'employant que les longitudes de Mercure , vûes du soleil , telles que les Tables astronomiques les donnent immédiatement , & comparant ces longitudes avec le lieu de la terre , vû du soleil , qui est toujours opposé au lieu du soleil , vû de la terre.

C'est de cette maniere que j'ai remarqué le temps de la conjonction de Mercure avec le soleil à $5^h 30' 20''$. Suivant les tables de M. de la Hire, ayant trouvé que la longitude heliocentrique de Mercure, réduite à l'écliptique, étoit pour ce tems-là de $16^\circ 46' 29'' 8$ précisément opposée à la longitude vraie du soleil, qui est de $16^\circ 46' 29'' m$.

L'inclinaison de Mercure, ou sa latitude heliocentrique, se trouve par les mêmes tables au même moment, de $9' 44''$ septentrionale, & la distance de Mercure à son nœud ascendant, prise sur l'écliptique, de $1^\circ 20' 46''$. D'où l'on conclut l'angle de l'orbite de Mercure avec le cercle de latitude dans cette conjonction de $83^\circ 8' 7''$. Sur ces élémens & sur les mouvemens horaires vrais de Mercure & du soleil, tirés des mêmes tables, le premier de $15' 17'' \frac{1}{2}$, & l'autre de $2' 31''$, reste à conclurre le mouvement apparent de Mercure à la terre, vû du soleil, la terre étant supposée fixe au point où elle se trouve au moment de la conjonction.

Soit CD , l'écliptique (*Fig. 1.*) C , le lieu heliocentrique de la terre au moment de la conjonction, c'est-à-dire, lorsque le centre de Mercure se trouve dans le cercle de latitude CA , comme en A ; soit par conséquent CA , la latitude de Mercure, & AF , son orbite, faisant avec le cercle de latitude, l'angle FAG de $83^\circ 8' 7''$. Soit pris sur cette orbite, AF , égal au mouvement horaire vrai de Mercure. Soit aussi pris sur l'écliptique CD égal au mouvement horaire vrai du soleil. Si l'on imagine les points D , F , joints ensemble, & par le point C , CE parallele & égale à DF ; AE fera le mouvement horaire apparent de Mercure à la terre, vû du soleil, la terre étant supposée fixe au point C .

Par les nombres posés ci-devant, l'on trouve le logarithme de ce mouvement horaire AE de 2, 8852504, en résolvant le triangle rectiligne AEF , dans lequel on connoît AF de $15' 17'' \frac{1}{2}$, ou $9' 17'' \frac{1}{2}$ $FE = CD$ de $2' 31''$ ou $151''$, & l'angle, compris AFE , de $6^\circ 51' 53''$, complément de l'angle FAG , que l'on a dit être de $83^\circ 8' 7''$. L'on trouve

108 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
aussi par la résolution du même triangle , l'angle GAE de l'inclinaison apparente de l'orbite de mercure sur le cercle de latitude de $81^{\circ} 47' 18''$.

Si présentement l'on abaisse du point C une perpendiculaire CM sur cette orbite vûe , elle y déterminera le point M de la plus proche distance apparente de Mercure à la terre , vûe du soleil , que l'on trouve de $9' 38''$ par la résolution du triangle rectiligne ACM rectangle en M , dans lequel on connoît , outre l'angle CAM de l'inclinaison apparente de l'orbite de Mercure avec le cercle de latitude , l'hypoténuse AC de $9' 44''$ ou $584''$. L'on trouve aussi par la résolution du même triangle ACM , la valeur de AM , & le temps que Mercure emploie à le parcourir , qui est de $6' 32''$, à raison de son mouvement horaire AE . Ainsi ayant le tems de la conjonction de Mercure en A à $5^h 30' 20''$, on en conclut le moment de la plus proche distance des centres en M à $5^h 23' 48''$. Ce moment de la plus proche distance apparente des centres de Mercure & de la terre , vûe du soleil , est aussi celui de la plus proche distance apparente des centres de Mercure & du soleil , vûe de la terre , & ainsi par les seuls mouvemens de Mercure & de la terre considérés du soleil , on en peut déterminer le moment de sa conjonction apparente de Mercure avec le soleil & le milieu du passage de Mercure dans le soleil , vû de la terre.

On peut aussi déterminer l'entrée & la sortie de Mercure du disque du soleil , tels qu'ils sont vûs de la terre , & cela sans employer d'autres élémens que ceux que l'on vient de rapporter du mouvement de Mercure & de la terre , vû du soleil : en voici l'expédient.

Ayant supposé le soleil & la terre immobiles , lorsque l'on a recherché le mouvement apparent de Mercure à l'égard de la terre , vû du soleil ; ayant , dis-je , fait cette supposition , la ligne qui joint les centres du soleil & de la terre , doit aussi être censée immobile. De plus , si l'on imagine du centre T de la terre (*Fig. 2.*) une infinité de lignes TP , TR , qui touchent le soleil , & qui forment par conséquent

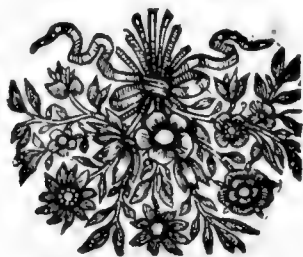
la superficie d'un cone, dont l'angle au sommet PTR est égal au diametre apparent du soleil, vû de la terre, ce cone retranchera dans l'orbe de Mercure un cercle NQ , qui est la projection de tout le disque du soleil dans l'orbe de Mercure, & il est évident que lorsque Mercure viendra à rencontrer, par son mouvement propre sur son orbe, la circonférence du cercle, il paroîtra de la terre entrer ou sortir du disque du soleil.

Pour déterminer ces momens de rencontre, j'imagine que ce même cercle de projection du disque du soleil dans l'orbe de Mercure soit vû du centre S du soleil. Il y paroîtra sous un angle NSQ qui sera facile à trouver, connoissant l'angle NIQ du diametre apparent du soleil, vû de la terre, & le rapport des distances SO , TO de Mercure au soleil & à la terre, que l'on tire des tables astronomiques; car les tangentes des complémens de ces angles NSQ , NTQ , sont entr'elles dans le rapport des distances SO , TO . Il n'y a donc plus qu'à imaginer du point C , comme centre (*Fig. 1.*) un cercle décrit de telle grandeur, qu'il paroisse du soleil sous un angle égal à l'angle NSQ (*Fig. 2.*) car les points H , I , de rencontre de ce cercle & de l'orbite apparente AE de Mercure à l'égard de la terre supposée immobile en C ; ces points de section, dis-je, seront ceux de l'entrée & de la sortie du centre de Mercure dans le soleil, tels qu'ils seroient vûs du centre de la terre.

Par les tables de $M.$ de la Hire, les distances SO , TO , de Mercure au soleil & à la terre sont dans le rapport de 31333 à 67646; & le diametre apparent du soleil est de $32' 30''$. D'où l'on conclut le demi-diametre apparent NSO ou CI de $35' 5''$ ou $2105''$. C'est pourquoi dans le triangle rectiligne MCI , rectangle en M , connoissant l'hypoténuse CI & le côté CM (la plus proche distance des centres de Mercure & de la terre, que l'on a trouvée ci-devant de $9' 38''$ ou $578''$) l'on en conclut aisément le troisieme côté MI , qui étant converti en temps, à raison du mouvement horaire AE , donne la demi-durée du passage du centre de Mercure

110 MEMOIRES DE L' ACADEMIE ROYALE
dans le soleil de $2^h 38' 10''$, laquelle ajoutée & soustraite
du milieu de ce passage trouvé à $5^h 23' 48''$, il en résulte
l'entrée du centre de Mercure dans le soleil à $2^h 45' 38''$, &
sa sortie à $8^h 1' 58''$. L'on trouve aussi la plus proche di-
stance apparente des centres de Mercure & du soleil, vûe
de la terre, de $4' 28''$, dont Mercure doit passer au septen-
trion du centre du soleil, vû du centre de la terre; ce que
l'on a trouvé, en considérant que les tangentes de ces plus
proches distances apparentes de Mercure à la terre, vûes
du soleil, ou de Mercure au soleil, vûes de la terre; que
ces tangentes, dis-je, sont en raison directe des distances
réelles de Mercure au soleil & à la terre.

Les déterminations précédentes ne donnent l'éclipse que
comme elle doit paroître du centre de la terre; il y a à l'é-
gard de sa surface quelque différence à laquelle il est inu-
tile d'avoir égard dans la prédiction de l'éclipse: mais lors-
que l'éclipse a été observée exactement, il y faut avoir égard,
& réduire les apparences observées de la superficie de la
terre à ce qu'elles auroient dû être, étant vûes du centre
de la terre; la différence de ces aspects sert même à trou-
ver la parallaxe de Mercure au soleil, d'où l'on conclut
celle du soleil.



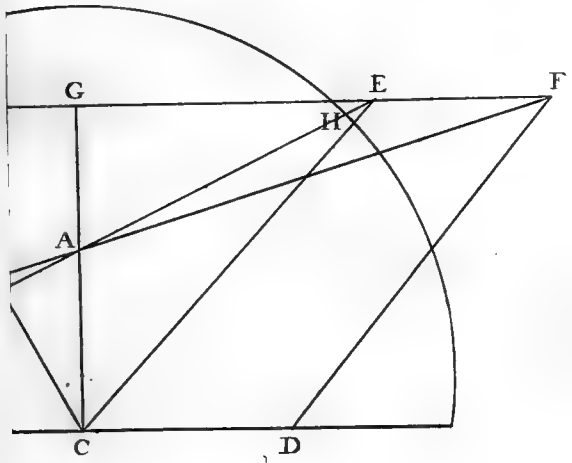
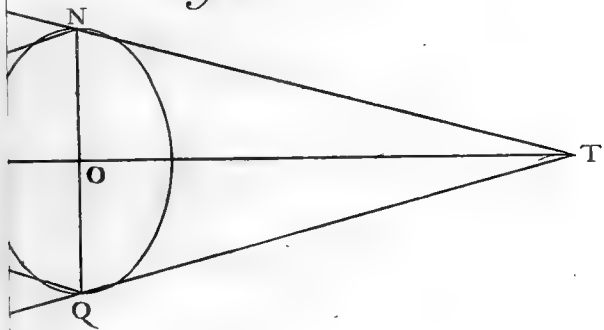


Fig. 2.



DIVERSES EXPERIENCES D'OPTIQUE.

Par M. MARALDI.

PREMIERE PARTIE.

Expériences d'Optique faites en plein soleil.

TOUT ce qui regarde l'Optique est curieux ; & dans cette science, comme dans les autres, les choses les plus petites méritent notre attention. Ces matières peuvent même être utiles, par le rapport qu'elles ont avec la lumière qui nous intéresse si fort. L'Astronomie y peut trouver aussi ses avantages. C'est dans ses vûes que j'ai fait les expériences suivantes, & que je les ai accompagnées de réflexions que j'ai cru les plus propres à rendre raison des apparences observées. Voici donc ces expériences. 29 Mai 1723.

J'ai exposé en plein soleil un cylindre long de 3 pieds & de 6 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre ; son ombre ayant été reçue sur un papier proche, étoit par-tout également noire & assez bien terminée. Elle conservoit le même degré d'obscurité depuis le cylindre jusqu'à la distance de 23 pouces. Plus loin on commençoit à voir une ombre de deux différentes densités ; car les deux extrémités de l'ombre, formées par la longueur du cylindre, étoient terminées par deux traits d'ombre noire qui avoient un peu plus d'une ligne de largeur. Au milieu de ces deux traits, on voyoit une lumière faible répandue également dans l'ombre ; ce qui formoit une pénombre uniforme, beaucoup plus faible què les deux traits extérieurs dont on vient de parler, & plus faible aussi que l'ombre reçue proche du cylindre. (*Fig. 1.*) A mesure que l'on éloignoit du cylindre le papier sur lequel l'ombre étoit reçue, les

deux traits noirs conservoient à peu-près la même largeur qu'auparavant, & le même degré d'obscurité : mais la pénombre du milieu paroissoit plus claire, & sa largeur diminueoit de maniere que les deux traits noirs placés aux deux extrémités de l'ombre, s'approchoient l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin l'ombre ayant été reçue à la distance de 60 pouces, les deux traits se confondoient l'un avec l'autre, & la pénombre du milieu a disparu.

Plus loin de l'union des deux traits noirs, on continuoit à voir une pénombre foible, assez mal terminée, qui augmentoit en largeur à mesure qu'elle étoit reçue plus loin, & qui étoit encore sensible à une grande distance.

Outre cette ombre noire & obscure que formoit le cylindre proche du corps opaque, on voyoit une pénombre fort étroite & fort foible aux deux côtés extérieurs de l'ombre plus dense. Ensuite de la pénombre, on voyoit un trait de lumière plus claire que celle qui étoit reçue sur le reste du papier en plein soleil.

La largeur de la pénombre extérieure alloit en augmentant à mesure que l'ombre étoit reçue loin du cylindre. Le trait de lumière qui suivoit après la pénombre s'étendoit aussi : mais son éclat s'affoiblissoit, étant reçue loin du corps opaque.

Voilà les différentes apparences que nous avons remarquées dans l'ombre du cylindre long de 3 pieds & de 6 lignes de diamètre, reçue sur un papier à différentes distances.

J'ai fait les mêmes expériences avec un cylindre long de 3 pieds & de 9 lignes de diamètre, & on voyoit des apparences semblables. Son ombre reçue proche, étoit noire & bien terminée ; on commençoit à voir la pénombre au milieu de deux traits d'ombre plus obscurs à 34 pouces de distance, la pénombre du milieu s'affoiblissoit & devenoit plus claire à mesure qu'on la recevoit plus loin, & à 91 pouces les deux traits se confondoient, & l'ombre disparoissoit.

Un troisieme cylindre d'un pouce & sonze lignes, commençoit à faire l'ombre de deux différentes densités, à six
pieds

pieds de distance du cylindre , & les deux traits se confondoient à 17 pieds ou l'ombre dispa-roissoit.

Un quatrieme cylindre de deux pouces trois lignes de diametre commençoit à faire la pénombre au milieu de deux traits noirs à 7 pieds 10 pouces de distance du cylindre , & l'ombre dispa-roissoit à 20 pieds 6 pouces.

Au reste tous ces cylindres , outre la pénombre au milieu de deux traits noirs , faisoient des apparences semblables à celles que nous avons remarquées dans l'ombre du premier ; c'est-à-dire , une pénombre fort foible à chaque côté extérieur du trait d'ombre plus obscur , ensuite le trait de lumiere avec des semblables diversités que nous avons remarquées dans l'ombre du premier , reçues à différentes distances.

De ces quatre expériences , on peut inférer que tout corps opaque , de figure cylindrique , étant exposé en plein soleil , fera des apparences semblables à celles que nous avons remarquées dans les observations précédentes.

Réflexions sur ces Observations.

Puisque le premier cylindre qui a 6 lignes & demie de diametre , commence à faire l'ombre de deux différentes densités à 23 pouces de distance , divisant ce nombre par le diametre du cylindre , qui est de 6 lignes & demie , on a pour quotient 42 ; d'où il paroît que cette distinction d'ombres commence à être sensible à 42 diametres du cylindre ; & puisque son ombre dispa-roît à 60 pouces de distance , divisant 60 pouces par 6 lignes & demie , on a 110 diametres du cylindre pour le terme de son ombre. C'est à peu près la distance , comme l'on sçait , jusqu'où les corps opaques doivent jeter leurs ombres , à cause de la grandeur apparente du demi-diametre du soleil ; car ce demi-diametre , étant de 16 minutes , on trouve par la trigonométrie que l'ombre de tout corps opaque doit se terminer à 110 diametres du corps , avec une différence tantôt plus grande , tantôt plus petite , suivant que le demi-diametre apparent du soleil est tantôt plus grand , tantôt plus petit.

Mem. 1723.

P

Nous avons remarqué que dans l'ombre du second cylindre , qui a 9 lignes de diametre , on commence à voir l'ombre distinguée en deux différentes densités à 34 pouces de distance , qui font 45 diametres du cylindre , & que son ombre disparoit à 121 diametres.

De même le troisieme cylindre d'un pouce & 11 lignes commence à faire les ombres distinguées en deux différentes densités à 6 pieds , qui font 38 diametres du cylindre , & l'ombre finit à 17 pieds 6 pouces , qui font 109 diametres du cylindre.

Enfin dans l'ombre du quatrieme cylindre , qui est de 2 pouces 3 lignes , on commence à voir la distinction de deux ombres à 7 pieds 10 pouces , qui font 42 diametres du cylindre , & l'ombre se termine à 20 pieds 6 pouces , qui en font 108 diametres.

On peut donc inférer de ces quatre expériences , que tout corps opaque cylindrique , exposé en plein soleil , fait une ombre qui paroît noire & pure depuis le cylindre jusqu'à la distance de 38 à 45 diametres du cylindre qui la forme , & que plus loin cette ombre n'est plus pure ni uniforme , mais distinguée , comme nous avons dit , en deux traits d'ombre plus obscure que le reste , au milieu desquels on voit une pénombre dont l'obscurité diminue à mesure qu'elle est éloignée du cylindre.

Dans les expériences précédentes , on trouve une différence de 7 diametres dans la distance où différens cylindres commencent à faire la distinction de deux ombres , la plus grande ayant été trouvée de 45 diametres , la plus petite de 38. Cette différence peut venir en partie de la difficulté qu'il y a de distinguer toujours précisément le terme où commence cette distinction , à cause qu'elle se fait par des degrés insensibles , ne l'ayant pas toujours trouvée précisément à la même distance dans un même cylindre. Elle peut venir aussi en partie de la différente clarté du soleil au temps des expériences ; car nous avons remarqué qu'on apperçoit plus loin du même cylindre la différence des ombres , lorsqu'

que le soleil est fort peu élevé sur l'horison, ou moins lumineux, que lorsqu'il est plus élevé & plus clair : mais en prenant un milieu entre la plus petite distance & la plus grande, on aura une distance moyenne de 41 diamètres du cylindre, où commence à se faire la distinction entre la pénombre & les deux traits d'ombre plus obscure.

Pour expliquer ces apparences, nous supposons que de tous les rayons du soleil qui rencontrent le cylindre, une partie seulement se réfléchit sur elle-même, qu'une autre partie se réfléchit de chaque côté du cylindre, & enfin qu'une autre partie ne se réfléchit point, mais qu'elle se glisse de côté & d'autre du cylindre, & refluant, pour ainsi dire, derrière le cylindre, comme fait l'eau d'une rivière autour d'un pilier d'un pont ; cette lumière qui reflue ainsi, pénètre dans l'ombre, & la rend moins noire qu'elle seroit sans ces rayons.

La raison pourquoi cette ombre proche du corps opaque ne paroît pas éclairée par des rayons qui refluent, mais seulement à une certaine distance, vient peut-être de ce que ces rayons entrent d'abord dans l'ombre séparés les uns des autres, comme on verra dans les expériences rapportées dans la seconde partie de ce Mémoire, ce qui est cause qu'ils ne sont pas visibles dans la section de l'ombre qui est proche : mais ces rayons venant à se joindre à une certaine distance, & à tomber tous dans le même endroit, ils y sont plus sensibles, & rendent par conséquent l'ombre moins noire. On peut encore expliquer cette apparence, en supposant que les rayons du soleil qui refluent dans l'ombre, étant en petite quantité par rapport à ceux qui sont réfléchis par le corps opaque, ne sont pas sensibles proche, à cause qu'ils y sont rares, & occupent dans l'ombre une espace trop grand par rapport à leur quantité : mais ils commencent à être sensibles dans une section d'ombre plus petite, où ils sont plus pressés ensemble, & où ils y occupent une plus petite étendue. C'est aussi par cette raison que la pénombre devient plus claire à mesure qu'elle est reçue plus loin de l'objet, où la même

quantité de rayons qui refluent occupe encore une plus petite étendue que dans la section où la pénombre commence à être sensible. Voilà de quelle maniere nous croyons que se forme la pénombre au milieu de deux bandes noires qui sont à l'extrémité de l'ombre, & pourquoi elle ne commence à être sensible qu'à une certaine distance du corps opaque.

Pour expliquer la formation des deux bandes noires qui sont à chaque côté de la pénombre, nous supposons que les rayons qui refluent glissent un peu autour du cylindre avant que de le quitter & avant que de pénétrer l'ombre, comme on voit qu'il arrive à l'eau d'une rivière, quand elle passe par les piles d'un pont qui suit dans un certain espace le contour des piles; il n'y aura donc pas de rayons dans la partie de l'ombre qui répond aux deux bords du cylindre, cette ombre y doit donc être plus noire que vers le milieu où elle est mêlée avec les rayons qui refluent: on doit par conséquent voir de cette maniere à chaque côté de la pénombre deux traits noirs & plus obscurs que le reste. Ce qui est la seconde apparence que nous avons remarqué dans l'ombre du cylindre exposé en plein soleil.

La troisieme apparence est une pénombre fort foible qui suit après les deux bandes noires, & qui est plus foible à mesure qu'elle s'éloigne du milieu vers la partie extérieure, elle vient de ce que cet espace n'est éclairé que des rayons qui partent seulement d'une partie du disque du soleil, ce qui est connu de tous ceux qui ont traité de l'optique: c'est pourquoi on ne s'étendra pas davantage pour expliquer ce phénomène.

Enfin le trait de lumiere plus forte que la lumiere même du soleil qui se peint sur le papier ensuite de la pénombre extérieure, vient, suivant toute apparence, des rayons du soleil que nous avons supposé se réfléchir de côté & d'autre sur les deux bords du cylindre, & qui se vont terminer à l'endroit du papier où il n'y a plus de pénombre extérieure. Or ces rayons réfléchis par les deux bords du cylindre, joints avec les rayons directs qui viennent immédiatement du soleil, & qui tombent au même endroit du carton, font une

lumière plus forte & plus vive que celle qui est formée par les seuls rayons directs du soleil. Peut-être aussi que ces rayons réfléchis par les bords du cylindre, se répandent dans tout l'espace compris par la pénombre extérieure formée, comme nous avons dit, par les rayons qui viennent seulement d'une partie du disque du soleil, mais cette lumière réfléchie n'est pas sensible dans cet espace, parce qu'elle y est mêlée avec la pénombre, laquelle par cette raison est plus foible qu'elle ne seroit sans cette lumière réfléchie. Elle est donc seulement sensible à son terme qui tombe hors de la pénombre extérieure.

Expériences semblables aux précédentes, faites avec des globes.

J'ai exposé en plein soleil un globe d'un pouce & 11 lignes de diamètre ; son ombre reçue sur un carton blanc, étoit noire & uniforme depuis le globe jusqu'à la distance de 2 pieds 6 pouces ; plus loin on commençoit à voir cette ombre de deux différentes densités. L'ombre totale étoit terminée par un anneau obscur, large d'un peu plus d'une ligne (*Fig. 2.*) Au milieu de cet anneau, il y avoit une aire circulaire d'une ombre beaucoup plus foible que l'ombre qui formoit l'anneau. En recevant l'ombre plus loin, l'aire circulaire & l'anneau obscur diminuoient de grandeur. L'anneau conservoit le même degré d'obscurité : mais la pénombre du milieu paroissoit plus claire. A la distance de 17 pieds 6 pouces du globe, il n'y avoit plus de pénombre, on voyoit seulement une petite obscurité au milieu d'une pénombre foible & fort large ; à 18 pieds la petite ombre noire paroissoit encore assez bien terminée, & à 20 piés on ne voyoit plus qu'une pénombre foible & circulaire qui paroissoit augmenter à mesure que l'on éloignoit le papier sur lequel l'ombre se peignoit.

Outre ces apparences qui se font dans l'ombre formée par le globe, on voyoit vers la partie extérieure de l'anneau

obscur un autre anneau de pénombre foible qui diminuoit de densité plus il étoit éloigné de l'anneau obscur. Après la pénombre suivoit un trait circulaire de lumière plus vive que celle qui étoit reçue sur le papier, & qui venoit immédiatement du soleil.

On voit par cette expérience, que dans l'ombre du globe il y a les mêmes apparences que dans l'ombre du cylindre, avec cette différence seulement que dans l'ombre du globe les apparences sont circulaires comme les corps qui les forment; au lieu que dans l'ombre du cylindre les apparences sont terminées par des lignes droites.

Un second globe de cuivre de 3 pouces 7 lignes de diamètre, exposé en plein soleil comme le premier, faisoit une ombre noire jusqu'à la distance de 4 pieds; au de-là on commençoit à voir, comme dans la première expérience, la distinction de l'anneau obscur avec la pénombre: elle se voyoit plus distinctement à 4 pieds 6 pouces.

Un troisième globe de 5 pouces une ligne de diamètre, exposé en plein soleil, comme les deux autres, faisoit l'ombre noire & uniforme jusqu'à la distance de 5 piés & demi; à cette distance on commençoit à voir l'anneau d'ombre distinguée par la pénombre qui étoit au milieu.

Un quatrième globe de 5 pouces 9 lignes & demie de diamètre, faisoit l'ombre pure jusqu'à la distance de 8 pieds & demi; plus loin on voyoit l'anneau d'ombre plus obscur qui comprenoit une pénombre comme les autres. Au reste autour de l'ombre de tous ces globes on voyoit les autres apparences que nous avons remarquées dans le premier.

Réflexions sur ces Expériences.

Puisque dans l'ombre faite par le globe d'un pouce & 11 lignes, on commence à distinguer la différence des ombres. à 2 pieds 6 pouces de distance du globe, il suit que cette distinction se fait à 15 diamètres du globe; & comme l'ombre disparoit à 17 pieds 6 pouces, elle se termine à 109 diamètres du globe; ce qui doit arriver à cause du demi-dia-

mette du soleil qui détermine cette distance de l'ombre, comme nous avons dit à l'égard du cylindre.

De même la diversité de l'ombre formée par le globe de cuivre de 3 pouces 7 lignes, se faisant à 4 pieds de distance du globe, on trouve qu'elle s'apperçoit à 15 diametres du globe.

Dans le globe de 5 pouces une ligne, la distinction des ombres de deux différentes densités se fait à 13 diametres, & dans le globe de 5 pouces 9 lignes & demie, elle se fait à 17 diametres.

Il faut remarquer que cette distinction de pénombre, avec l'anneau d'ombre plus obscure, ne se fait pas toujours précisément à la même distance du même globe, mais qu'on l'apperçoit quelquefois un peu plus loin, quelquefois plus proche du globe, de sorte qu'il y a un peu de doute dans l'endroit précis où l'on distingue ces deux diversités d'ombre, comme nous avons remarqué qu'il arrive dans l'ombre du cylindre & par les mêmes raisons : mais cette différence n'est pas bien grande, de sorte qu'en prenant un milieu entre la plus petite, qui est de 13 diametres du globe, & la plus grande, qui est de 17, on aura une moyenne de 15 diametres où l'on commence à voir l'ombre du globe distinguée en deux différentes densités.

De ces quatre expériences, on peut inférer que tout corps sphérique commence à faire une pénombre sensible au milieu de son ombre à 15 diametres du globe. On peut aussi conclurre des expériences du globe & de celles du cylindre, que tout corps opaque ne fait pas une ombre pure à une certaine distance du corps, & que cette distance doit être différente selon les différentes figures des corps qui forment ces ombres.

Nous avons trouvé par des expériences très-constantes ; rapportées ci-dessus, que dans l'ombre du corps cylindrique la pénombre commence à paroître à la distance de 41 diametres du cylindre, & que dans l'ombre des globes elle se fait à 15 diametres du globe. Donc dans l'ombre des Glo-

120 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE -
bes la différence des ombres commence à être sensible près de deux tiers plus proche, que dans l'ombre du corps cylindrique.

Cette différence entre la distinction de deux ombres du cylindre & du globe se connoît non-seulement en comparant les expériences faites sur des cylindres & des globes de différens diametres, comparées ensemble, mais encore par des expériences faites avec un cylindre & un globe de même diametre; car ayant exposé en même-temps en plein soleil un globe d'un pouce & 11 lignes, & un cylindre pareillement d'un pouce & 11 lignes, & ayant reçu ses ombres de ces deux corps sur un même papier, nous avons trouvé entre la distinction des deux ombres une différence de plus de 20 diametres du corps, la distinction dans l'ombre du cylindre s'étant faite à 38 diametres, & celle du globe à 17. Ce qui ne peut pas être attribué à la difficulté d'appercevoir le terme de cette distinction, qui ne monte tout au plus qu'à 7 ou 8 diametres.

Les principes que nous avons établis auparavant pour expliquer les apparences que l'on voit dans les ombres des corps cylindriques, servent également pour expliquer les apparences qui s'apperçoivent dans les ombres des globes.

On trouve aussi dans les mêmes principes, la raison de la différente distance où se fait la distinction des ombres des corps cylindriques & celle des globes, en considérant la différente quantité des rayons qui refluent autour des corps de ces deux différentes figures; car dans le cylindre les rayons du soleil ne peuvent refluer que des deux côtés du cylindre qui a une longueur considérable, comme étoient ceux dont je me suis servi. Dans le globe au contraire il en peut refluer également tout autour; il entre par conséquent une plus grande quantité de rayons dans l'ombre du globe que dans l'ombre du cylindre; cette lumière plus abondante qui reflue derriere le globe doit donc être plus sensible plus proche du globe qu'à égale distance du cylindre, à cause qu'il y en a une plus grande quantité dans le même espace, &
par

par conséquent on doit voir cette distinction des deux ombres plus proche du globe que proche du cylindre.

Nous avons rapporté ci-dessus que dans l'ombre du même corps , on commence à voir la pénombre plus proche du corps opaque , lorsque le soleil est plus lumineux ; & que cette distinction se fait plus loin , lorsque le soleil n'est pas si clair. Cette observation s'accorde avec la cause que nous venons d'assigner à la différente distance qu'on a trouvée dans la pénombre du cylindre & dans celle du globe , car il y a une plus grande quantité de rayons qui doivent refluer , lorsque le soleil est plus lumineux , que lorsqu'il est un peu obscurci par des nuages rares.

De même comme il y a une plus grande quantité de rayons qui reflue autour du globe qu'autour du cylindre , la distinction de deux ombres se doit faire plutôt dans l'ombre du globe que dans l'ombre du cylindre.

Ces mêmes apparences donnent lieu de croire que la lumière qui reflue pénètre dans l'ombre immédiatement après le corps opaque , quoiqu'elle n'y soit pas sensible à la vue ; car puisque cette distinction se fait comme nous avons dit , plus proche du même corps opaque , lorsque le soleil est plus clair que lorsqu'il l'est moins , il suit que la différente distance où se fait la distinction , dépend du plus ou du moins de lumière répandue dans le même espace ; ainsi quoique la lumière qui reflue puisse pénétrer l'ombre immédiatement après le corps opaque , elle n'y est pas sensible , parce qu'il n'y en a pas une assez grande quantité de mêlée avec l'ombre. D'où l'on pourroit conclurre qu'aucun corps opaque ne fait point d'ombre pure , & qui ne soit mêlée avec des rayons du soleil qui refluent derrière le corps opaque.

S'il est permis présentement de faire passage du petit au grand , & de ces expériences particulières en conjecturer ce qui peut arriver en général dans la nature , n'y auroit-il pas lieu de croire que les rayons du soleil qui éclairent la terre , refluent de la même manière que nous l'avons observé dans les expériences précédentes ; par conséquent que ces rayons

qui refluent autour de la terre , pénètrent dans son ombre , & la rendent moins dense qu'elle ne seroit sans ces rayons , comme nous avons remarqué qu'il arrive dans l'ombre de plusieurs boules ?

On fait que la lune , lorsqu'elle est entierement immergée dans l'ombre de la terre , ne se perd que très-rarement de vûe , mais qu'elle est presque toujours éclairée par une lumiere foible & rougeâtre qui la fait encore appercevoir au milieu de l'ombre.

On attribue cette lumiere , dont la lune est éclairée dans ses éclipses , tout entierement aux rayons du soleil qui se rompent dans l'atmosphere de la terre , & pénétrant l'ombre , l'éclairent diversement à différentes distances de la terre , suivant l'inclinaison différente que les rayons , qui partent des différentes parties du disque du soleil , font à la surface de l'atmosphère. Si les rayons du soleil refluent autour de la terre , ces mêmes rayons répandus dans l'ombre , peuvent aussi-bien contribuer à rendre la lune visible dans ses éclipses , comme les rayons qui se rompent dans l'atmosphere.

Il y a cependant une difficulté contre cette hypothese , qui est que la lune , lorsqu'elle entre dans l'ombre de la terre , semble passer d'abord par une pénombre foible , & successivement par divers degrés d'obscurité presque insensibles , qui va en augmentant depuis la circonférence de l'ombre jusqu'au milieu , & va ensuite en diminuant depuis le milieu jusqu'à la sortie entiere de la lune de l'ombre ; au lieu que si l'ombre de la terre étoit semblable à celle des boules , comme nous avons remarqué dans les expériences précédentes , & qu'il y eût à la circonférence un anneau plus obscur que le reste de l'ombre , il devroit être sensible dans les éclipses de lune , & cet astre devroit paroître plus obscur vers le commencement & vers la fin de l'éclipse que vers le milieu. De même dans les éclipses partiales , le terme de l'ombre qui sépare la partie du disque de la lune qui est éclipsee de celle qui ne l'est point , devroit être bien noir & bien terminé , ce qui n'a pas été remarqué jusqu'à présent.

Peut-être que les rayons du soleil rompus dans l'atmosphère , & qui pénètrent en grande quantité l'extrémité du cône de l'ombre dans une grande étendue de ce cône , peut effacer en partie cet anneau d'ombre plus obscur , supposé qu'il subsiste autour de l'ombre de la terre. Nous examinerons dans une autre occasion cette particularité. On fera cependant attention dans les éclipses de lune , s'il y a quelque apparence qui puisse confirmer cette hypothèse ou bien la détruire.

SECONDE PARTIE.

Expériences d'optique , faites dans une chambre obscure.

Le Pere Grimaldi a observé qu'en introduisant par un fort petit trou fait dans une lame de plomb fort mince, un rayon de soleil dans une chambre obscure , & que mettant à ce rayon un cheveu , ou tout autre corps cylindrique & opaque fort mince , placé à une certaine distance du trou ; ce corps , ainsi placé , fait une ombre qui , étant reçue sur une carte à quelque distance du corps opaque , est beaucoup plus grande que ne demande la distance qui est entre le corps opaque & la section de l'ombre. Il a observé en second lieu qu'à chaque côté de cette ombre , il y a une bande claire , après laquelle suivent des traits colorés de rouge , de violet & de bleu.

M. Newton qui , après le Pere Grimaldi , a fait la même expérience , a remarqué que si l'on place au même rayon de lumière décrit ci-dessus , un cheveu ou une aiguille très-fine qui soit à une distance de 12 pieds du trou , & qu'on reçoive sur un carton l'ombre faite par ce cheveu à une distance de 4 pouces , on voit sur ce carton l'ombre quatre fois plus grande que l'objet ; à la distance de 2 pieds l'ombre paroît dix fois plus grande , c'est-à-dire , toujours plus grande à mesure qu'elle s'éloigne du cheveu. Il a observé aussi , comme le Pere Grimaldi , les deux traits de lumière à chaque côté de l'ombre , ensuite les autres traits plus petits , colorés de

124 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
rouge, de violet & de bleu au côté extérieur de chaque
bande de lumière.

J'ai répété la même expérience, dans laquelle, outre ces apparences, j'ai remarqué de plus, qu'en recevant l'ombre fort loin du cheveu, on voyoit au milieu de la bande noire une petite bande de lumière qui partageoit l'ombre suivant sa longueur en deux parties égales, de manière que l'ombre du milieu n'étoit plus d'une même densité que lorsqu'elle étoit reçue plus proche du cheveu.

Outre cette expérience, j'ai fait encore celles qui suivent.

Une soie de sanglier qui étoit plus grosse qu'un cheveu, étant placée directement aux rayons du soleil qui entroient par le petit trou à une distance de 9 pieds du même trou, faisoit une ombre qui, étant reçue à 5 ou 6 pieds loin de l'objet, étoit composée de plusieurs traits d'ombre & de pénombre. Le milieu étoit une ombre foible, ou plutôt une espèce de pénombre; à chaque côté de cette pénombre il y avoit une bande étroite d'une ombre plus obscure que celle du milieu; après cette bande d'ombre il y en avoit une autre plus étroite de pénombre, ensuite une bande claire qui est plus large que l'obscur; à côté de la bande claire on voyoit des traits successivement rouges, violets & bleus comme dans l'ombre du cheveu.

J'ai encore placé de la même manière dans les mêmes rayons qui entrent par le petit trou dans une chambre obscure plusieurs aiguilles de différente grosseur: mais il seroit trop long de rapporter en particulier toutes les différentes circonstances que nous avons remarquées dans leurs ombres, tant par rapport à la largeur & à la densité de la pénombre du milieu que par rapport à la largeur & à la densité des bandes noires & claires qu'elles forment. Nous dirons seulement qu'il y a des aiguilles qui ne font qu'une pénombre foible & uniforme au milieu des deux bandes claires; d'autres qui font la bande obscure plus dense au milieu de deux bandes noires & plus étroites, après lesquelles suivent immédiatement les deux bandes claires. Il y en a d'autres qui font la

bande du milieu un peu rougeâtre , après laquelle on voit deux bandes noires qui sont suivies de deux petites bandes de pénombre , après lesquelles sont les bandes claires. Il y a des aiguilles qui sont les bandes noires & claires plus larges que d'autres aiguilles. Il y a enfin des aiguilles de moyenne grosseur qui ne sont point de pénombre aux deux côtés extérieurs de chaque bande noire , ni de bande claire qui soit sensible , & qui a coutume de paroître , après la pénombre extérieure , dans l'ombre des plus petites aiguilles & dans celle des plus grosses. Toutes ces aiguilles faisoient cependant les petits traits mêlés de rouge & de bleu aux deux côtés extérieurs de la bande claire qu'on voit dans les ombres du cheveu.

Nous ne rapporterons donc pas en détail toutes ces expériences , & nous nous contenterons des deux suivantes , qui pourront servir à découvrir ce qui se passe dans les ombres des aiguilles.

J'ai exposé dans les rayons du soleil qui entroient par un petit trou dans une chambre obscure , une plaque perpendiculairement à ces rayons , qui avoit deux pouces de long & d'un peu plus d'une demi-ligne de large. Cette plaque étant placée à 9 pieds de distance du trou , on voyoit dans son ombre , lorsqu'elle étoit reçue directement fort proche , une lumière foible qui y étoit également répandue. L'ombre de la même plaque , reçue encore directement à 2 pieds & demi de distance , paroissoit distinguée en quatre petites bandes noires fort étroites au milieu d'une pénombre plus foible ; ces bandes noires étoient proche l'une de l'autre , séparées par de petits intervalles plus clairs , égaux aux bandes noires. (*fig. 3.*) Les deux termes extérieurs de cette ombre , de côté & d'autre , étoient marqués par une pénombre , ensuite une bande fort claire qui étoit suivie comme dans les ombres des aiguilles des traits ordinaires mêlés de rouge , de violet & de bleu.

L'ombre de la même plaque , reçue directement à quatre pieds & demi de distance de la plaque , ne paroissoit plus distinguée en quatre bandes noires & claires , mais seulement.

en deux ; les deux bandes noires extérieures (*Fig. 4.*) ayant disparu , ces deux bandes noires qui restoit étoient plus larges qu'auparavant , & séparées l'une & l'autre par un intervalle d'une ombre plus foible qui étoit le double plus large que chacune des bandes noires qu'on voyoit auparavant, lorsque l'ombre étoit reçue à 2 pieds & demi de distance , cette pénombre du milieu étoit rougeâtre. Après les deux bandes noires , il y avoit une pénombre assez forte , après laquelle paroissoient les deux bandes claires assez larges & éclatantes , ensuite les traits colorés.

Une seconde plaque de 2 pouces de long & d'une ligne de large , étant placée comme la précédente dans les rayons du soleil à 14 pieds du trou par lequel entroient ces rayons , son ombre reçue directement fort proche de la plaque, étoit éclairée par une lumière foible également répandue comme dans la plaque précédente: mais étant reçue encore directement à 13 pieds de distance de la plaque, on commençoit à voir six petites bandes noires , distinguées par autant de bandes d'une ombre moins forte , de la même largeur que les bandes noires (*Fig. 5.*) ; à 17 pieds de distance de la plaque, on voyoit ces bandes noires plus larges , plus distinguées & plus séparées des autres bandes moins obscures, de sorte que les moins noires qui étoient entre deux , s'étoient aussi élargies. A 42 piés depuis la plaque, on ne voyoit plus que deux seules bandes noires au milieu d'une pénombre. (*Fig. 6.*) La pénombre du milieu , placée entre les deux bandes noires, étoit rougeâtre, les deux extrémités étoient teintes d'une foible noirceur. Après ces deux bandes de pénombre extérieures, on voyoit toujours les bandes claires qui étoient larges, & les autres traits de lumière colorée qui les suivent.

Ayant reçu l'ombre de la même plaque à 72 pieds de distance , on n'y voyoit point d'autre différence à l'égard de la situation précédente , excepté que les deux bandes noires étoient plus larges , & l'intervalle du milieu occupé par la pénombre aussi plus large & plus rougeâtre qu'auparavant.

J'ai présenté dans les mêmes rayons différentes plaques

plus larges , comme d'une ligne & demie , de 2 lignes , de 3 , &c. & ayant reçu directement les ombres de ces différens corps sur un papier , je n'ai pû distinguer dans ces ombres ces bandes de lumiere foible que l'on distingue dans les plaques plns petites , quoique j'aye reçu ces ombres à une distance de 56 pieds ; on y voyoit seulement une lumiere foible & confuse répandue également , comme l'on voit dans les ombres des deux plaques d'une demi-ligne & d'une ligne , lorsqu'elles sont reçues proche du corps qui les forme.

Si l'on avoit des lieux obscurs assez grands , dans lesquels on pût recevoir l'ombre des plaques larges à une fort grande distance , je crois que nous verrious dans ces ombres les mêmes apparences que nous voyons dans les ombres des plus petites aiguilles reçues à une mediocre distance.

De même si l'on pouvoit voir distinctement les ombres des petites aiguilles fort proche du corps qui les forme , comme l'on peut distinguer les parties des ombres des plaques qui ont une demi-ligne ou une ligne de large , on verroit peut-être les ombres de ces petites aiguilles & des cheveux distinguées en différentes bandes de lumiere & d'ombre , comme on voit les ombres des plaques d'une ligne. Mais comme pour voir cette apparence dans les ombres des cheveux , il en faudroit recevoir l'ombre fort proche où elle est fort petite , cette extrême petitesse est peut-être cause qu'on ne peut pas distinguer les différentes parties qui la composent ; cependant nous avons vû les mêmes apparences dans les ombres des aiguilles qui n'étoient que d'une grosseur ordinaire.

Voilà les phénomènes les plus singuliers que l'on observe dans les ombres des corps étroits & longs , soit qu'ils soient cylindriques , soit qu'ils soient plats , lorsqu'ils sont exposés à un rayon de soleil qui entre dans une chambre obscure par un trou extrêmement petit.

Le Pere Grimaldi a observé , comme nous avons déjà dit , ces trois bandes de lumiere & de couleur qu'on voit à chaque côté des ombres des cheveux & des autres petits corps cylindriques. Il a aussi observé ces traits de lumiere & d'om-

bre qui s'apperçoivent dans les ombres mêmes des plaques plus larges , & qui sont tantôt au nombre de quatre , tantôt au nombre de six , suivant la largeur des plaques , & il a observé que dans la même plaque , de six qu'elles sont proche , elles se réduisent à deux , ainsi que nous avons remarqué , lorsque l'ombre est reçue à la distance de 56 pieds. M. Delisle a aussi observé les mêmes apparences , comme il paroît dans un mémoire qu'il lut à l'Academie l'an 1717 , & qui n'a point été publié.

Le P. Grimaldi explique ces bandes de lumiere, tant celles qui se voyent dans l'ombre, que celles qui se voyent à chaque côté de l'ombre, par une espece d'ondulation qu'il suppose dans les rayons du soleil , qui se fait lorsqu'ils rencontrent quelque obstacle; & il explique l'agrandissement de l'ombre par une difraction qui se fait des rayons proche du cheveu.

Je tâcherai d'expliquer d'une autre maniere les apparences qui s'observent dans les ombres des cheveux, dans celles des aiguilles & dans celles des plaques , & je les expliquerai par les mêmes principes que j'ai supposé pour rendre raison des apparences observées dans les ombres des corps exposés en plein soleil ; car je crois que les unes & les autres se font à peu près de la même maniere.

Je suppose donc comme dans la premiere partie de ce mémoire , que des rayons qui vont rencontrer le corps opaque , il y en a une partie qui se réfléchit sur elle-même , & forme l'ombre à l'opposite , une autre partie se réfléchit aux côtés du corps opaque , & le reste qui n'est qu'une petite partie , se reflechit en circulant autour du corps , & après en avoir fait le tour , le quitte , & entre dans l'ombre formée par les rayons réfléchis. Je suppose qu'il y a des parties de lumiere qui ne quittent le cylindre que fort proche de l'axe de l'ombre, d'autres parties qui circulent moins , & quittent le cylindre avant que d'approcher de l'axe. Cette lumiere qui circule autour du corps , se mêlant pour ainsi dire avec l'ombre , en diminue l'obscurité dans les différens endroits où tombent ces parties de lumiere, & forme ces traits moins obscurs

obscur qu'on voit dans les ombres, lorsqu'elles sont reçues proche du corps qui les forme.

Par les expériences faites sur plusieurs petites aiguilles & sur des cheveux, il est constant que leur ombre paroît noire, lorsqu'elle est reçue à une fort petite distance du corps opaque : qu'à une distance de 3 ou 4 pieds elle n'est qu'une espece de pénombre uniforme ou une ombre fort légère ; il tombe donc en cet endroit de l'ombre un peu de lumière qui circule autour du corps opaque, & qui en diminue en cet endroit l'obscurité. L'ombre des mêmes aiguilles étant reçue fort loin de l'objet, on voit non seulement cette pénombre plus claire qu'auparavant, mais sa largeur paroît partagée en deux parties égales par un trait de lumière foible qui regne au milieu de l'ombre dans toute sa longueur. Il est donc visible qu'en cet endroit de l'ombre il tombe une plus grande quantité de lumière qu'il n'en tomboit auparavant.

Par les expériences précédentes on voit les ombres des petites plaques partagées en différentes parties suivant les différentes distances où ces ombres sont reçues à l'égard du corps qui les forme. Fort proche, on voit l'ombre distinguée en quatre ou six bandes claires séparées par autant de bandes obscures égales aux claires : ces bandes claires sont des rayons de lumière qui circulent autour des aiguilles, les uns plus, les autres moins ; il y en a qui refluent & ne quittent le cylindre que presque à l'opposite du lieu où ils le rencontrent : ceux-ci forment les bandes claires qui sont les plus proches du milieu de l'ombre. Il y a d'autres rayons qui refluent moins que les premiers, & qui quittent plutôt le cylindre pour entrer dans l'ombre ; ceux-ci forment les bandes de lumière qui sont plus proche des extrémités de l'ombre : ainsi des autres.

Ces traits de lumière qui se voyent dans l'ombre occupent un petit espace jusqu'à une certaine distance ; plus loin cette lumière se dilate & se croise, & par-là elle efface une partie de ces traits d'ombre qu'on voyoit plus proche ; car, comme nous avons dit, dans l'ombre de la plaque, large

130 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
d'une ligne environ, les six traits de lumière & d'ombre qu'on voyoit depuis 13 pieds jusqu'à la distance de 35 ou 42, étoient effacés en partie; mais plus loin que 42 pieds, on ne voyoit plus que deux bandes noires au milieu d'une lumière foible ou d'une pénombre. D'où il est visible qu'à 42 pieds de distance, la lumière, par rapport à l'ombre, avoit changé de situation.

Les deux bandes noires ne sont qu'une partie d'ombre qui n'est point mêlée avec les rayons de lumière qui reflue derrière le corps opaque; la pénombre rougeâtre qui est au milieu de deux traits d'ombre, est une partie de lumière répandue dans un grand espace de l'ombre, & les deux pénombres à chaque côté extérieur des deux bandes noires, sont des espaces de l'ombre, où il y a encore une moindre quantité de rayons que dans l'espace du milieu.

Voilà comment nous croyons qu'on peut expliquer en général cette diversité de nuances que l'on voit dans les ombres des plaques d'une demi-ligne & d'une ligne de largeur; il suffira d'en avoir donné une idée, sans être obligé d'entrer dans un plus grand détail.

L'explication de ce qui se voit dans ces plaques peut servir à rendre raison des apparences qui se voyent dans les ombres des aiguilles ordinaires, n'y ayant presque point d'autre différence entre les unes & les autres, sinon que dans les aiguilles ordinaires les mêmes apparences sont comprises dans un petit espace, & se font dans une plus petite distance du cylindre; au lieu que dans les grandes plaques, elles sont plus remarquables, & demandent une grande distance. De plus, la diversité de pénombre & d'ombre, & leur différente combinaison que l'on voit dans les ombres des aiguilles de différente grosseur, vient du différent mélange d'ombre & de lumière qui reflue & qui se fait à l'endroit où ces ombres sont reçues.

Après avoir parlé des différens degrés d'obscurité des ombres, nous passons aux bandes de lumière qui suivent les ombres.

Nous expliquons les deux bandes claires que l'on voit à côté de la bande obscure par une réflexion des rayons du soleil qui se fait sur le corps cylindrique ; car ces rayons réfléchis pour l'ordinaire en grande quantité de chaque côté par ce corps , tombent sur le papier, mêlés avec les rayons qui viennent directement du soleil ; la somme de ces deux lumières, l'une réfléchie, l'autre directe, qui se rencontrent au même endroit du papier, compose une lumière totale qui doit être plus claire & plus vive que celle qui est formée par les seuls rayons directs, comme cela est visible dans les bandes claires.

Les deux autres bandes plus petites, que l'on voit à chaque côté extérieur des deux autres plus claires, sont causées par des rayons qui, en tombant sur le corps cylindrique, s'y réfléchissent sous différens angles, & vont tomber sur le papier. Cette lumière se mêle avec les rayons directs, & forme une lumière plus vive comme la précédente.

Après avoir rendu raison de la différente densité que l'on voit dans les ombres des aiguilles & des bandes de lumière qui sont à chaque côté de ces ombres, il reste à examiner de quelle manière se peut faire l'agrandissement extraordinaire de ces ombres, qui a été remarqué par le Pere Grimaldi & par M. Newton dans les cheveux & dans les autres corps cylindriques minces.

Pour expliquer ce phénomène, je suppose qu'un corps opaque, outre l'ombre qu'il fait par les rayons directs du soleil, peut avoir encore à côté de cette ombre un grand nombre d'ombres plus foibles ; ou plutôt une ombre continue formée par les rayons réfléchis dans l'air. Ces ombres ne sont pas à la vérité visibles dans un grand jour, parce que la lumière réfléchie par les particules d'air autour du corps opaque, étant presque uniforme & répandue également autour du corps, il ne fait point d'ombre sensible par cette lumière réfléchie : mais on pourra comprendre facilement que si en quelque endroit de la place qui est autour de l'objet, on pouvoit diminuer la lumière réfléchie, &

132 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
empêcher en quelque maniere qu'en cet endroit il n'en tombât une aussi grande quantité que par-tout ailleurs, on verroit en cet endroit une ombre d'autant plus forte que la lumiere y seroit affoiblie ; or en quelque endroit que l'on fasse autour de l'objet cette diminution de lumiere, il est certain qu'il y aura une ombre causée par la lumiere réfléchie qui est à l'opposite ; ainsi cette ombre sera plus forte à l'opposite du soleil, & l'ombre formée par l'objet fera autour de lui des ombres plus foibles, qui feront la circonférence de l'horison.

Pour un plus grand éclaircissement je suppose une colonne au milieu d'une place. Cette colonne étant éclairée par les rayons directs du soleil, fera une ombre noire à l'opposite, mais elle est encore éclairée par les rayons réfléchis dans l'air, & par les objets qui sont aux environs, puisqu'elle est visible, de quelque côté qu'on la regarde, même du côté de l'ombre ; je dis que cette colonne, outre l'ombre causée par les rayons qui viennent directement du soleil, pourra faire encore tout autour des autres ombres plus foibles causées par les rayons réfléchis dans l'air qui iront en s'affoiblissant à mesure qu'elles s'éloignent de l'opposite du soleil, si l'on trouve le moyen de diminuer la lumiere uniforme réfléchie de toutes parts, qui empêche, pour ainsi dire, d'appercevoir ces ombres ; car diminuer la lumiere d'un côté, fait le même effet que de l'augmenter à l'opposite. Cela supposé, considérons les circonstances de l'expérience du Pere Grimaldi & de M. Newton.

On fait entrer par un fort petit trou, qui n'est qu'un quart de pouce, dans une chambre obscure un rayon de soleil. La lumiere faite par ce rayon est par conséquent fort foible ; on présente un cheveu ou une aiguille à ce rayon à une distance de 12 pieds du trou ; & recevant sur le carton l'ombre faite par le cheveu à 2 pieds de distance, elle paroît dix fois plus grande que l'objet ; à la distance de 10 pieds elle paroît trente-cinq fois plus grande, c'est-à-dire, toujours plus grande à mesure qu'elle s'éloigne du cheveu.

Expliquons cette expérience par les principes établis ci-dessus. La lumière du soleil introduite dans la chambre obscure par le petit trou, éclaire directement l'espace compris entre les lignes droites qui partent de l'extrémité de l'image du soleil, & passant par le diamètre du trou, vont se terminer aux bords du soleil : mais outre cette lumière qui vient directement du soleil, il entre encore par le trou une grande quantité de rayons qui sont réfléchis par l'air.

Quand donc on présente le cheveu aux rayons directs du soleil, il est éclairé non-seulement par ces rayons, mais il l'est aussi par les rayons réfléchis dans l'air voisin : donc le cheveu doit faire à l'opposite une ombre formée par les rayons directs du soleil, & outre cela il doit faire de çà & de là de l'ombre principale une autre ombre continue formée par les rayons réfléchis dans l'air ; & comme la lumière principale qui entre par le trou dans la chambre obscure, est extrêmement foible à cause de la petitesse du trou, qui n'est que la quarantième partie d'un pouce, elle n'est pas assez forte pour effacer une partie de ces ombres faites par la lumière réfléchie de côté & d'autre de l'ombre principale, enforte que de toutes ces ombres qui se forment en portion de cercle autour du cheveu, dont il est comme le centre, il se fait une ombre totale qui est plus grande que l'ombre seule formée par les seuls rayons directs du soleil, comme l'ont observé le Pere Grimaldi & M. Newton.

Il est vrai que suivant cette explication il devroit y avoir une ombre qui occupe à peu-près la demi-circonférence du cercle dont le cheveu seroit au milieu : mais deux choses peuvent empêcher qu'on ne voie cette ombre aussi grande. La première est que le degré de lumière formée par les rayons réfléchis dans l'air, va en diminuant à mesure qu'ils s'éloignent du soleil ; c'est pourquoi les ombres de ces rayons devenant toujours plus foibles à mesure qu'elles font un plus grand angle avec le rayon qui va du centre du soleil au cheveu, la plus grande partie de ces ombres est effacée par un degré de lumière plus forte, telle qu'est celle du soleil,

faite par les rayons directs introduits par le trou. L'autre raison qui empêche de voir cette ombre aussi grande, est qu'à chaque côté de cette ombre il y a une bande de lumière plus claire que le reste de la lumière faite par l'image du soleil, comme nous avons déjà dit, qui par conséquent doit effacer à l'endroit où elle se trouve une partie des ombres proche de la grande, c'est pourquoi nous ne pouvons pas voir cette ombre aussi grande qu'elle se verroit, à cause de ces bandes de lumière formées par les rayons réfléchis, qui sont à chaque côté de l'ombre.

J'ai observé qu'en mettant le cheveu fort proche du trou, il se formoit un plus grand nombre d'ombres & de traits colorés vers le côté extérieur de chaque bande claire, que lorsque le cheveu étoit éloigné du trou. Cela vient de ce que la lumière réfléchie dans l'air à l'entrée du trou, étant plus forte que lorsque le cheveu en est éloigné, elle est plus propre proche du trou à marquer un plus grand nombre d'ombres & de bandes plus fortes & plus visibles, que lorsque le cheveu est plus éloigné de l'ouverture.

Ces ombres & ces traits colorés qui sont à côté de la bande claire, se voyent même sur le papier lorsque le cheveu n'est plus éclairé par les rayons directs du soleil, ainsi que M. Delisle l'a remarqué; ce qui fait voir que ces ombres & ces traits colorés ne sont pas seulement formés par les rayons directs du soleil, mais encore par des rayons qui en sont éloignés de côté & d'autre.

Voilà de quelle manière on peut expliquer pourquoi l'ombre du cheveu est plus grande qu'elle ne doit être naturellement. Cette manière d'expliquer l'agrandissement extraordinaire de l'ombre ne suppose que les principes ordinaires d'optique.

On pourroit encore expliquer de la manière suivante l'agrandissement extraordinaire de l'ombre. Nous avons supposé qu'une partie de lumière qui rencontre le corps cylindrique, circule tout autour, & va se séparer par parties derrière le cylindre. Cette lumière qui reflue, forme autour du

cyindre une espece de tourbillon cylindrique qui s'étend à quelque distance du cylindre, de sorte que la somme des diametres du cylindre & du tourbillon est plus grande que le diametre du cylindre seul. Cela supposé, comme le tourbillon de la lumiere circule autour du cylindre, il entraîne non-seulement la partie des rayons qui reflue, mais il fait prendre la même circulation aux rayons de lumiere qui viennent directement du soleil, & qui passent de côté & d'autre du cylindre, jusqu'à la distance où le tourbillon même s'étend. Ces rayons étant détournés de leur direction, & emportés par les autres qui circulent, laissent un vuide de lumiere à l'opposite, & par cette seule raison il se fait une ombre à chaque côté de celle du cylindre; ainsi l'ombre du cylindre & celle du tourbillon ensemble doit être plus grande que celle du cylindre seul. Voilà une seconde maniere d'expliquer l'agrandissement extraordinaire de l'ombre.

Pour rendre raison par la même hypothese des bandes claires que l'on voit à chaque côté extérieur de l'ombre, on suppose que tous les rayons qui forment le tourbillon ne suivent pas si précisément la circulation, qu'il s'en échappe quelques-uns vers sa partie extérieure. Or cette lumiere qui s'échappe, se mêlant avec la lumiere directe du soleil, ces deux lumieres, jointes ensemble, forment à chaque côté de l'ombre la bande de lumiere qui est beaucoup plus éclatante que la seule lumiere qui vient directement du soleil, & entre par le petit trou dans la chambre obscure.

Les autres bandes colorées qui sont à côté de la bande claire, se peuvent expliquer par le même échappement des rayons qui sortent de la partie extérieure du tourbillon, & vont à une plus grande distance & en moindre quantité que les premiers qui forment la bande claire. Pour ce qui est des couleurs, on peut supposer avec M. Newton qu'elles sont formées par les rayons de différente espece qui sont séparés l'un de l'autre par différentes inflexions.

Comme on peut souvent rendre raison de la même apparence par différentes hypotheses, je laisse à juger quelle de

ces deux est la plus vraisemblable. Ces explications supposent à la vérité que la lumière circule autour du corps opaque : mais il paroît difficile de rendre raison d'une manière plus simple des apparences observées dans les ombres des corps opaques exposés aux rayons du soleil, tant en plein jour, que dans la chambre obscure. On peut expliquer ce mouvement que l'on suppose dans les rayons autour du corps opaque, suivant les règles ordinaires, par une suite de réflexions qui produisent un mouvement sensiblement circulaire.

Ceux qui ont expliqué avant nous cet agrandissement extraordinaire de l'ombre observée dans la chambre obscure, ont été obligés de faire pour cela seul des nouvelles suppositions. Car les uns ont supposé une diffraction dans la lumière qui se détourne du corps opaque, les autres ont cru qu'il y a une espèce d'action dans le cheveu, par laquelle il éloigne loin de lui les rayons de lumière.

On peut encore expliquer par la même hypothèse du tourbillon de lumière différentes apparences qui ont été observées dans les expériences précédentes, & que nous passerons.

Pour avoir quelque idée de ce qui arrive à la lumière dans les expériences précédentes, j'ai tâché de le découvrir par le moyen de l'eau. J'ai présenté verticalement un bâton à une fontaine d'eau qui sortoit horizontalement dans l'air libre par une ouverture ronde d'un pouce environ de diamètre. Après avoir présenté le bâton à l'eau, j'ai vu qu'elle se divisoit en quatre parties. La plus grande partie couloit en bas, une petite partie se réfléchissoit & s'élevoit perpendiculairement le long du bâton au-dessus du jet horizontal jusqu'à une certaine hauteur, après quoi elle tomboit ; le reste se divisoit, pour ainsi dire, en deux branches, dont une alloit à droite, l'autre à gauche ; & circulant avec une grande vitesse autour du cylindre, formoit une espèce de tourbillon cylindrique assez gros. Ces deux branches, après avoir fait chacune la moitié environ de la circonférence du cylindre, alloient se rencontrer presque à l'opposite, & tomber en bas.

Les

Les mêmes apparences arrivoient, soit que le diametre du bâton fût plus petit que l'ouverture par où l'eau s'écouloit, soit qu'il fût un peu plus grand. C'est sur cette experience que je me suis fondé pour supposer que la lumiere du soleil pourroit former un tourbillon semblable autour du cylindre qu'on présente dans l'image du soleil qui entre par le petit trou dans la chambre obscure.

Puisque donc l'eau, toute pesante qu'elle est dans l'air, ne tombe pas toute, lorsqu'elle rencontre le cylindre, mais qu'il y en a une partie qui circule, & ne le quitte qu'après en avoir fait la moitié ou la plus grande partie du tour, on pourroit supposer qu'une partie de la lumiere qui rencontre le cylindre, circule autour du corps dans la lumiere même.

Il paroît visible que cette circulation d'eau autour du cylindre, vient de l'impulsion que font les parties de l'eau, les unes contre les autres, & que c'est une continuation du mouvement qu'elles avoient à la sortie du tuyau, lequel mouvement se continue encore aux parties de l'eau dans le détour qu'elles sont obligées de prendre autour du cylindre. De même les parties de lumiere qui ont un mouvement infiniment plus rapide que l'eau, peuvent circuler autour du cylindre, poussées tant par les parties qui le suivent que par celles qui sont à côté.

Outre les expériences rapportées jusqu'ici sur les ombres des corps cylindriques exposés aux rayons du soleil dans une chambre obscure, on en a fait d'autres dont on se contentera de rapporter les principales.

J'ai placé deux cheveux qui se croisoient & se touchoient l'un l'autre. Les ombres de ces deux cheveux ayant été reçues à quelque distance du cheveu, paroissoient peintes réciproquement l'une sur l'autre, enforte que la partie obscure de l'une se distinguoit sur la partie obscure de l'autre. Les bandes claires se croisoient ensemble & passaient par dessus les bandes noires; les autres petites bandes qui sont à chaque côté des claires, faisoient la même apparence.

Ayant placé une aiguille qui se croisoit avec un cheveu

Mem. 1723.

S

138 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dans les rayons du soleil , on voit dans leurs ombres reçues à la même distance les mêmes apparences que dans les ombres des deux cheveux , quoique l'ombre de l'aiguille fût plus forte & plus marquée , on voyoit les ombres du cheveu sur celle de l'aiguille , & les bandes claires de l'une sur les obscures de l'autre.

J'ai mis encore dans les rayons du soleil une soie de sanglier proche d'une plaque de fer d'une ligne de largeur , enforte qu'elles se touchoient & se croisoient obliquement , faisant d'un côté des angles aigus & des obliques de l'autre. Dans leurs ombres reçues à la même distance , on voyoit du côté où étoient les angles aigus , que les bandes claires & obscures de la soie entroient jusqu'au milieu de la largeur de l'ombre de la plaque : mais elles n'y entroient pas aussi sensiblement du côté des angles obtus , soit que la plaque fût exposée la premiere aux rayons du soleil , soit qu'elle fût la dernière. La plaque faisoit alors une ombre assez noire , composée de six traits obscurs séparés l'un de l'autre par autant de traits plus clairs égaux aux noirs , comme nous avons déjà remarqué dans les expériences précédentes , de sorte que dans cette ombre noire on y distinguoit fort bien toutes les parties claires & obscures de l'ombre de la soie. (*Fig. 7.*)

Pour expliquer cette apparence , nous croyons que la lumière du soleil glisse un peu le long de la soie , & par cette maniere on éclaire une partie qui se trouve derriere la plaque , & n'est point exposée aux rayons directs du soleil. Cette lumière qui glisse un peu le long de la soie , en prolonge les ombres jusqu'au milieu de l'ombre de la petite plaque. Voilà de quelle maniere on peut expliquer cette apparence. Cette explication peut servir aussi à rendre raison de deux autres que nous avons rapportées auparavant , & de diverses autres semblables que nous avons remarquées après le Pere Grimaldi.

Expériences faites avec des globes dans une chambre obscure.

J'ai fait avec des petits globes les mêmes expériences que j'ai faites sur les petites plaques. J'ai donc exposé aux rayons du soleil qui entroient par un petit trou dans une chambre obscure, une boule d'une ligne de diametre, placée à 25 piés du trou ; son ombre ayant été reçue à 33 piés de la boule, on voyoit au milieu une aire circulaire fort claire, ensuite un anneau étroit d'ombre assez obscur, lequel étoit suivi d'un anneau beaucoup plus large de pénombre. Cette pénombre étoit terminée par un second anneau étroit & obscur, dont le diametre étoit de 3 lignes ; après cet anneau on voyoit un autre anneau assez large, de lumière vive, & ensuite les traits colorés de rouge, de violet & de bleu, comme dans les corps cylindriques, avec la seule différence que dans les globes ces apparences étoient circulaires, au lieu qu'elles étoient terminées par des lignes droites dans le corps cylindrique. (*Fig. 8.*)

J'ai fait d'autres expériences semblables avec des globes plus petits & des plus grands que le premier. Il y en avoit d'un quart de ligne, d'une demi-ligne ; il y en avoit d'une ligne & demie, & de deux lignes & un quart. Les ombres de toutes ces boules reçues à la même distance, avoient au milieu une aire circulaire de lumière qui étoit assez claire : mais cette aire avoit un différent diametre, suivant les différens diametres des globes qui les formoient ; les aires claires des boules plus grosses, étant plus petites, & les aires des boules plus petites étant plus grandes.

Cette aire de lumière que l'on voit au milieu des ombres des globes est sans doute une lumière qui reflue en grande abondance derrière le globe, & va éclairer cette partie. Les deux anneaux obscurs qui renferment l'anneau de pénombre sont des parties d'ombre sans aucun mélange de lumière, & la pénombre renfermée par ces deux anneaux est l'ombre

du globe mêlée avec un peu de lumiere qui reflue derriere le globe. Au reste les autres anneaux de lumiere qui suivent se peuvent expliquer de la même maniere que nous avons expliqué les bandes de lumiere formées par des corps cylindriques.

La lumiere plus grande au milieu des boules plus petites, fait voir qu'elle circule en plus grande abondance & plus facilement autour des petites boules qu'autour des grandes.

Si l'on compare présentement les ombres des petites boules avec celles des petits cylindres & des petites plaques, il est évident qu'il y a beaucoup plus de lumiere dans les ombres des globes que dans celles des cylindres, non seulement lorsque les uns & les autres sont d'un diametre égal, mais lorsque le diametre du globe est plus grand que le diametre du cylindre, les ombres de tous ces corps étant reçues à la même distance du corps opaque.

Il faut encore remarquer que nous n'avons pu appercevoir aucune distinction de lumiere séparée de l'ombre dans les ombres des plaques qui avoient un peu plus d'une ligne de largeur, quoique ces ombres ayent été reçues à des distances fort grandes, comme de 72 piés; mais qu'ayant reçu à la même distance les ombres des globes, lesquels globes avoient jusqu'à 2 lignes & un quart de diametre, on a vu une diversité de nuances dans leurs ombres.

Cette plus grande lumiere que l'on a remarquée dans les ombres des globes que dans celles des cylindres, vient de ce que les rayons du soleil circulent plus facilement & en plus grande abondance autour des globes qu'autour des cylindres & des plaques, parce que dans le globe ils ont plus de liberté de circuler tout autour, au lieu qu'ils ne peuvent refluer que des deux côtés du cylindre, ainsi que nous l'avons déjà dit à l'occasion des experiences faites en plein soleil.

Après ces expériences je ne laisserai pas d'en rapporter encore d'autres qui ont été faites dans le dessein de découvrir, s'il étoit possible, l'origine de ces couleurs que l'on voit

dans les ombres des aiguilles , quoique je n'aye pas pû jusqu'à présent me satisfaire sur cet article.

J'ai placé dans les rayons du soleil qui entroient dans une chambre obscure deux ou trois aiguilles à différentes distances du trou , & à peu près dans une même ligne droite , afin qu'une partie de l'ombre d'une aiguille tombât sur la partie de l'ombre de l'autre. Cela étant , j'ai remarqué que lorsque la bande claire formée par une aiguille tomboit sur la bande claire formée par une autre aiguille , cette double lumiere jointe ensemble , formoit une bande plus claire que lorsqu'elles étoient séparées , comme il a été remarqué par M. Newton à l'occasion d'autres experiences qu'il a faites. De même lorsque la couleur qui formoit le bleu dans les deux ombres étoient jointes ensemble , cette couleur paroissoit beaucoup plus vive & plus éclatante que lorsqu'elles étoient séparées. Il arrivoit la même chose , lorsque les deux couleurs rouges se rencontroient ensemble , car elles formoient une belle couleur d'or.

Après avoir joint ensemble ces couleurs de même nature pour en former une plus vive , nous avons essayé de faire passer la bande claire d'une aiguille sur les différentes parties de l'ombre faite par une seconde aiguille , & j'ai remarqué que lorsque la bande claire d'une aiguille tomboit sur la pénombre extérieure formée par l'autre aiguille , on voyoit une belle couleur de bleu celeste , à peu près comme elle paroissoit quand on faisoit tomber les deux couleurs bleues ensemble. Et lorsque la même bande claire se rencontroit sur l'ombre plus forte du milieu , cette union formoit une couleur rouge ; ce qui prouve en quelque maniere que cette couleur rougeâtre qu'on voit au milieu des ombres d'un grand nombre d'aiguilles , peut venir du peu de lumiere qui reflue dans cette ombre.

J'ai mis deux petites plaques de fer , larges chacune de 3 ou 4 lignes l'une proche de l'autre , de sorte qu'il y avoit un petit intervalle entre deux. Les ayant exposées aux rayons du soleil , & ayant reçu leurs ombres à 15 ou 20 piés loin.

142 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
des plaques , il n'y avoit aucune lumiere entre deux , mais on voyoit une ombre continue , au milieu de laquelle paroissent quatre traits d'une couleur de pourpre vive. Ces traits étoient paralleles entre eux , & séparés l'un de l'autre par d'autres traits noirs , distingués de ceux de couleur de pourpre par d'autres traits d'un vert fort foible & d'un jaune aussi pâle. M. Delisle a remarqué aussi des couleurs dans les traits de lumiere & d'ombre qu'on voit dans les ombres reçues proche des corps.

Quelque attention que j'aye apporté pour faire exactement ces dernieres expériences sur le mélange des couleurs, je ne promets pas d'avoir toujours rencontré juste , à cause de la difficulté qu'il y a de faire tomber précisément les parties d'un ombre sur des parties différentes de l'autre.

A l'occasion des couleurs formées par la réflexion des rayons du soleil , j'ai répété l'expérience suivante , rapportée par le Pere Grimaldi. J'ai fait entrer dans une chambre obscure la lumiere du soleil par une ouverture qui avoit environ un demi-pouce de diametre. A la distance de 7 ou 8 pieds du trou , j'ai présenté à la lumiere du soleil qui entroit par ce trou , un corps cylindrique de bois ou de cuivre d'un pouce de diametre ; j'ai appliqué ce cylindre à l'image du Soleil , desorte qu'une partie de cette image tomboit sur le cylindre , l'autre tomboit dehors. Dans cette situation il se faisoit une réflexion de rayons du soleil par le corps cylindrique , & cette réflexion formoit une trainée de lumiere en maniere de demi-cercle , dont le centre étoit à l'endroit du cylindre où tomboit l'image du soleil. Avant reçu sur un carton blanc une partie de cette lumiere réfléchie , en quelque endroit que ce fût de la demi-circonférence , on voyoit dans cette lumiere une grande diversité de couleurs toutes belles & vives. Ces couleurs étoient du rouge , du violet , du jaune , du bleu & du vert ; de sorte qu'étant reçues sur le carton blanc , on auroit crû qu'il étoit un de ces papiers marqués de ces différentes couleurs. Il n'y avoit que proche de l'image du soleil où cette lumiere étoit plus étroite &

Fig. 2.

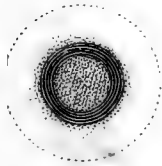


Fig. 3.



Fig. 4.

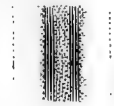


Fig. 6.



Fig. 7.

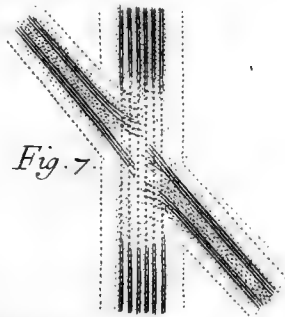


Fig. 8.



Fig 1



Fig 2



Fig 3



Fig 4



Fig 5



Fig 6



Fig 7

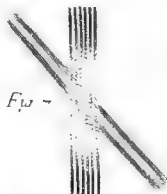


Fig 8



plus ramassée, qu'on ne voyoit point ces couleurs, au moins distinctement, mais seulement une lumière à peu près comme celle du soleil.

DES DIVERSES METHODES
de déterminer l'apogée & le perigée, ou l'aphélie &
le périhélie des planetes.

Par M. CASSINI.

ON sçait que les planetes ne sont pas toujours à égale distance du soleil & de la terre, autour desquels elles font leurs révolutions, mais qu'elles s'en trouvent tantôt plus tantôt moins éloignées; ce qui provient non-seulement de ce que le soleil ou la terre ne sont pas précisément au centre de leur orbe, mais aussi de ce que ces orbes ne sont pas exactement circulaires.

16 Juin
1723.

Quelque soit la figure de cet orbe, il est certain qu'il y a un point où chaque planete se trouve dans sa plus grande distance, que l'on appelle apogée, lorsqu'on la considere à l'égard de la terre, & aphélie, lorsque c'est par rapport au soleil; le point opposé de cet orbe supposé régulier, s'appelle perigée à l'égard de la terre, & périhélie par rapport au soleil.

Il est aisé de reconnoître de quelle importance il est dans l'astronomie de pouvoir déterminer exactement la situation de ces points dans le zodiaque, & leur distance à la terre ou au soleil, puisque c'est de-là principalement que l'on peut conjecturer la figure des orbes des planetes & leur mouvement véritable, qui sont les objets principaux de cette science.

Mais autant que la connoissance exacte de la situation de ces points est nécessaire, autant est-il difficile de la déterminer exactement. Car comme vers ces points la distance des planetes à la terre ou au soleil, varie presque insensiblement, il est très-difficile de s'appercevoir du lieu précis où elles se

trouvent à leur plus grande distance , & où elles commencent à s'approcher de la terre & du soleil , après s'en être éloignées le plus qu'il a été possible ; ou bien le temps où elles commencent à s'éloigner de la terre ou du soleil , après s'en être approchées à leur plus petite distance.

Ainsi j'ai crû devoir exposer les principaux moyens que l'on peut employer pour parvenir à cette connoissance , en discernant ceux qui méritent la préférence , & quelles sont les circonstances où on peut s'en servir le plus utilement. Mais avant que d'exposer ces méthodes , il est à propos de remarquer , que quoique nous convenions que la plupart des planetes fassent leurs révolutions autour du soleil qui se trouve à l'un des foyers de leur orbe ; cependant la situation où nous nous trouvons , nous oblige de les considérer par rapport à la terre.

Pour ce qui est de la lune , tous les astronomes sont d'accord qu'elle fait sa révolution autour de la terre , ainsi on parlera de son apogée & du périégée.

A l'égard du soleil , il est indifférent pour cette recherche de supposer qu'il tourne autour de la terre , ou que la terre fasse sa révolution autour de lui. Dans cette dernière supposition , on appellera aphélie & perihélie de la terre , ce que l'on nomme vulgairement apogée ou périégée du soleil.

Il n'en est pas de même des autres planetes , il est nécessaire de déterminer leur aphélie ou leur perihélie , parce qu'elles tournent réellement autour du soleil.

Comme leurs révolutions autour du soleil , ne s'achevent pas en même-temps que celle de la terre autour du soleil , ou du soleil autour de la terre , il suit qu'elles se trouvent plus près de la terre dans des temps où elles sont plus éloignées du soleil , & qu'au contraire elles paroissent s'éloigner de la terre dans d'autres temps où elles s'approchent du soleil. Ainsi nous ne pouvons déterminer leur distance au soleil , qu'en réduisant leur distance à la terre à celle qu'elles ont par rapport au soleil.

Mais comme ces rapports de distances supposent des hypothèses

potheses astronomiques, & que la moindre erreur dans ces hypotheses en peut causer de fort grandes dans la détermination des apogées, qui demande une grande exactitude; nous avons jugé qu'on ne pouvoit employer sûrement que les occasions où le soleil & la planete se trouvent à l'égard de la terre dans le même point du zodiaque, ou dans celui qui lui est opposé; car alors il n'y a pas de difficulté d'assigner à la planete, vûe du soleil, le même lieu où elle est apperçûe de la terre.

Il est aisé de voir que le temps de ces observations n'arrive que dans leurs conjonctions & oppositions avec le soleil.

A l'égard des conjonctions, on ne peut pas appercevoir celles des planetes supérieures, telles que Saturne, Jupiter & Mars; car ou elles sont cachées derriere le soleil, lorsque leur conjonction est presque centrale, ou bien sa lumiere empêche de les appercevoir, lorsqu'elles passent en conjonction avec une latitude méridionale ou septentrionale plus grande que le demi-diametre du soleil.

A l'égard des planetes inférieures, elles passent toujours dans leurs conjonctions inférieures entre le soleil & la terre; c'est pourquoi on peut les appercevoir sur le disque du soleil, lorsqu'elles ont très-peu de latitude, ce qui arrive cependant très-rarement. Lorsque leur latitude surpasse le demi-diametre du soleil, elles passent dessus ou dessous en conjonction, & dans cet état on ne peut voir que Venus, car pour Mercure il est trop petit pour pouvoir être alors apperçû. On les distingue encore moins dans leurs conjonctions supérieures, où elles passent derriere le soleil, ou bien dessus ou dessous, à une trop grande distance de la terre pour pouvoir en être apperçûes.

Pour ce qui est des oppositions des planetes supérieures, on les observe très-facilement, parce qu'elles arrivent au milieu de la nuit; & ce sont ces observations qui arrivent à peine une fois dans chaque année, dont nous nous servons principalement pour déterminer leurs aphélies & perihélies.

Il faut aussi remarquer que quoique la lune fasse sa ré-

Mem. 1723.

T

146 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
volution autour de la terre ; elle est sujette à des inégalités qui l'éloignent plus ou moins de la terre en différens endroits de son orbe ; de sorte qu'on ne peut guere employer, pour déterminer son apogée , que les observations de ses conjonctions ou oppositions avec le soleil , auquel temps elle n'a d'autre inégalité que celle qui résulte de son excentricité à l'égard de la terre & de la figure de son orbe.

Toutes ces remarques étoient nécessaires pour juger que les méthodes que nous allons donner pour déterminer l'apogée & le périégée des planetes , ne conviennent toutes qu'au soleil ; qu'il y en a dont on ne peut faire aucun usage pour les planetes , & qui conduiroient même à l'erreur ; & qu'ainsi il ne faut employer que celles qui conviennent dans certaines circonstances qu'on aura soin d'indiquer.

Premiere méthode de déterminer l'apogée & le périégée du soleil.

La premiere méthode qui se présente pour déterminer l'apogée & le périégée du soleil , est d'observer le vrai lieu du soleil , lorsque son diametre paroît le plus grand & le plus petit : car pour les regles de l'optique , la grandeur apparente d'un même objet qui s'approche ou s'éloigne de nous , étant en proportion réciproque de ses diverses distances , il est évident que le soleil est dans son apogée , lorsque son diametre nous paroît le plus petit , & qu'il est au contraire dans son périégée , lorsqu'il nous paroît le plus grand.

Mais comme le soleil , dans le temps de son passage par son apogée & son périégée , est plusieurs jours sans que son diametre paroisse augmenter ou diminuer sensiblement de grandeur , il faut l'observer par un micrometre ou par des réticules placés au foyer d'une lunette , plusieurs jours avant & après , choisissant les heures auxquelles il se trouve à la même hauteur sur l'horison , afin d'éviter les erreurs causées par la parallaxe & la réfraction. On comparera ensemble ces observations , & en ayant trouvé deux où le diametre du

soleil a paru de la même grandeur, on partagera en deux parties égales l'intervalle qui s'est écoulé entre le temps de ces observations, qui étant ajouté au temps de la première, donne le temps auquel le soleil est arrivé à son apogée ou à son périégée.

On déterminera pour le temps de ces deux observations le vrai lieu du soleil, qu'on peut calculer immédiatement par sa hauteur méridienne. Le milieu entre ces deux vrais lieux donne le vrai lieu de l'apogée ou du périégée du soleil.

Il est aisé de reconnoître que cette méthode ne peut être employée que pour déterminer l'apogée & le périégée du soleil, de même que ceux de la lune dans le temps seulement des oppositions, pour les raisons que nous avons déduites ci-dessus, & parce qu'il n'y a que ce temps-là qu'on peut appercevoir le diametre entier de la lune. A l'égard des autres planetes, leur diametre apparent est si petit, qu'on ne pourroit pas y reconnoître de différence assez sensible.

Seconde méthode de déterminer l'apogée & le périégée du soleil.

On observera plusieurs jours de suite la hauteur méridienne du bord supérieur & du bord inférieur du soleil avant son passage par l'apogée ou le périégée. Corrigeant ces hauteurs par la réfraction & la parallaxe, on aura la grandeur véritable du diametre du soleil, & sa déclinaison pour le jour de chaque observation. On cherchera ensuite le jour auquel le diametre du soleil, ainsi corrigé a paru après son passage par l'apogée ou le périégée, de la même grandeur que dans une observation précédente. La déclinaison du soleil étant connue, on trouvera par la trigonométrie sphérique le vrai lieu du soleil pour le temps des deux observations correspondantes. La différence étant partagée en deux parties égales, & ajoutée au vrai lieu du soleil pour le jour de la première observation, donne le vrai lieu de son apogée ou de son périégée.

Cette méthode ne peut pas être employée pour les planètes , par les raisons que nous avons alléguées ci-dessus.

Troisième méthode de déterminer l'apogée & le périégée du soleil.

Ayant placé au foyer d'une lunette un fil vertical , on mesurera le temps que le soleil emploie à passer par le méridien en diverses saisons de l'année , & on convertira ce temps en degrés , minutes & secondes à raison de 15 degrés par heure.

Comme le soleil décrit par son mouvement journalier un cercle parallèle à l'équateur , dont les degrés diminuent de grandeur à mesure que sa déclinaison à l'égard de l'équateur va en augmentant , il arrive que son diamètre occupe alors un plus grand arc de ce parallèle : c'est pourquoi il faut réduire le temps de son passage , converti en degrés & minutes de son parallèle , en degrés & minutes d'un grand cercle de la sphere , en faisant comme le sinus total est au sinus du complément de la déclinaison du soleil au temps de l'observation : ainsi les minutes & secondes de degré que le diamètre du soleil occupe sur le parallèle , sont aux minutes & secondes d'un grand cercle qu'occupe le diamètre du soleil pris sur l'équateur.

On choisira deux observations correspondantes , dans lesquelles le diamètre du soleil ainsi réduit , se trouve de la même grandeur ; & on calculera par le moyen de la déclinaison du soleil son vrai lieu dans ces deux différentes situations. La différence étant partagée en deux parties égales , & ajoutée au vrai lieu du soleil pour le temps de la première observation , donne le vrai lieu de l'apogée ou du périégée du soleil.

Cette méthode , de même que les deux précédentes , ne peut être employée que pour déterminer l'apogée & le périégée du soleil , & elle a cet avantage , qu'elle n'est point sujette à aucune variation causée par la réfraction & la parallaxe.

*Quatrieme methode de déterminer l'apogée & le périgée
du soleil.*

On observera plusieurs jours de suite en diverses saisons de l'année la hauteur méridienne du soleil , qui étant corrigée par la réfraction & la parallaxe , & comparée à la hauteur de l'équateur , donnera la déclinaison du soleil pour les jours de ces différentes observations. Cette déclinaison étant déterminée , & connoissant l'obliquité de l'écliptique , que l'on suppose de $23^{\circ} 29' 0''$, on calculera par la trigonométrie spherique le vrai lieu du soleil pour le temps de chaque observation.

Ayant ainsi connu le mouvement vrai du soleil pendant l'intervalle d'un ou de plusieurs jours , on cherchera dans une autre saison , le temps où le mouvement vrai du soleil a été égal à celui qu'on lui a reconnu pendant le même nombre de jours , la différence entre le vrai lieu du soleil déterminé par les observations correspondantes étant partagée en deux également , & ajoutée au vrai lieu du soleil de la premiere observation , donne le vrai lieu de l'apogée & du périgée du soleil.

Lorsque le mouvement vrai du soleil en longitude pendant un certain nombre de jours est plus grand ou plus petit que dans le même nombre de jours correspondans , on comparera les observations des jours qui précèdent ou suivent immédiatement , & sont telles que dans un pareil nombre de jours la quantité du mouvement du soleil soit plus grande ou plus petite que dans la premiere comparaison. On déterminera l'apogée ou le périgée du soleil qui résulte de ces observations , & on aura la différence entre les deux déterminations de l'apogée , dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différente quantité du mouvement , qu'il faut appliquer au lieu de l'apogée du périgée trouvé par la premiere détermination , pour avoir le vrai lieu de l'apogée & du périgée du soleil.

Cette méthode suppose que la différence entre le temps vrai & le temps moyen dans l'intervalle des premières observations, est égale à la différence entre le temps vrai & le temps moyen dans l'intervalle des observations correspondantes, ou qu'elle n'en diffère pas sensiblement ; car autrement il faudra réduire le temps vrai de chaque intervalle en temps moyen. On prendra le mouvement du soleil qui convient à la différence entre le temps moyen de chacun de ces intervalles qu'on retranchera du vrai mouvement observé dans le plus grand intervalle. On comparera ensuite ces vrais mouvemens de la manière qu'on vient de l'expliquer pour déterminer le vrai lieu de l'apogée & du périégée du soleil.

Il est aisé de reconnoître que cette méthode demande un grand nombre d'observations de hauteurs méridiennes du soleil, afin de pouvoir choisir celles qui sont les plus propres pour cette détermination, lesquelles doivent être éloignées les unes des autres, afin que les différences entre les mouvemens observés soient plus sensibles.

On peut l'employer aussi pour la lune & les autres planètes, pourvu qu'on ait assez d'observations pour trouver des intervalles égaux où le mouvement vrai d'une planète avant & après son passage par l'apogée ou le périégée soit de la même quantité.

E X E M P L E.

Le 29 Janvier de l'année 1717, la hauteur méridienne apparente du soleil a été observée de $23^{\text{d}} 36' 15''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale à midi de $17^{\text{d}} 52' 0''$, & sa longitude de $309^{\text{d}} 39' 8''$.

Le 14 Mai suivant, la hauteur méridienne apparente du bord supérieur du soleil a été observée de $60^{\text{d}} 5' 50''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $18^{\text{d}} 39' 38''$, & sa longitude de $53^{\text{d}} 24' 46''$.

La différence entre ces deux longitudes est de $103^{\text{d}} 45' 38''$, qui mesurent le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de 104 jours, depuis le 29 Janvier, jusqu'au 14 Mars de l'année 1717.

Le 13 Août de la même année, la hauteur méridienne du bord supérieur du soleil a été observée de $56^{\text{d}} 5' 20''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $14^{\text{d}} 42' 2''$, & sa longitude de $140^{\text{d}} 26' 40''$.

Le 26 Novembre suivant, la hauteur méridienne du bord supérieur du soleil a été observée de $20^{\text{d}} 27' 50''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale de $21^{\text{d}} 0' 35''$, & sa longitude de $244^{\text{d}} 7' 19''$.

Le mouvement du soleil en longitude dans le même intervalle de 104 jours, depuis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre 1717, a donc été de $103^{\text{d}} 40' 39''$, plus petit de 4 minutes 59 secondes que depuis le 29 Janvier jusqu'au 14 Mai de la même année.

La différence entre le temps vrai & le moyen dans le premier intervalle est de $17' 48''$, plus grande seulement d'une minute 8 secondes que dans le second intervalle, auxquels il répond 3 secondes de vrai mouvement qu'il faut retrancher du mouvement vrai du soleil, déterminé dans le premier intervalle de $103^{\text{d}} 45' 38''$, & on aura $103^{\text{d}} 45' 35''$.

Comparant l'observation du 14 Mai, où la longitude du soleil étoit de $53^{\text{d}} 24' 46''$, avec celle du 13 Août, où on l'a trouvée de $140^{\text{d}} 26' 40''$, on aura le vrai mouvement du soleil dans cet intervalle de $87^{\text{d}} 1' 54''$, dont la moitié $43^{\text{d}} 30' 57''$, étant ajoutée à $53^{\text{d}} 24' 46''$, donne $96^{\text{d}} 55' 43''$.

Comme dans ces observations le mouvement du soleil en longitude dans le premier intervalle de $103^{\text{d}} 45' 35''$ est plus grand de $4' 56''$ que celui qui a été observé de $103^{\text{d}} 40' 39''$ depuis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre, on examinera les observations des jours suivans, & on trouvera que le 14 Août la hauteur méridienne apparente du bord supérieur du soleil a été observée de $55^{\text{d}} 49' 30''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $14^{\text{d}} 23' 11''$, & sa longitude de $141^{\text{d}} 25' 36''$.

Le 27 Novembre suivant, la hauteur méridienne du bord

152 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
supérieur du soleil étoit de $20^{\text{d}} 16' 30''$, ce qui donne sa
déclinaison méridionale de $21^{\text{d}} 12' 7''$, & sa longitude de
 $245^{\text{d}} 10' 19''$.

La différence entre la longitude du soleil du 14 Mai &
du 27 Novembre, mesure son mouvement vrai dans cet
intervalle qui est de $103^{\text{d}} 44' 43''$, plus grand de $4' 4''$ que
depuis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre, & plus petit de
52 secondes que depuis le 29 Janvier jusqu'au 14 Mai.

Comparant l'observation du 14 Mai, où la longitude
étoit de $53^{\text{d}} 24' 46''$ avec celle du 14 Août, où on l'a trou-
vée de $141^{\text{d}} 25' 36''$, on aura le mouvement du soleil dans
cet intervalle de $88^{\text{d}} 0' 50''$, dont la moitié $44^{\text{d}} 0' 25''$ étant
ajoutée à $53^{\text{d}} 24' 46''$, donne $97^{\text{d}} 25' 11''$.

Comme la différence entre le mouvement du soleil qui
résulte des observations des 14 & 27 Novembre est encore
plus petite de 52 secondes que celle qui résulte des obser-
vations des 29 Janvier & 14 Mai, on voit que le vrai lieu
de l'apogée doit être au-delà de la dernière détermination :
c'est pourquoi l'on fera comme $4' 4''$ différence, dont le
mouvement du soleil en longitude depuis le 14 Août jus-
qu'au 27 Novembre, est plus grand que son mouvement de-
puis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre, sont à 52 secon-
des différence, dont le mouvement en longitude depuis le
14 Août jusqu'au 27 Novembre, est plus petit que depuis
le 29 Janvier jusqu'au 14 Mai; ainsi $29' 28''$, différence
entre l'apogée du soleil qui résulte des deux comparaisons
précédentes, sont à $6' 17''$ qu'il faut ajouter au lieu de l'a-
pogée trouvé par la dernière détermination de $97^{\text{d}} 25' 11''$,
pour avoir le vrai lieu de l'apogée du soleil en 1717 à $7^{\text{d}} 31' 28''$ de l'écreviffe.

Il est aisé de voir jusqu'à quelle précision on peut déter-
miner le vrai lieu de l'apogée par cette méthode, puisque
dans cet exemple une différence de 52 secondes dans le vrai
lieu du soleil, en cause une de $6' 17''$ dans la détermination
de l'apogée du soleil, ce qui est à raison de $14' 30''$ pour
deux minutes de différence dans le vrai lieu du soleil, qui
est

est une erreur beaucoup plus grande que celle qui peut résulter des observations faites avec précision. Ainsi l'on peut s'assurer que par cette méthode on déterminera le vrai lieu de l'apogée à moins d'un quart de degré près, & même avec beaucoup plus d'exactitude, si l'on n'y emploie que des observations choisies & faites dans les circonstances convenables, en assez grand nombre pour rectifier les unes par les autres

Cinquieme methode de déterminer l'apogée & le périégée du soleil.

On observera en diverses saisons de l'année, le passage par le méridien du soleil & d'une étoile fixe, dont l'ascension droite est connue. Réduisant en degrés la différence entre ces passages, à raison de 15 degrés par heure, on aura la différence entre l'ascension droite du soleil & celle de cette étoile au temps de son passage par le méridien, qu'il faut ajouter à l'ascension droite de l'étoile, lorsque son passage précède celui du soleil, & qu'il faut retrancher de l'ascension droite de l'étoile, lorsque son passage suit celui du soleil, & on aura l'ascension droite du soleil au temps du passage de l'étoile par le méridien, avec laquelle on trouvera la longitude véritable du soleil pour ce temps.

On déterminera de la même manière la longitude véritable du soleil pour le jour suivant où tel autre que l'on voudra, & l'on aura le mouvement vrai du soleil pendant un certain nombre de jours.

On trouvera par la même méthode, dans une autre saison, le vrai lieu du soleil, & l'on cherchera le temps où le mouvement du soleil en longitude est égal à son mouvement observé pendant le même nombre de jours. La différence entre le vrai lieu du soleil qui résulte des observations correspondantes, étant partagée en deux également, & ajoutée à la première observation, donne le vrai lieu de l'apogée & du périégée du soleil.

Lorsque le mouvement vrai du soleil, pendant ces deux intervalles de temps égaux, n'est pas précisément de la même

quantité, on comparera les observations des jours qui précédent ou suivent immédiatement, & sont telles que la quantité du mouvement comprise dans un même intervalle de temps, soit plus grande ou plus petite que dans la première comparaison, on déterminera l'apogée ou le périhélie du soleil qui résulte de ces observations, & on aura la différence entre les deux déterminations de l'apogée, dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différence quantité du mouvement, qu'il faut appliquer au lieu de l'apogée ou du périhélie trouvé par la première détermination, pour avoir le vrai lieu de l'apogée ou du périhélie du soleil.

On peut se servir, pour cette détermination, de différentes étoiles fixes, & au cas que l'on ne connoisse point exactement leur ascension droite, il faudra observer la hauteur méridienne du soleil dans les temps où sa déclinaison varie considérablement d'un jour à l'autre, & calculer son ascension droite, à laquelle on ajoutera le mouvement du soleil en ascension droite qui convient à la différence entre le passage du soleil & de l'étoile par le méridien, lorsque le passage de l'étoile est après midi, & de laquelle on retranchera ce mouvement, lorsque l'étoile a passé le matin, & on aura l'ascension droite véritable du soleil au temps du passage de l'étoile par le méridien. Y ajoutant la différence entre le passage du soleil & de l'étoile par le méridien, réduite en degrés, lorsque l'étoile a passé par le méridien après midi; ou le retranchant, lorsque son passage est avant midi, on aura l'ascension droite véritable de l'étoile, avec laquelle on déterminera le vrai lieu de l'apogée ou du périhélie du soleil, de la manière qu'on l'a expliquée ci-dessus.

E X E M P L E.

Le passage de Sirius par le méridien a été observé le 21 Mai de l'année 1717 à $2^h 40' 20''$, & le 22 Mai à $2^h 36' 20''$.

Réduisant ces heures en degrés, on aura la différence d'ascension droite entre le soleil & cette étoile le 21 Mai

de $40^{\text{d}} 5' 0''$, & le 22 Mai de $39^{\text{d}} 5' 0''$, qui étant retranchés de l'ascension droite de cette étoile qui étoit alors de $98^{\text{d}} 11' 3''$, à cause que son passage a suivi celui du soleil, donne l'ascension droite du soleil le 21 Mai 1717 à $2^{\text{h}} 40' 20''$ de $58^{\text{d}} 6' 3''$, & le 22 Mai à $2^{\text{h}} 36' 20''$ de $59^{\text{d}} 6' 3''$, par le moyen desquelles on trouvera la longitude du soleil le 21 Mai 1717 à $2^{\text{h}} 40' 20''$, de $60^{\text{d}} 16' 44''$, & le 22 Mai à $2^{\text{h}} 36' 20''$, de $61^{\text{d}} 14' 15''$. La différence, qui est de $57^{\text{d}} 31'$, mesure le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de $23^{\text{h}} 56' 0''$.

Le 6 Août suivant, le passage de la luisante de l'Aigle par le meridian a été observé à $10^{\text{h}} 30' 27'' \frac{1}{2}$, & le 7 Août à $10^{\text{h}} 26' 38''$.

Réduisant ces heures en degrés, on aura la différence d'ascension droite entre le soleil & cette étoile le 6 Août de $157^{\text{d}} 36' 52'' \frac{1}{2}$, & le 7 Août de $156^{\text{d}} 39' 30''$, qui étant retranchés de l'ascension droite de la luisante de l'Aigle qui étoit alors de $294^{\text{d}} 13' 44''$, donne l'ascension droite du soleil le 6 Août 1717 à $10^{\text{h}} 30' 27'' \frac{1}{2}$ du soir de $136^{\text{d}} 36' 51'' \frac{1}{2}$, & le 7 Août à $10^{\text{h}} 26' 38''$, de $137^{\text{d}} 34' 14''$, par le moyen desquelles on trouvera la longitude du soleil le 6 Août 1717 à $10^{\text{h}} 30' 27'' \frac{1}{2}$ du soir de $134^{\text{d}} 8' 18'' \frac{1}{2}$, & le 7 Août à $10^{\text{h}} 26' 38'' \frac{1}{2}$ de $135^{\text{d}} 5' 50''$. La différence qui est de $57' 31'' \frac{1}{2}$, mesure le mouvement vrai du soleil en longitude pendant l'intervalle de $23^{\text{h}} 56' 10''$, avec une différence de 10 secondes dans le temps, & d'une demi-seconde dans le mouvement, de ce qui a été trouvé entre l'observation du 21 & 22 Mai.

Négligeant ces différences qui sont insensibles, & qui d'ailleurs se compensent l'une l'autre, on trouvera qu'au temps de la première observation, la longitude du soleil étoit de $60^{\text{d}} 16' 44''$, & au temps de la dernière de $135^{\text{d}} 5' 50''$. La différence, qui est de $74^{\text{d}} 49' 6''$, étant partagée en deux parties égales, on aura $37^{\text{d}} 24' 33''$, qui étant ajoutés à $60^{\text{d}} 16' 44''$, donne le lieu de l'apogée du soleil à $7^{\text{d}} 41' 17''$ de l'Ecrevisse.

Si l'on suppose présentement, que l'ascension droite de ces deux étoiles n'est pas connue, on trouvera par l'observation de la hauteur méridienne du soleil sa déclinaison septentrionale le 21 Mai à midi de $20^{\text{d}} 12' 51''$, & le 22 Mai à midi de $20^{\text{d}} 25' 31''$, ce qui donnera sa déclinaison le 21 Mai à $2^{\text{h}} 40' 20''$, temps du passage de Sirius par le méridien de $20^{\text{d}} 14' 45''$, avec laquelle on trouvera sa longitude de $60^{\text{d}} 16' 31''$, & son ascension droite de $58^{\text{d}} 5' 48''$. Y ajoutant $40^{\text{d}} 5' 0''$, qui répondent à $2^{\text{h}} 40' 20''$ différence entre le passage du soleil & de Sirius par le méridien, on aura l'ascension droite de cette étoile le 21 Mai à $2^{\text{h}} 40' 20''$ de $98^{\text{d}} 10' 48''$.

Le 22 Mai le passage du Sirius par le méridien fut observé à $2^{\text{h}} 36' 20''$, qui étant converties en degrés, font $39^{\text{d}} 5''$, qui étant retranchés de $98^{\text{d}} 10' 48''$ donne l'ascension droite du soleil le 22 Mai à $2^{\text{h}} 36' 20''$ de $59^{\text{d}} 5' 48''$, avec laquelle on trouvera sa longitude de $61^{\text{d}} 14' 2''$.

La différence entre cette longitude & celle du jour précédent est de $57' 31''$ qui mesurent le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de $23^{\text{h}} 56' 0''$.

Le 6 Août suivant la déclinaison septentrionale du soleil a été observée à midi de $16^{\text{d}} 43' 46''$, & le 7 Août de $16^{\text{d}} 27' 26''$, ce qui donne la déclinaison du soleil le 6 Août à $10^{\text{h}} 30' 27'' \frac{1}{2}$, temps du passage de l'Aigle par le méridien de $16^{\text{d}} 36' 37''$, avec laquelle on trouvera le vrai lieu du soleil de $134^{\text{d}} 9' 42'' \frac{1}{2}$, & son ascension droite de $136^{\text{d}} 38' 16''$. Y ajoutant $157^{\text{d}} 36' 52'' \frac{1}{2}$ qui répondent à $10^{\text{h}} 30' 27'' \frac{1}{2}$, différence entre le passage du soleil & de l'Aigle par le méridien, on aura l'ascension droite de cette étoile le 6 Août de $294^{\text{d}} 15' 8'' \frac{1}{2}$.

Le 7 Août le passage de l'Aigle par le méridien fut observé à $10^{\text{h}} 26' 38'' \frac{1}{2}$, qui étant converties en degrés, font $156^{\text{d}} 39' 30''$, qu'il faut retrancher de $294^{\text{d}} 15' 8'' \frac{1}{2}$ pour avoir l'ascension droite du soleil le 7 Août à $10^{\text{h}} 26' 38''$ de $137^{\text{d}} 35' 38'' \frac{1}{2}$, avec laquelle on trouvera le vrai lieu du soleil le 7 Août à $10^{\text{h}} 26' 38''$ de $135^{\text{d}} 7' 14''$. La diffé-

rence entre cette longitude & celle du jour précédent est de $57^{\circ} 31' \frac{1}{2}$ qui mesurent le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de $23^h 56' 10''$.

Négligeant ces petites différences qui sont compensées en partie l'une par l'autre, on trouvera au temps de la premiere observation la longitude du soleil de $60^{\circ} 16' 31''$, & au temps de la seconde de $135^{\circ} 7' 14''$. Prenant un milieu, on aura le vrai lieu de l'apogée du Soleil à $7^{\circ} 41' 52''$ de l'écrevisse, peu différent de celui que l'on a trouvé par la comparaison précédente.

Cette methode a beaucoup de rapport à la précédente, en ce que l'on y employe le vrai lieu du soleil, déterminé dans des intervalles égaux avant & après son passage par son apogée ou son périégée : mais elle a cet avantage, que dans la quatrième methode il étoit nécessaire dans chaque observation de déterminer le vrai lieu du soleil par le moyen de sa déclinaison, ce qui oblige de choisir des temps où cette déclinaison varie considérablement d'un jour à l'autre, pour avoir plus exactement son mouvement en longitude; au lieu que dans celle-ci, l'ascension droite d'une étoile étant une fois déterminée exactement par des observations choisies, on peut connoître le vrai lieu du soleil, & par conséquent son vrai mouvement dans tous les temps de l'année avec une assez grande exactitude. Car comme on ne suppose par cette méthode que l'ascension droite de l'étoile connue, & la différence entre le passage du soleil & de cette étoile par le méridien, toute l'erreur qui peut se trouver dans cette détermination doit provenir de ces deux causes.

A l'égard de celle qu'il peut y avoir dans l'ascension droite de l'étoile, elle ne peut gueres monter qu'à une minute, & elle n'en cause qu'une de la même quantité dans la détermination de l'apogée.

Pour ce qui est de la différence entre les passages, quand même on la supposeroit de deux secondes, qui est une erreur plus grande que celle qui peut résulter des observations faites avec précision, cela n'en causeroit qu'une de 3

ou 4 minutes dans l'exemple qui a été rapporté dans la quatrième méthode, ce qui est une exactitude plus grande que celle à laquelle on a cru jusqu'à présent pouvoir parvenir dans la détermination du vrai lieu de l'apogée & du périée.

Sixieme methode de déterminer l'apogée & le périée du soleil, ou l'aphélie ou le perihélie des planetes, & l'excentricité de leurs orbes.

Les méthodes que nous venons de proposer, demandent des observations choisies, faites à distance égale de part & d'autre de l'apogée & du périée, & qu'on ne peut par conséquent employer qu'en comparant ensemble un grand nombre d'observations.

C'est pourquoi nous en donnerons ici une qui a été inventée par mon Pere, & rapportée dans le Journal des Sçavans du mois de Novembre de l'année 1669. par laquelle on peut déterminer immédiatement le vrai lieu de l'aphélie & du périhélie des planetes dans l'hypothese elliptique, y employant seulement trois observations faites dans des temps différens.

Fig. 1.

Ayant décrit un cercle *MBND* à volonté, on prendra de *C* vers *B*, l'arc *CB* égal à la différence entre le vrai lieu d'une planete déterminée par les deux premieres observations, & l'arc *BA* égal à la différence entre le vrai lieu de cette planete, déterminé par la seconde & la troisième observation. Du point *B*, on menera par le centre *L* du cercle *MBND*, le diametre *BLD* qui rencontrera sa circonférence au point *D*. Le mouvement moyen de la planete étant connu, on prendra du point *D* vers *C* l'arc *DF* égal au moyen mouvement du soleil qui répond à l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre la premiere & la seconde observation, & du point *D* vers *A* l'arc *DE* égal au moyen mouvement depuis la seconde jusqu'à la troisième observation. On menera du point *D* aux points *C* & *A*, les lignes *DC*, *DA*, qui couperont les lignes *BF*, *BE*, aux points *G* & *H*, par lesquels on menera la ligne *GH*.

Du point B , on abaissera sur HG la perpendiculaire BI , & du point I , on menera par le centre L le diametre $MILN$, sur lequel on prendra IO égal à IL . L'angle BIM mesurera la distance de la planete à son aphelie dans le temps de la seconde observation. Le point I fera le centre de l'ellipse que le soleil décrit par son mouvement propre, dont le grand axe sera égal au diametre MN , le point L sera un des foyers de l'ellipse, & représentera le centre du vrai mouvement où le soleil est placé, & le point O , l'autre foyer autour duquel la planete parcourt son moyen mouvement.

On peut employer de la même maniere un plus grand nombre d'observations faites avant & après celle qui a été marquée la seconde, en tirant des extrémités B & D du diametre BD , aux points de la circonférence qui marquent les mouvemens vrais & moyens du soleil, des lignes dont les interfections doivent toutes se rencontrer sur la ligne HG prolongée de part & d'autre, s'il est nécessaire.

DÉMONSTRATION.

L'angle BHA externe est égal à l'angle BDA , moitié de l'angle au centre BLA , qui mesure le mouvement vrai de la planete depuis la seconde jusqu'à la troisieme observation, & à l'angle DBE , moitié de l'angle DLE qui mesure son moyen mouvement, c'est-à-dire, au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

L'angle BGC externe est égal à l'angle BDC , moitié de l'angle BLC qui mesure le mouvement vrai de la planete depuis la premiere jusqu'à la seconde observation, & à l'angle DBF , moitié de l'angle DLF qui mesure son moyen mouvement.

Du point B soit mené aux points A & C les lignes BA , BC . L'angle BAH ou BAD qui est dans le demi-cercle BAD est droit; l'angle BIH est aussi droit par la construction; c'est pourquoi les points $BAHI$ sont dans un cercle dont le diametre est BH . L'angle BIA qui soutend l'arc BA est donc égal à l'angle BHA qui soutend le même arc BA ,

160 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 & a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

On trouvera de même que les angles BCD ou BCG & BIG étant droits, les points $BIGC$ sont dans un cercle, & que l'angle BIC qui soutend l'arc BC est égal à l'angle BGC qui a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

Du point I comme centre & de l'intervalle IV égal à LM soit décrit le cercle VPT . Soit fait l'angle BIR égal à l'angle IBL , soit prolongé IR jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle VPT en P . Joignez LP , & du point O menez à IP la parallèle OS qui rencontre en S le rayon SB prolongé, s'il est nécessaire.

Les angles IBL , IBP , étant égaux par la construction, les côtés BR & RI sont aussi égaux; les retranchant des rayons LB , IP , des cercles égaux $MBND$, VPT , on aura les côtés PR , RL , du triangle PRL égaux. Les angles RPL , RLP , seront donc égaux entr'eux: mais l'angle IRL externe est égal à la somme des angles RPL , RLP , & à la somme des angles IBL , BIP . Les quatre angles RPL , RLP , IBL , BIP , seront donc égaux entr'eux, & la ligne PL sera parallèle à la ligne BI . Maintenant à cause des parallèles OS , IP ; SL est à RL ou PR qui lui est égal comme SO est à RI , comme OL est à IL . Mais OL est double de IL , donc SL est double de RL ou PR , & SO est double de RI ; donc SL plus SO est double de PR plus RI , c'est-à-dire du rayon PI qui est égal à la moitié du diamètre VT . Le point S est donc sur une ellipse, dont le grand axe est VT , & dont les foyers sont aux points O & L .

On démontrera de même que si l'on fait l'angle CKI égal à l'angle ICL , & l'on mène OQ parallèle à IK , qui rencontre LC prolongé, s'il est nécessaire en Q ; le point Q est sur une ellipse dont le grand axe est VT , & les foyers O & L .

Si l'on ajoute présentement à l'angle SLQ ou BLC qui par la construction mesure l'arc BC du vrai mouvement du soleil

soleil l'angle PLB ; on aura l'angle CLP ou CXB qui lui est égal à cause des parallèles BL, BIX . Ajoûtant à l'angle CXB l'angle ICL ou ICX , on aura l'angle BIC ou BGC qui lui est égal, que l'on a démontré mesurer le milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement du soleil.

Si l'on ajoûte de même à l'angle BIC l'angle PLB ou PIB qui lui a été démontré égal, on aura l'angle PIC , auquel si l'on ajoûte l'angle ICL ou CIK qui lui est égal par la construction, on aura l'angle PIK qui, à cause des parallèles OS, IP & OQ, IK , est égal à l'angle SOQ . La différence entre l'angle BLC ou SLQ du vrai mouvement, & l'angle BIC milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement est donc égale à la différence entre cet angle BIC & l'angle SOQ , lequel représentera par conséquent dans l'hypothese elliptique le moyen mouvement qui se fait autour d'un des foyers O de l'ellipse VST , pendant que le vrai mouvement se fait autour de l'autre foyer L qui représente le centre du soleil. La ligne VT qui passe par les foyers L & O fera donc l'axe de l'ellipse que la planete décrit par sa révolution, dont l'extrémité V du côté du point O représente son aphélie, & l'extrémité T son périhélie. L'angle $VO S$ mesurera la distance moyenne de la planete à son aphélie, & l'angle $VL S$ sa distance véritable, qui, étant retranchée du vrai lieu du soleil déterminé en S , donne le vrai lieu de son aphélie: ce qu'il falloit chercher.

On peut déterminer géométriquement par cette méthode le vrai lieu de l'aphélie des planetes & leur excentricité, en décrivant une grande figure divisée exactement, & choisissant la détermination qui résulte des observations qui paroissent avoir été faites avec le plus d'exactitude. Mais comme il seroit difficile de déterminer par ce moyen les aphélies des planetes & leur excentricité avec toute la précision que l'on peut souhaiter, on les trouvera par le calcul en cette maniere.

E X E M P L E.

Le 5 Mai de l'année 1690. la vraie opposition de Saturne avec le soleil est arrivée à Paris à $6^h 32'$ du soir. Le vrai lieu du soleil étoit alors $1^s 15^d 33' 30''$, ce qui donne le vrai lieu de Saturne de $7^s 15^d 33' 30''$.

Le 15 Juillet de l'année 1696. la vraie opposition de Saturne est arrivée à $1^h 0'$ après midi, son vrai lieu étant de $9^s 23^d 46' 0''$.

Le 12 Octobre de l'année 1703. la vraie opposition de Saturne est arrivée à $20^h 12'$ après midi, son vrai lieu étant de $0^s 19^d 14' 20''$.

Le mouvement vrai du soleil dans l'espace de six années, dont deux bissextiles, 70 jours $18^h 28'$ depuis le 5 Mai 1690. à $6^h 32'$ du soir jusqu'au 15 Juillet 1696. à $1^h 0'$, a donc été de $68^d 12' 30''$, & ce vrai mouvement dans l'espace de sept années communes 89 jours $19^h 12'$ depuis le 15 Juillet 1696. à $1^h 0'$ jusqu'au 12 Octobre 1703. à $20^h 12'$ a été de $85^d 28' 20''$.

Soit pris sur le cercle $MBAD$ l'arc BC de $68^d 12' 30''$, & l'arc BA de $85^d 28' 20''$, & ayant tiré le diamètre BLD , soit pris l'arc DF de $75^d 44' 8''$ égal au moyen mouvement de Saturne qui convient à six années communes 72 jours $18^h 28'$, & l'arc DE de $88^d 31' 20''$ égal au moyen mouvement de cette planète qui répond à 7 années 89 jours $19^h 12'$.

L'angle BDC à la circonférence, étant la moitié de l'angle BLC au centre qui mesure l'arc BC de $68^d 12' 30''$, fera de $34^d 6' 15''$. L'angle DBF à la circonférence étant la moitié de l'angle DLF qui mesure l'arc DF de $75^d 44' 8''$, fera de $37^d 52' 4''$, & par conséquent dans le triangle BGD , dont les angles BDC ou BDG , & DBF ou DBG sont connus, & le côté BD est égal au double du rayon supposé de 100000, on trouvera le côté BG de 117930.

L'arc BA étant de $85^d 28' 20''$, & l'arc DE de $88^d 31' 20''$, on aura l'angle BDA de $42^d 44' 10''$, & l'angle DBE

de $44^{\text{d}} 15' 40''$, & par conséquent dans le triangle BHD , dont les angles BDH & DBH sont connus aussi-bien que le côté BD , on trouvera le côté BH de 135911. Maintenant dans le triangle GBH , dont les côtés BG , BH , sont connus, & l'angle compris GBH est de $82^{\text{d}} 7' 44''$ égal à la somme des angles DBG & DBH , on trouvera l'angle BHG de $44^{\text{d}} 17' 15''$; & dans le triangle rectangle BIH , dont le côté BH est connu de 135911, & l'angle BHG ou BHI de $44^{\text{d}} 17' 15''$, on trouvera le côté BI de 949012. Retranchant l'angle DBE qui a été trouvé de $44^{\text{d}} 15' 40''$ de l'angle IBH de $45^{\text{d}} 42' 55''$, complément de l'angle BHG , on aura l'angle IBL de $1^{\text{d}} 27' 5''$, & dans le triangle BIL , dont le côté BI vient d'être trouvé de 949012, & le rayon BL est connu, aussi-bien que l'angle IBL compris entre ces côtés, on trouvera l'angle BLI ou SLV de $25^{\text{d}} 6' 33''$, qui étant retranché du vrai lieu du soleil en S au temps de la seconde observation qui étoit de $9^{\text{s}} 23^{\text{d}} 46' 0''$, donne le vrai lieu de l'aphélie de Saturne de $8^{\text{s}} 28^{\text{d}} 39' 27''$, c'est-à-dire, à $28^{\text{d}} 39' 27''$ du sagittaire. On trouvera aussi dans le triangle BIL le côté IL qui mesure l'excentricité de Saturne de 56646 parties, dont le rayon est 1000000.

Septieme methode de déterminer l'apogée & le périée du Soleil, ou l'aphélie & le périhélie des planetes, & l'excentricité de leurs orbes.

Étant donné par trois observations quelconques le mouvement vrai d'une planete & le mouvement moyen qui lui répond, déterminer dans l'hypothese elliptique le vrai lieu de l'apogée de cette planete & l'excentricité de son orbe.

Soit dans le cercle ABD le moyen mouvement qui convient à l'intervalle de temps entre la premiere & la seconde observation, mesuré par l'angle ACB , & le moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la seconde & la troisieme observation, mesuré par l'angle BCD . Ayant pro-

Fig. 2.

164 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 longé le rayon BC au-delà du centre C , soit fait l'angle CAE égal à la demi-circonférence entre le vrai & le moyen mouvement qui convient au premier intervalle, & soit pris l'angle CDG égal à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement qui répondent au second intervalle. Soit décrit par les points A, B, E , le cercle $ABHE$, dont le centre est en V , & par les points B, D, G , le cercle $BDHG$, dont le centre est en T , & qui coupe le cercle $ABHE$ au point H . Soit mené du point H par le centre C du cercle ABD la ligne droite HCF . Je dis que le point F représentera l'apogée de la planète, le point Q le périégée, H , un des foyers de l'ellipse, autour duquel se fait le vrai mouvement, & HC la moitié de l'excentricité.

Pour déterminer l'ellipse que la planète décrit par sa révolution, soit fait l'angle DHI égal à l'angle CDH , & ayant pris CK égal à CH , soit mené KI parallèle à CD qui rencontrera HI au point I . Soient faits aussi les angles BHN & AHL égaux aux angles CBH & CAH , & soient menées les lignes KN & KL parallèles aux lignes CB, CA , qui rencontrent les lignes HN & HL aux points N & L . Je dis que les points I, N, L , seront sur une ellipse dont les foyers sont H & K , & qu'ils représentent le lieu de la planète dans les trois observations données.

DÉMONSTRATION.

A cause des parallèles DC & KI , on aura dans les triangles HCM, HKI ; HC est à HK , comme HM est à HI , comme CM est à KI : mais HC est la moitié de HK , donc HM est la moitié de HI , & CM est la moitié de KI , donc HM plus CM est égal à la moitié de HI plus KI . Mais à cause des angles égaux DHI, CDH ; DM est égal à HM ; donc DM plus CM , c'est-à-dire, le rayon CD est égal à la moitié de HI plus KI , & par conséquent le point I est sur la circonférence d'une ellipse, dont un des foyers est le point H , & l'autre foyer le point K .

Il faut présentement considérer que l'angle BHA est

égal à l'angle BCA moins les angles CBH & CAH : mais l'angle BGA qui lui est égal, mesure l'angle BCA moins l'angle CAG demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement : donc les angles CBH plus CAH mesurent aussi cette même demi-différence. Si donc on retranche de l'angle BHA les angles BHN & AHL qui, par la construction, ont été faits égaux aux angles CBH plus CAH , on aura l'angle LHN égal à l'angle ACB du moyen mouvement moins deux fois la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement, d'où il suit que l'angle LHN mesure le vrai mouvement de la planète qui répond au premier intervalle.

On trouvera de même que l'angle BGD ou BHD qui est à la circonférence du cercle $BDHG$ est égal à l'angle BCD moins l'angle CDG demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement : mais l'angle CDG est égal à l'angle CHD , moins l'angle GDH ou GBH , qui se terminant à la même circonférence, lui est égal ; donc l'angle CDH moins l'angle GBH ou CBH mesure cette demi-différence. Si donc l'on retranche de l'angle BHD l'angle DHI qui a été fait égal à l'angle CDH , & l'on y ajoute l'angle BHN qui a été fait égal à l'angle CBH , on aura l'angle IHN égal à l'angle BCD moins deux fois l'angle CDG , d'où il suit que l'angle IHN représente le vrai mouvement qui convient au second intervalle. Mais à cause des lignes KL , KN , KI , parallèles aux lignes CA , CN , CD , l'angle LKN est égal à l'angle ACB , & l'angle NKI est égal à l'angle BCD . Donc les angles LKN & NKI mesurent le moyen mouvement qui se fait à l'égard du foyer K de l'ellipse, pendant que le vrai mouvement se fait autour de l'autre foyer H de la même ellipse, d'où il résulte que le point F représente le vrai lieu de l'apogée, & le point Q le périégée ; que KH mesure l'excentricité de l'orbe de la planète, & que les points L , N , I , représentent son vrai lieu dans ces trois différentes observations.

E X E M P L E.

Le vrai lieu du Soleil ayant été déterminé en 1722. le 16

Mai de $1^{\text{h}} 25^{\text{d}} 10' 54''$, le 18 Juillet de $3^{\text{h}} 25^{\text{d}} 22' 0''$, & le 30 Août de $5^{\text{h}} 25^{\text{d}} 40' 6''$, on cherche le vrai lieu de l'apogée du soleil & l'excentricité de son orbe.

L'angle ACB du moyen mouvement, depuis le 16 Mai jusqu'au 18 Juillet 1722. est de $6^{\text{d}} 5' 44''$, dont retranchant le vrai mouvement du soleil de cet intervalle qui a été observé de $60^{\text{d}} 11' 6''$, on aura la différence entre le vrai & le moyen mouvement de $1^{\text{d}} 54' 38''$, dont la moitié $57^{\text{d}} 19'$ étant ajoutée à $60^{\text{d}} 11' 6''$, ou retranchée de $62^{\text{d}} 5' 44''$, donne l'angle AEB ou AHB de $61^{\text{d}} 8' 25''$.

L'angle BCD du moyen mouvement, depuis le 18 Juillet jusqu'au 30 Août 1722. est de $42^{\text{d}} 22' 59''$, dont retranchant le vrai mouvement du soleil dans cet intervalle qui est de $41^{\text{d}} 18' 6''$, on aura la différence entre le vrai & le moyen mouvement de $1^{\text{d}} 4' 53''$, dont la moitié $32' 26'' \frac{1}{2}$ étant retranchée de l'angle ABD de $42^{\text{d}} 22' 59''$, donne l'angle BGD ou BHD de $41^{\text{d}} 50' 32'' \frac{1}{2}$.

L'angle ACB étant de $62^{\text{d}} 5' 44''$, & l'angle BCD de $42^{\text{d}} 22' 59''$, on aura l'angle ABC de $58^{\text{d}} 57' 8''$, & l'angle CBD de $68^{\text{d}} 48' 30'' \frac{1}{2}$, dont la somme mesure l'angle ABP qui seroit de $127^{\text{d}} 45' 38'' \frac{1}{2}$.

L'angle AHB ou BVP qui lui est égal étant de $61^{\text{d}} 8' 25''$, & l'angle BHD ou BTO qui lui est égal de $41^{\text{d}} 50' 32'' \frac{1}{2}$, on aura l'angle ABV de $28^{\text{d}} 51' 35''$, & l'angle TBD de $48^{\text{d}} 9' 27'' \frac{1}{2}$, dont la somme $77^{\text{d}} 1' 2'' \frac{1}{2}$ étant retranchée de l'angle ABD de $127^{\text{d}} 45' 38'' \frac{1}{2}$, reste l'angle TBV de $50^{\text{d}} 44' 36''$.

Ayant divisé les cordes AB, BD , en deux parties égales par les lignes CP, CO , on aura l'angle BCP , moitié de l'angle ACB , de $31^{\text{d}} 2' 52'' \frac{1}{2}$, dont le sinus BP est de 51575 parties dont le rayon BC est 100000. On aura aussi l'angle BCO moitié de l'angle BCD de $21^{\text{d}} 11' 29'' \frac{1}{2}$, dont le sinus BO est 36149. On fera donc comme le sinus de l'angle BVP ou AHB de $61^{\text{d}} 8' 25''$ est au sinus total; ainsi BP 51575 est à BV qu'on trouvera de 58888; on fera aussi comme le sinus de l'angle BTO ou BHD de $41^{\text{d}} 58'$

$32'' \frac{1}{2}$ est au sinus total; ainsi BO 36149 est à BT qu'on trouvera de 54190.

Maintenant dans le triangle BVT , dont le côté BV est de 58888, le côté BT de 54190, & l'angle TBV compris entre ces côtés a été déterminé de $50^{\circ} 44' 46''$, on aura l'angle BTV de $69^{\circ} 38' 7''$, dont le double est l'angle BTB de $139^{\circ} 16' 14''$; on aura donc l'angle TBH de $20^{\circ} 21' 53''$ qui étant ajouté à l'angle DBT de $48^{\circ} 9' 27'' \frac{1}{2}$, donne l'angle DBH de $68^{\circ} 31' 20'' \frac{1}{2}$; mais l'angle DHB est de $41^{\circ} 50' 32'' \frac{1}{2}$; on aura donc l'angle BHD de $69^{\circ} 38' 7''$, dont retranchant l'angle CBD ou CDB de $68^{\circ} 48' 30'' \frac{1}{2}$, reste l'angle CDH de $49' 36'' \frac{1}{2}$. On fera présentement comme le sinus de l'angle BHD de $41^{\circ} 50' 32''$, est au sinus de l'angle DBH de $68^{\circ} 31' 20'' \frac{1}{2}$; ainsi BD 72298 est à HD qu'on trouvera de 100854, & dans le triangle CDH dont le côté CD est connu de 100000, le côté DH de 100854, & l'angle compris CDH est de $49' 36'' \frac{1}{2}$, on trouvera l'angle DHC de $59^{\circ} 4' 37''$, dont retranchant l'angle DHI égal à l'angle CDH de $49' 36'' \frac{1}{2}$, reste l'angle FHI de $58^{\circ} 15' 0''$, distance de l'apogée au lieu du soleil dans la troisième observation, qui étoit de $5^{\circ} 6' 40' 6''$, on aura donc le vrai lieu de l'apogée du soleil de $3^{\circ} 8' 25' 6''$. On trouvera aussi CH , moitié de l'excentricité de l'orbe du soleil de 1682 parties, dont le rayon est 100000.

Cette méthode a beaucoup de rapport à la précédente : mais le calcul en est un peu plus long. On peut l'employer très-utilement pour trouver les observations qui sont les plus favorables pour la recherche de l'aphélie & du périhélie des planètes; parce que la détermination de ces lieux se faisant par l'intersection de deux cercles, il est certain que l'on trouvera plus de précision par les observations faites dans les lieux où l'intersection de ces cercles est la moins oblique & la plus approchante de la perpendiculaire.

*Huitieme methode de déterminer l'apogée & le périée du soleil,
ou l'aphélie & le périhélie des planetes dans l'hypothese
de Kepler par trois seules observations.*

Nous venons de donner la maniere de déterminer géométriquement dans l'hypothese elliptique simple, l'aphélie & le périhélie des planetes par trois seules observations faites en quelque endroit que ce soit de leurs orbes.

Cette methode peut s'appliquer au soleil, à la lune & aux autres planetes, dont l'excentricité est fort petite : mais l'on a remarqué que dans les orbes des planetes dont l'excentricité est considérable, telles que Mars & Mercure, les équations qui résultent de l'hypothese de Kepler, représentent plus parfaitement la différence entre leur vrai & leur moyen mouvement. Nous avons donc jugé qu'il seroit très-avantageux d'avoir une methode de déterminer, suivant cette hypothese, l'aphélie & le périhélie des planetes, en ne supposant qu'un petit nombre d'observations. Car comme on ne peut observer que rarement leur vrai lieu vû du centre du soleil, par les raisons que nous avons rapportées ci-dessus, on ne peut pas par conséquent y employer la plupart des methodes précédentes qui demandent un grand nombre d'observations.

Comme dans l'hypothese de Kepler on ne peut pas calculer les vrais lieux des planetes géométriquement, mais seulement par approximation, il ne faut pas non plus espérer de pouvoir déterminer géométriquement, suivant cette hypothese, l'aphélie & le périhélie des planetes, mais seulement par approximation, ce qui suffit pour cette recherche, pourvu que l'on puisse approcher à l'infini de la précision géométrique.

On considerera pour cela que la distance des planetes au soleil, lorsqu'elles sont dans leur aphélie & périhélie, devant être toujours la même, dans quelque hypothese que ce soit, leurs orbes doivent avoir aussi une même excentricité, & qu'ainsi l'ellipse qu'elles décrivent, suivant l'hypothese de
Kepler

Kepler, doit être la même que celle qu'elles parcourent suivant l'hypothese elliptique simple. Le vrai lieu des planetes, suivant l'une & l'autre de ces deux hypotheses, doit donc être sur la même ellipse, mais distribué diversement, parce que suivant Kepler la planete parcourt des aires égales en temps égaux, au lieu que suivant l'hypothese elliptique simple, le moyen mouvement se distribue également autour d'un des foyers de l'ellipse, pendant que le vrai ou apparent se fait autour de l'autre foyer.

Les vrais lieux d'une planete que l'on suppose se mouvoir, suivant l'hypothese de Kepler, étant donc connus par trois observations, il s'agit de trouver les lieux de la planete qui y répondent suivant l'hypothese elliptique, parce que la situation des planetes étant, suivant ces deux hypotheses, sur une même ellipse, dont les foyers & les axes sont les mêmes; connoissant le lieu de l'aphélie & du périhélie d'une planete suivant l'hypothese elliptique, on aura en même-temps leur situation, suivant l'hypothese de Kepler.

Pour les déterminer, soit *ALBM* une ellipse qui représente par exemple l'orbe de Saturne, dont *C* soit le centre, & *S* l'un des foyers où est placé le soleil, suivant les deux hypotheses, en sorte que *SA* mesure la plus grande distance de Saturne au soleil, & *SB* sa plus petite distance. Soient les points *M, L, N*, les vrais lieux de Saturne en trois différens endroits de son orbe, tels que les aires *MSL, LSN*, soient entr'elles, comme les temps que cette planete a employés à parcourir les arcs *MAL, LGN*, c'est-à-dire que l'aire *MALS* soit à l'aire *LGNS*, comme le temps que la planete a employé à parcourir l'arc *MAL* est au temps qu'elle a employé à décrire l'arc *LGN*. Nous avons enseigné dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1719, une méthode abrégée pour déterminer, suivant l'hypothese de Kepler, la vraie distance *ASL* d'une planete à son aphélie, sa distance moyenne *ACD* étant donnée, & il s'agit de trouver ici la distance moyenne qui répond à la véritable, ce que l'on fera en cette maniere.

Mem. 1723.

Y

* Fig. 3.

L'excentricité CS étant connue par rapport au rayon AC , & la ligne GS étant par la propriété de l'ellipse, égale à ce rayon, on trouvera dans le triangle rectangle GCS , la valeur du côté GC par rapport au rayon AC ou HC . On fera ensuite comme GC est à HC , ou bien LF est à IF ; ainsi la tangente de l'angle FSL , distance véritable de Saturne à son aphélie est à la tangente de l'angle ASI . Maintenant dans le triangle CIS , dont l'angle ASI vient d'être déterminé, l'excentricité CS & le rayon CI sont connus; on fera comme CI est à CS , ainsi l'angle ASI ou CSI est à l'angle CIS , qui étant ajouté à l'angle CSI , est égal à l'angle externe ACI . Menant la ligne DRO parallèle au rayon CI qui rencontre l'axe AB en R , on aura l'angle ARD égal à l'angle ACI que l'on vient de déterminer. Retranchant de l'angle ARD , l'angle ODS que l'on a remarqué dans les Mémoires de 1719, mesurer la différence entre la grandeur de l'arc DI & celle de la ligne SE , & dont nous avons donné une table à la fin de ces Mémoires, on aura l'angle ASD , & dans le triangle CDS dont l'angle ASD est connu de même que l'excentricité CSD & le rayon CD , on fera comme CD est à CS ; ainsi le sinus de l'angle ASD ou CSD est au sinus de l'angle CDS , qui étant ajouté à l'angle CSD , donne la valeur de l'angle AED qui mesure la distance moyenne cherchée de Saturne à son aphélie.

La distance moyenne de Saturne à son aphélie étant connue, on déterminera facilement son vrai lieu suivant l'hypothèse elliptique simple, car la différence entre le vrai & le moyen mouvement d'une planète étant suivant cette hypothèse le double de l'équation qui se fait au centre, il faut retrancher de l'angle ACD , distance moyenne de Saturne à son aphélie, l'angle DCT double de l'angle CDS , & mener du point S , la ligne CP parallèle à la ligne CT , l'angle ACT ou ASP qui lui est égal, mesurera la distance véritable de Saturne à son aphélie, & le point P marquera le vrai lieu de Saturne suivant l'hypothèse elliptique.

Ayant ainsi déterminé sur cette ellipse trois points, sui-

vant cette hypothese, qui répondent aux trois lieux observés, on calculera géométriquement, par le moyen d'une des deux méthodes précédentes, le vrai lieu de l'aphélie & l'excentricité de Saturne qui se trouveront différens de ceux que l'on a supposés en premier lieu de même que son excentricité.

On se servira de cet aphélie & de cette excentricité pour calculer de nouveau les vrais lieux de Saturne suivant l'hypothese elliptique, & on emploiera ces vrais lieux pour trouver son aphélie & son excentricité qui approcheront des véritables avec toute la précision que l'on peut souhaiter.

On peut recommencer ce calcul autant de fois que l'on souhaitera, & approcher ainsi à l'infini de la précision géométrique : mais cela est inutile dans cette recherche.

E X E M P L E.

Le vrai lieu de Saturne ayant été déterminé le 5 Mai 1690 de $7^{\circ} 15^d 33' 30''$, le 15 Juillet 1696 de $9^{\circ} 23^d 46' 0''$, & le 12 Octobre 1703 de $0^{\circ} 19^d 14' 20''$, on veut trouver, suivant l'hypothese de Kepler, l'aphélie de Saturne & son excentricité.

On emploiera d'abord l'aphélie qui résulte de l'hypothese elliptique qu'on a trouvé dans l'exemple précédent de $8^{\circ} 28^d 39' 27''$, & l'excentricité qui a été déterminée de 56646 parties dont le rayon est 1000000, & on aura la distance de Saturne à son aphélie dans la premiere observation de $43^d 5' 57''$, dans la seconde de $25^d 6' 33''$, & dans la troisieme de $110^d 34' 45''$. L'excentricité *CS* ayant aussi été déterminée de 56646 parties, dont le rayon est 1000000, on aura *GC* de 998395, & l'on fera comme *GC* 998395 est à *HC* 1000000. Ainsi la tangente de l'angle *ASL* de $25^d 6' 33''$ est à la tangente de l'angle *ASI* qu'on trouvera de $25^d 8' 40''$; on fera ensuite comme *CI*, 1000000 est à *CS*, 56646; ainsi le sinus de l'angle *ASI* de $25^d 8' 40''$ est au sinus de l'angle *CIS* de $1^d 22' 45''$, qui étant ajouté à l'angle *ASI*, donne l'angle *ACI* ou *ARD* de $62^d 31' 25''$. On cherchera dans la Table des Mémoires

Y ij

572 MEMOIRÉS DE L'ACADEMIE ROYALE
 de l'Academie de 1719, p. 156 la valeur de l'angle *ODS*
 qui répond à l'angle *CIS* de $1^{\text{d}} 22' 45''$; & on le trouvera
 d'une seconde, qui étant retranchée de l'angle *ARD* de $26^{\text{d}} 31' 25''$,
 donne l'angle *ASD* de $26^{\text{d}} 31' 24''$. On fera en-
 suite comme *CD* 1000000 est à *CS* 56646; ainsi le sinus
 de l'angle *ASD* de $26^{\text{d}} 31' 24''$ est au sinus de l'angle *CDS*
 de $1^{\text{d}} 26' 58''$, qui étant ajouté à l'angle *ASD*, donne l'an-
 gle *ACD* qui mesure la distance moyenne de Saturne à son
 aphélie dans la seconde observation de $27^{\text{d}} 58' 22''$. Re-
 tranchant de cet angle, l'angle *DCT* de $2^{\text{d}} 35' 56''$ qui a été
 pris égal au double de l'angle *CDS*, on aura la distance *ACT*
 ou *ASP* de Saturne à son aphélie dans l'hypothese elliptique
 de $25^{\text{d}} 4' 26''$, plus petite de $2' 7''$ que suivant l'hypothese
 de Kepler.

On trouvera par la même maniere la distance de Saturne
 à son aphélie dans la première observation de $43^{\text{d}} 3' 16''$,
 plus petite de $2' 41''$ que suivant l'hypothese de Kepler, &
 la distance de ceste planete à son aphélie dans la troisième
 observation de $110^{\text{d}} 36' 53''$, plus grande de $1' 59''$ que sui-
 vant l'hypothese de Kepler.

Les lieux de Saturne étant ainsi déterminés dans l'hypo-
 these elliptique, on trouvera de la maniere qui a été ensei-
 gnée par la sixieme methode, la distance véritable de Sa-
 turne à son aphélie dans la seconde observation, suivant
 l'hypothese elliptique, de $25^{\text{d}} 42' 26''$, à laquelle ajoutant
 $2' 7''$, différence entre le vrai lieu de la planete suivant les
 deux hypotheses, on aura la distance véritable de Saturne à
 son aphélie, suivant l'hypothese de Kepler, de $25^{\text{d}} 44' 33''$,
 qui étant retranchés du vrai lieu de la planete qui fut ob-
 servé alors de $9^{\text{d}} 23^{\text{d}} 46' 0''$, donne le vrai lieu de l'aphélie
 de Saturne, suivant l'hypothese de Kepler, de $8^{\text{d}} 28^{\text{d}} 1' 27''$,
 plus petit de 38 minutes que si le mouvement de cette pla-
 nete se fût fait suivant l'hypothese elliptique simple. On trou-
 vera aussi l'excentricité *CS* de 57173.

Le lieu de l'aphélie de Saturne & son excentricité étant
 ainsi connus, on prendra la distance de cette planete à son

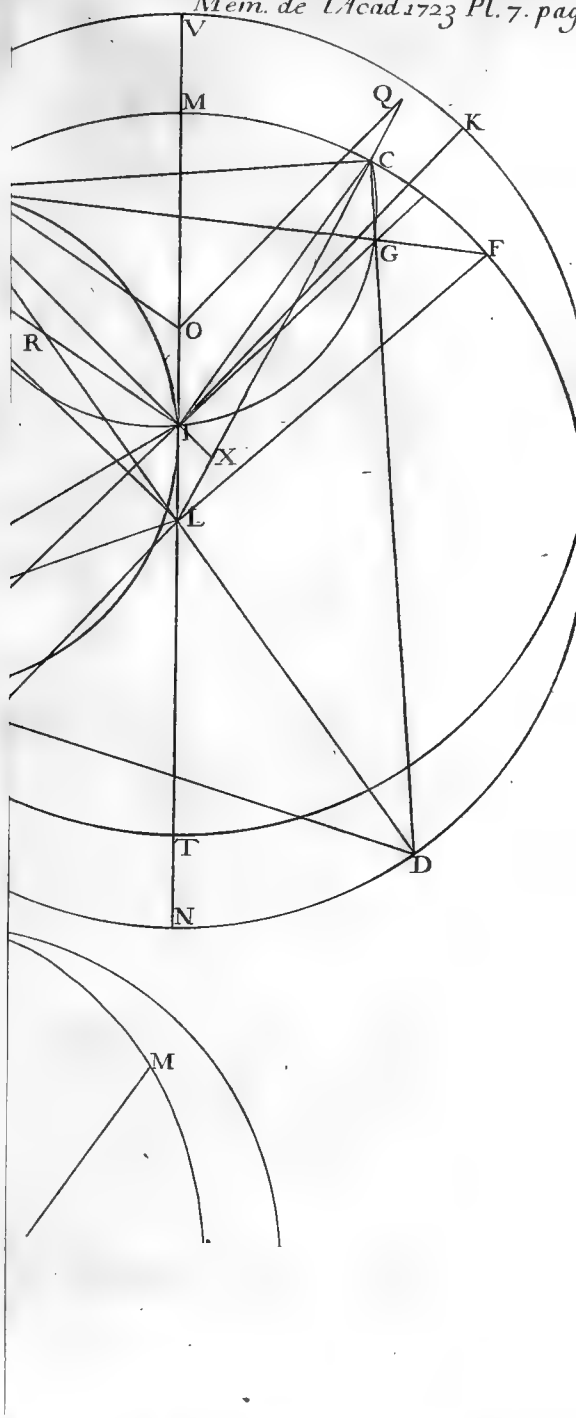


Fig. 1

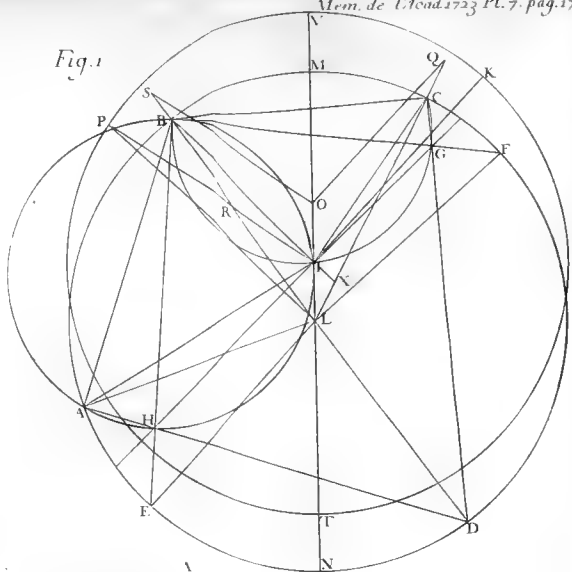


Fig 3

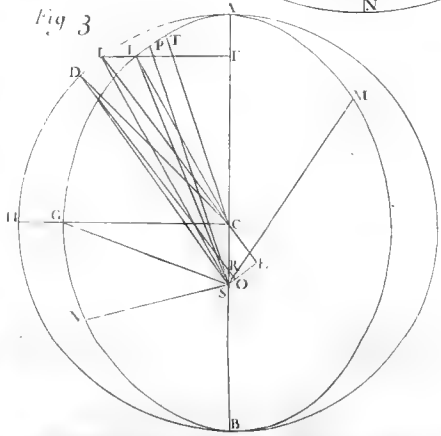
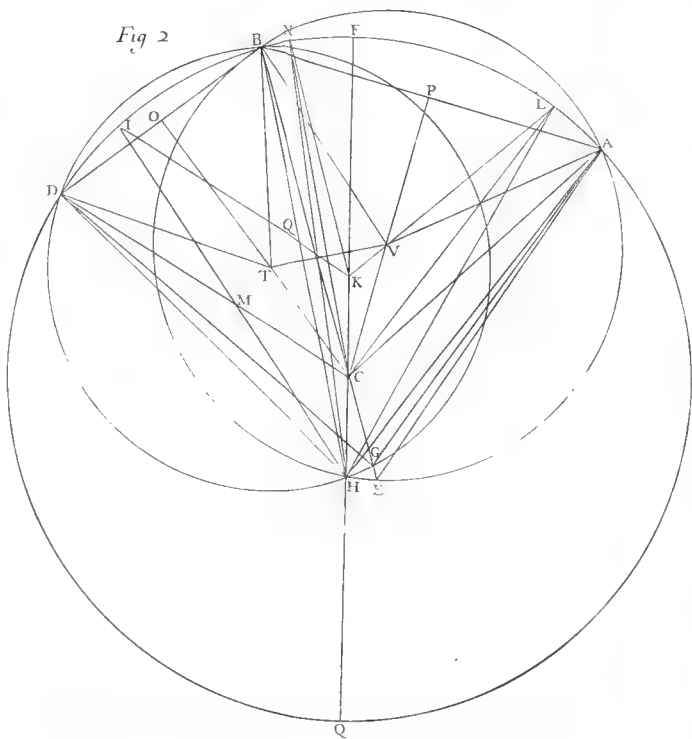


Fig 2



aphélie , que l'on trouvera dans la premiere observation de $42^d 27' 57''$, dans la seconde de $25^d 44' 33''$, & dans la troisieme de $111^d 12' 54''$. On calculera ensuite, comme ci-devant, la distance de Saturne à son aphélie dans l'hypothese elliptique, que l'on trouvera dans la premiere observation de $42^d 25' 13''$, plus petite de $2' 44''$ que suivant l'hypothese de Kepler, dans la seconde observation de $25^d 42' 21''$, plus petite de $2' 12''$ que suivant l'hypothese de Kepler, & dans la troisieme observation de $111^d 14' 57''^{\frac{1}{2}}$, plus grande de $2' 3''^{\frac{1}{2}}$ que suivant l'hypothese de Kepler ; ce qui ne differe que de peu de secondes de ce qui a été déterminé par le premier calcul. On cherchera ensuite par la méthode précédente la distance de Saturne à son aphélie, suivant l'hypothese elliptique que l'on trouvera dans la seconde observation de $25^d 44' 40''$, à laquelle ajoutant $2' 12''$, différence entre le vrai lieu de la planete suivant les deux hypotheses, on aura la distance véritable de Saturne à son aphélie dans l'hypothese de Kepler de $25^d 46' 52''$, qui étant retranchée du vrai lieu de la planete, lequel étoit dans la seconde observation de $9^s 23^d 46' 0''$, donne le vrai lieu de l'aphélie de Saturne, suivant l'hypothese de Kepler, de $8^s 27^d 59' 8''$, plus petit de $2' 19''$ que par la comparaison précédente, & de 40 minutes 9 secondes que suivant l'hypothese elliptique simple. On trouvera aussi l'excentricité de Saturne de 57181, un peu plus grande que par le calcul précédent.

L'on voit par cet exemple, que la différence entre le lieu de l'aphélie qui résultoit de l'hypothese elliptique simple, & de l'hypothese de Kepler, étoit par le premier calcul de 38 minutes, & que par le second calcul on a trouvé ce lieu encore moins avancé de $2' 19''$, desorte que si l'on recommence ce calcul, la différence entre le vrai lieu de l'aphélie & du périhélie, suivant l'hypothese de Kepler & celui que l'on vient de déterminer, ne seroit que de quelques secondes, qui est une précision inutile dans cette recherche, puisqu'on s'estimeroit fort heureux de pouvoir en être assuré à quelques minutes près.

Cette différence de 40 minutes dans le lieu de l'aphélie & du périhélie de Saturne, déterminé suivant les deux hypothèses, doit varier suivant les diverses situations de Saturne dans son orbe, & on en doit trouver encore de plus grandes dans l'orbe de Mars, & principalement dans celui de Mercure, dont l'excentricité est beaucoup plus grande que celle des autres planetes; ce qui fait voir l'avantage que l'on peut retirer dans l'astronomie, d'avoir une méthode exacte & facile à pratiquer pour trouver le lieu de l'aphélie & du périhélie des planetes, suivant l'hypothèse de Kepler.

E' T A B L I S S E M E N T
D'UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE;
sous le nom de RICINOCARPOS.

Par M. MARCHANT.

15 Juin.
1723.

LA méthode que les botanistes ont inventée dans le dernier siècle, pour établir les genres des plantes sur leurs parties constantes & immuables, étant aujourd'hui reçue comme la base fondamentale de la botanique, ne permet plus aux physiciens de donner des noms aux Plantes que par rapport à la structure de leurs fleurs & de leurs fruits; & ces habiles historiens qui ont travaillé successivement avec tant de progrès à une science également utile & agréable, nous mettent en état, par leur méthode, de juger sous quel genre doit être rangée une plante qui auroit été ci-devant incon nue, en observant exactement les parties qui composent sa fleur & son fruit; ce qui nous met aussi à portée de reconnoître, si dans le nombre des plantes que les Auteurs ont employées sous un même genre, ces plantes, dis-je, appartiennent véritablement au genre sous lequel elles ont été rangées.

Mais comme il étoit assez difficile que ces mêmes Botanistes eussent examiné d'après nature la quantité prodigieuse

de plantes dont ils font mention , il a fallu qu'ils s'en soient rapportés aux descriptions peu circonstanciées qui en ont été faites par les historiens qui les ont précédés, ce qui quelquefois a pû contribuer à les faire tomber dans quelques erreurs contre leur méthode même. Or comme la plante qui fait le sujet de ce mémoire , est du nombre de celles dont nous croyons que le caractère générique ne leur a pas été bien connu , nous rapporterons ici sa description amplement détaillée , en faisant remarquer les parties essentielles qui la caractérisent , & en quoi elle differe des genres où quelques Botanistes modernes l'ont employée.

La racine de cette plante *a*, se divise dès sa naissance en *Planche I*
trois ou quatre racines blanchâtres , de la grosseur de cinq à six lignes , sur environ sept à huit pouces de longueur , ridées & gercées par anneaux à leur origine, lesquelles s'étendent latéralement & jettent quantité de grosses fibres onduées , un peu situées perpendiculairement , & subdivisées en une infiniré de plus petites fibres peu chevelues qui gardent la même direction. La surface des grosses racines est une écorce spongieuse & charnue, qui couvre un corps dur & presque ligneux, sans apparence de moëlle. Toutes ces racines nous ont paru avoir quelque légère odeur aromatique. De la racine s'élève immédiatement une seule tige *b*, haute de deux pieds & demi ou d'avantage, ronde, ferme & solide, assez droite, un peu nouëuse de deux en deux pouces, laquelle s'incline diagonalement de côté & d'autre de nœud en nœud, où elle produit une grande feuille, souvent accompagnée à son aisselle d'un bouquet d'autres plus petites feuilles, en maniere de rejetton ou branche. Cette tige est couverte d'une écorce de couleur verd-grisâtre, rayée de lignes plus blanches depuis sa naissance jusques à un pied de haut , & elle est colorée de rouge-brun , & tantôt plus tantôt moins pointillée ou mouchetée de taches oblongues de couleur verd-rougeâtre dans le reste de sa hauteur. Sa base a environ un pouce de diamètre; finissant tout-à-coup à quatre lignes de grosseur. La surface de cette tige est luisante, composée d'une écorce de sub-

Planche II.

flance fibreuse & spongieuse, d'une ligne d'épaisseur, de couleur verdâtre, sous laquelle on trouve un autre corps plus solide & presque ligneux, blanchâtre, épais de deux à trois lignes, au milieu duquel on découvre une cavité remplie de moëlle fort blanche peu compacte, & entrecoupée par des membranes feuilletées *c, c, c*, de même couleur, posée horizontalement le long de la cavité de la tige. Chaque nœud de cette tige produit deux appendices *d, d*, contournées en demi-cercle, dont l'une se jette à droite & l'autre à gauche, & qui ensemble embrassent la circonférence de la tige, & ces appendices sont garnies sur leur surface extérieure de fibres roides *e, e*, *Fig. en grand*, quoique fines, douces au toucher, charnues, visqueuses, plus ou moins branchues à la manière du bois de cerf, inégalement longues, & de couleur rouge-brun. Toutes ces fibres rameuses sont terminées par un petit bouton charnu, teint de rouge-jaunâtre, clair & transparent, à peu-près comme les boutons que l'on voit à l'extrémité des cornes du limaçon; ce qui nous a paru singulier, & que je ne sçai point qu'on ait encore observé sur aucune autre plante. Les plus grandes feuilles *f*, qui ornent la tige de cette plante, sont situées vers le milieu de sa hauteur; leur couleur en général varie assez, tant en dessus qu'en dessous. Celles-ci sont verd-foncé en dessus, plus clair en dessous. Celles qui naissent plus haut sont verd-rougeâtre en dessus, moins en dessous, & enfin celles qui occupent l'extrémité de la tige, ainsi que celles qui naissent par bouquets le long de la même tige, sont quelquefois des deux côtés de couleur rouge-brun, ou de couleur verd-glacé de rouge-brun, étant toutes généralement lisses & luisantes, tant en leur surface supérieure qu'inférieure. Les grandes feuilles ont sept à huit pouces de diamètre, sur cinq à six pouces de longueur; elles sont profondément découpées en cinq lobes, à la manière des feuilles de la *Staphysagre*, mais d'une substance plus molle, larges vers le milieu, & terminées tout-à-coup en pointe un peu inclinée en embas. Beaucoup d'autres plus petites de ces feuilles sont seulement découpées en 3 lobes, & chaque

découpe

découpure est garnie dans le milieu d'une grosse fibre nerveuse, plus ou moins rougeâtre, d'où partent quantité de petites fibres qui se subdivisent, & tapissent le parenchyme de la feuille, & toutes ces fibres en général sont beaucoup plus apparentes en-dessous qu'en-dessus.

Le contour des découpures des feuilles est légèrement & inégalement dentelé en dents de scie, & entierement bordé d'appendices charnues très-fines, peu ou point rameuses, ressemblant en quelque façon à de fort petites épines, terminées par un point ou bouton charnu de couleur rougeâtre. Toutes les feuilles sont portées par des queues de différente longueur, suivant la grandeur des feuilles. Ces queues sont peu sillonnées à leur naissance, & presque rondes en-dessus & en-dessous, garnies de bouquets d'appendices plus branchues que celles qui bordent les découpures des feuilles, approchant davantage des bouquets qui sont attachés aux appendices des nœuds de la tige, & ces bouquets-ci sont situés régulièrement & alternativement le long de la surface supérieure de la queue de la feuille sur deux lignes presque parallèles.

La tige de cette plante se termine tout-à-coup en deux ou trois petites branches droites, hautes de trois à quatre pouces, grosses d'environ deux lignes, lisses & luisantes, de couleur rouge-brun, chacune terminée par quatre à cinq bouquets de fleurs, rangés alternativement, & qui, par leur port & arrangement, tiennent le milieu entre les fleurs en umbelle & les fleurs en-épi.

Chaque bouquet porte huit à dix fleurs, chacune soutenue par un pédicule fort court, terminé par un calice d'une seule pièce *g, g*, charnu, découpé en cinq pointes aiguës, de couleur rouge-brun verdâtre, garnies par les bords d'appendices de la même substance que celles qui sont sur les autres parties de la plante, mais simples & très-courtes, paroissant seulement comme des points aux bords des découpures du calice.

De ce calice sort une fleur en rose *h*, de trois à quatre lignes de diametre, composée de cinq pétales *i* charnus, ob-

longs , terminés en pointe obtuse , de couleur rouge-brun en-dedans & en-dehors , plus étroits à leur naissance , & garnis d'un ongle jaune verdâtre. Le milieu de la fleur est occupé par une capsule *l* verd-blanchâtre, de la grosseur d'un pois , surmontée d'un pistil *m* rougeâtre , divisé en trois branches fourchues , terminées par de petites têtes jaunes. Cinq étamines *n* blanches , chargées de sommets rouge-brun mêlé de jaune , sortent de la base de chaque pétale & environnent la capsule. La fleur étant passée , la capsule grossit & devient un fruit cylindrique *o* triangulaire , arrondi par les coins , fort semblable à celui du *ricinus* , & qui étant mûr , est environ de la grosseur d'une noisette , couvert d'une écorce ou enveloppe *p* brune en-dehors , cartilagineuse , gercée & grisâtre en-dedans. Ce fruit étant parfaitement mur & sec , se divise en trois loges ou cavités *q* , dures & presque ligneuses , de couleur gris fauve , lisses en-dedans , lesquelles contiennent chacune une graine oblongue *r* , un peu applatie d'un côté , relevée & convexe de l'autre , couverte d'une écorce sèche & cartilagineuse , aussi de couleur gris fauve , mais très-légerement pointillée de taches brunes , & ces graines ont à une de leurs extrémités un mammelon rouffâtre en forme de petite tête *s* , cette écorce contient une amande fort blanche , dont elle ne se sépare point. Au milieu du fruit est une membrane grisâtre triangulaire *t* fort mince , attachée par sa base au pédicule de la fleur , laquelle membrane sépare chaque loge , & c'est cette partie que M. Tournefort appelle *poisson* ou *axe* dans le fruit du *ricinus*. La graine de cette plante produit d'abord deux feuilles dissimilaires *u* ovales , ainsi que fait le *ricinus* , puis une troisième feuille semblable aux deux précédentes , à la réserve qu'elle est un peu plus grande , plus allongée & bordée d'appendices charnues extrêmement fines , ainsi que les autres feuilles dont nous avons ci-devant parlé. Cette plante est fort aqueuse , & jette plusieurs gouttes d'eau clair lymphide , toutes les fois qu'on en détache quelque feuille.

Les premières feuilles qui naissent au bas de la tige , se

dessechent & tombent ordinairement quand la plante entre en fleur. Toutes les parties de cette plante ont une saveur piquante, qui échauffe considérablement la bouche, mais particulièrement la graine.

Cette plante nous est venue de la Guadeloupe par graines.

Elle fleurit ici au mois d'Août, & veut être semée au Printemps sur couche, & quoique nous l'ayons bien exposée au chaud, elle ne nous a point produit de bonnes graines jusques à présent, & s'est toujours desséchée, & a péri à la fin de l'Automne.

On ne sçait point qu'on fasse usage de cette plante en Médecine, mais sa saveur & la ressemblance de son fruit avec celui du *ricinus*, doivent faire croire qu'elle a la même qualité émétique que le *ricinus*.

Par l'examen du caractère générique de la plante dont nous venons de lire la description à la Compagnie, il est évident qu'elle ne peut être rangée sous le genre du *ricinus*, qui, suivant le rapport des Botanistes modernes, porte des fleurs à étamines, séparées & éloignées du fruit sur le même pied. Nous ne voyons pas non plus que notre plante puisse être du genre du *ricinoïdes*, parce que le *ricinoïdes*, suivant les mêmes Historiens, donne des fleurs polypétales, auxquelles le fruit ne succède point, mais que le fruit naît séparément en d'autres endroits de la plante, non pas comme ils le disent, indépendamment des fleurs; mais, au contraire, ainsi que l'a fort bien remarqué M. Nissolle, ayant observé sur le *ricinoïdes* de deux sortes de fleurs, les unes polypétales qui sont stériles, & les autres à étamines qui sont fertiles, où véritablement naît le fruit. Or comme notre plante porte une fleur à cinq pétales, d'où le fruit sort immédiatement, & que par conséquent elle est d'un caractère différent de celui du *ricinus*, & de celui du *ricinoïdes*; nous concluons donc, par les raisons susdites, que notre plante doit faire un genre particulier, ce qui nous engage de la nommer *ricinocarpus Americanus, floribus pentapetalis*, comme qui diroit, plante de l'Amérique, qui a le fruit semblable à celui du *ricinus* & la

Mémoires
de l'Acad.
Royale des
Sciences,
an. 1712.
p. 337.

180 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
fleur à cinq pétales, auquel effectivement le fruit de notre
plante a une très-grande ressemblance, non-seulement par
sa structure, mais aussi par les graines qu'il contient.

EXPLICATION DES FIGURES

qui représentent les différentes parties du ricinocarpos.

PREMIERE PLANCHE.

La plante réduite en petit.

a, la racine.

b, la tige.

u, la germination avec ses feuilles dissimilaires, en petit.

SECONDE PLANCHE.

c c c, Membranes feuilletées.

d d, Appendices contournées en demi-cercle.

e e, Fibres rameuses en grand, posées sur une appendice.

f, Une des grandes feuilles au naturel.

g g, Calice de grandeur naturelle, & les figures suivantes.

h, Fleur.

i, Pétales.

l, Capsule.

m, Pistil.

n, Étamines.

o, Fruit triangulaire.

p, Écorce ou enveloppe du fruit.

q, Loge du fruit où est contenue la graine.

r, Graine.

s, Mammelon de la graine.

t, Membrane triangulaire située au milieu du fruit.



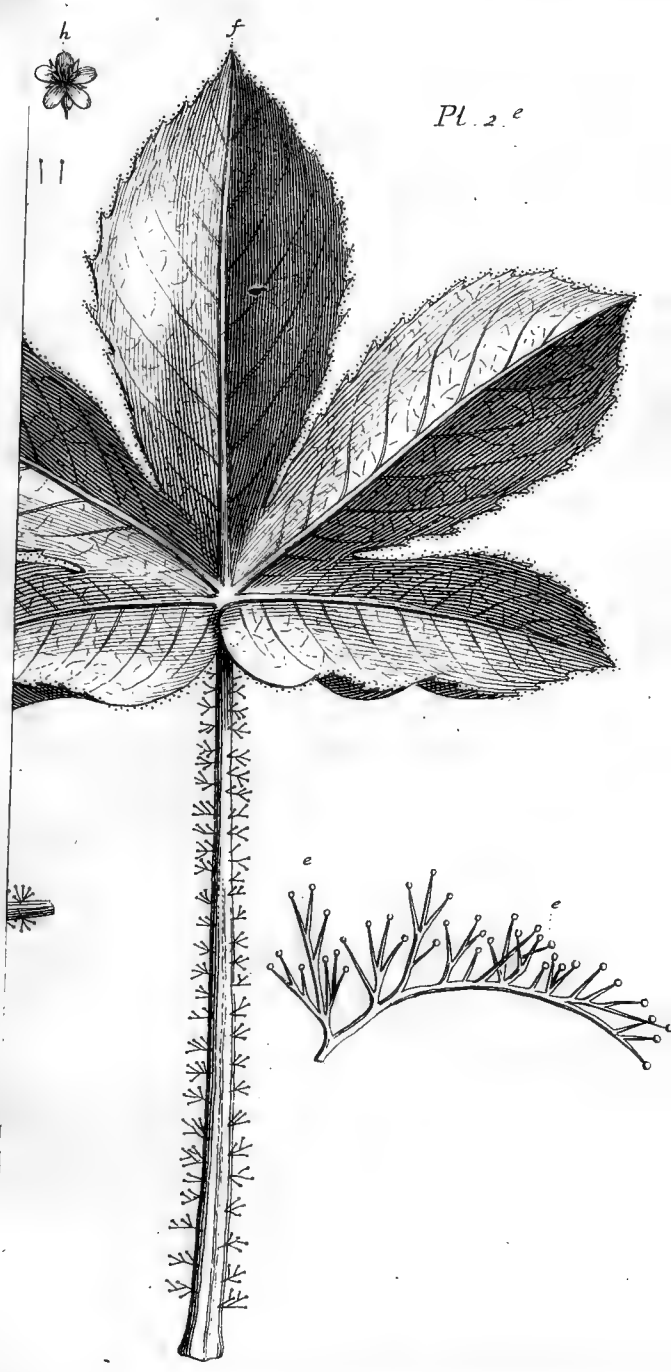


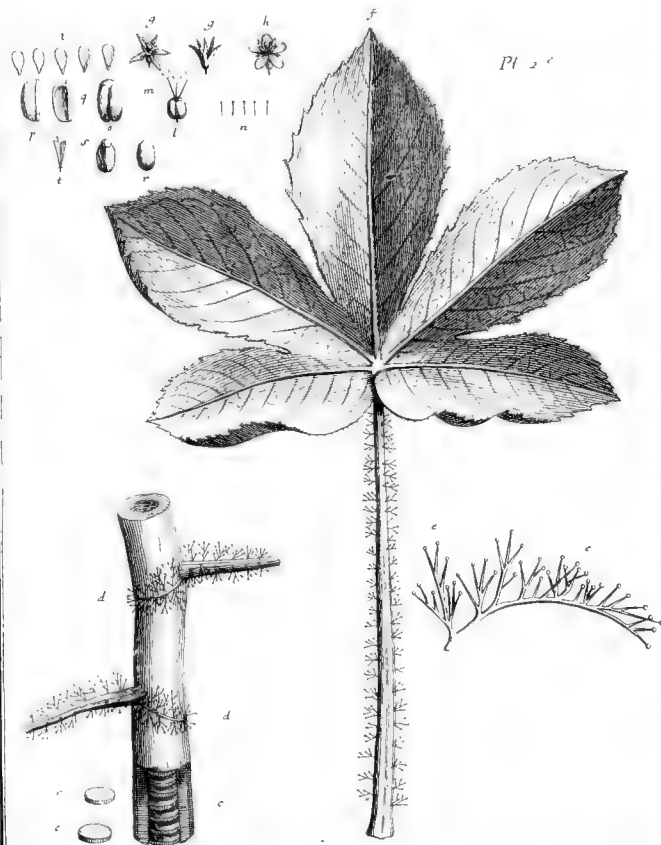
Ricinocarpus Americanus
floribus Pentapetalis.

Pl. 1^{re}



Ruinocarpus Americanus
floribus Pentapetalis.





Phytolacca frondosa, frond.

SECONDE SECTION

DE LA

SECONDE PARTIE

DU CALCUL

DES DIFFERENCES FINIES,

Où l'on traite des grandeurs exprimées par des fractions.

Par M. NICOLE.

ON se propose de donner dans cette Section une théorie générale des suites, dont chaque terme est exprimé par une fraction composée de tant de facteurs qu'on voudra, augmentant selon une loi quelconque.

30 Juin.
1723.

PROPOSITION I.

Trouver la différence d'une grandeur algébrique fractionnaire, dont le dénominateur n'est composé que d'un facteur, quelle que soit l'augmentation qui doit arriver à ce facteur.

Soit cette expression algébrique $\frac{1}{1}$, dont on demande la différence, l'augmentation qui doit arriver à ce facteur étant n , $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$, ou enfin m .

1°. Si l'augmentation est n , cette expression deviendra $\frac{1}{1+n}$, la différence demandée est donc $\frac{1}{1} - \frac{1}{1+n}$, qui étant mise à même dénomination, devient $\frac{1 \cdot n}{1 \cdot 1 + n}$.

2°. Si l'augmentation est $2n$, la différence demandée sera $\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2n} = \frac{2n}{1 \cdot 1 + 2n}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $1+n$, qui est le facteur qui manque au dénominateur, pour que tous ses fac-

teurs soient consécutifs, on aura $\frac{2n \cdot \zeta + n}{\zeta \cdot \zeta + n \cdot \zeta + 2n}$, qui se réduit, en décomposant, à $\frac{2n}{\zeta + n \cdot \zeta + 2n} + \frac{2 \cdot n \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + 2n}$.

3°. Si l'augmentation est $3n$, la différence demandée sera $\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta + 3n} = \frac{3n}{\zeta \cdot \zeta + 3n}$, & en multipliant par $\zeta + n$, $\zeta + 2n$, qui sont les facteurs qui manquent au dénominateur, pour que tous les facteurs soient consécutifs, il vient dra $\frac{3n \cdot \zeta + n \cdot \zeta + 2n}{\zeta \cdot \zeta + 3n}$, qui par la décomposition se réduit à

$$\frac{3 \cdot n}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 3n} + \frac{3n \cdot n}{\zeta + n \cdot \zeta + 3n} + \frac{3n \cdot 2n \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + 3n}.$$

4°. Si l'augmentation est $4n$, on aura $\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta + 4n}$ pour la différence demandée, qui se réduit à $\frac{4n}{\zeta \cdot \zeta + 4n}$

$$= \frac{4n \cdot \zeta + n \cdot \zeta + 2n \cdot \zeta + 3n}{\zeta \cdot \zeta + 4n} = \frac{4n}{\zeta + 3n \cdot \zeta + 4n} + \frac{4n}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 4n} + \frac{4n \cdot 3n \cdot 2n}{\zeta + n \cdot \zeta + 4n} + \frac{4n \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + 4n}.$$

5°. Si l'augmentation est $5n$, on aura $\frac{5n}{\zeta \cdot \zeta + 5n}$ pour la différence cherchée, qui devient par la multiplication $\frac{5n \cdot \zeta + n \cdot \zeta + 2n \cdot \zeta + 3n \cdot \zeta + 4n}{\zeta \cdot \zeta + 5n}$, & se décompose en $\frac{5n}{\zeta + 4n \cdot \zeta + 5n}$

$$+ \frac{5n \cdot 4n}{\zeta + 3n \cdot \zeta + 5n} + \frac{5n \cdot 4n \cdot 3n}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 5n} + \frac{5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n}{\zeta + n \cdot \zeta + 5n} + \frac{5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + 5n}.$$

COROLLAIRE.

Il est donc évident que la différence cherchée est

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + n} \dots \text{lorsque l'augmentation est} \dots \\ & \frac{2 \cdot n}{\zeta + n \cdot \zeta + 2n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{\zeta \cdot \zeta + 2n} \dots \\ & \frac{3 \cdot n}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 3n} + \frac{3 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{\zeta + n \cdot \zeta + 3n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3}{\zeta \cdot \zeta + 3n} \dots \\ & \frac{4 \cdot n}{\zeta + 3n \cdot \zeta + 4n} + \frac{6 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 4n} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3}{\zeta + n \cdot \zeta + 4n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4}{\zeta \cdot \zeta + 4n} \dots \\ & \frac{5 \cdot n}{\zeta + 4n \cdot \zeta + 5n} + \frac{10 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{\zeta + 3n \cdot \zeta + 5n} + \frac{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3}{\zeta + 2n \cdot \zeta + 5n} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4}{\zeta + n \cdot \zeta + 5n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^5}{\zeta \cdot \zeta + 5n} \dots \end{aligned}$$

Si l'on examine ces suites, on verra, 1°. qu'elles contiennent autant de termes que l'augmentation contient de fois n . 2°. Que les numérateurs de ces termes sont composés des coefficients de la puissance d'un binôme, laquelle puissance est indiquée par l'augmentation, en observant de retrancher le premier coefficient de chacune de ces puissances. 3°. Que les coefficients restans sont chacun multipliés par le terme correspondant de cette suite $1.n, 1.n.2n, 1.n.2n.3n, 1.n.2n.3n.4n, 1.n.2n.3n.4n.5n, \&c.$ 4°. Que les dénominateurs de chacun de ces termes sont tels, que le dernier terme a autant de facteurs $z. z+n. z+2n. z+3n. z+4n, \&c.$ plus un, que l'augmentation contient de fois n : que le pénultième a tous les facteurs du dernier, excepté le premier facteur; que l'antépénultième a tous les facteurs du précédent, excepté le premier, & ainsi de suite.

D'où il suit que si l'on nomme m l'augmentation, on aura cette suite

$$\begin{aligned}
 & \frac{m}{z+m-n} + \frac{m \cdot m - n}{z+m-2n} + \frac{m \cdot m - 2n \dots z+m}{m \cdot m - n \cdot m - 2n} \\
 & + \frac{m \cdot m - 3n \dots z+m}{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n} + \frac{m \cdot m - 4n \dots z+m}{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n} \\
 & + \dots = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+m}
 \end{aligned}$$

pour la différence d'une fraction dont le dénominateur n'est composé que d'un facteur, l'augmentation qui doit arriver à ce facteur étant m .

PROPOSITION II.

Trouver la différence d'une fraction $\frac{1}{z \cdot z+n}$, dont le dénominateur est composé de deux facteurs, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant $n, 2n. 3n. 4n. 5n. 6n$, ou enfin m .

1°. Si l'augmentation est n , cette expression deviendra $\frac{1}{z+n. z+2n}$, la différence de l'une à l'autre est donc $\frac{1}{z \cdot z+n} - \frac{1}{z+n. z+2n}$, qui se réduit, en mettant à même dénomination, à $\frac{z \cdot z+n - (z+n)(z+2n)}{z \cdot z+n \cdot (z+n)(z+2n)}$.

2°. Si l'augmentation est $2n$, la différence demandée sera

$\frac{1}{x \cdot x + n} - \frac{1}{x + 2n \cdot x + 3n}$, qui étant mis à même dénomination, devient $\frac{x + 2n \cdot x + 3n - x \cdot x + n}{x \cdot \dots \cdot x + 3n}$, qui se réduit par la première section à $\frac{2 \cdot 2n \cdot x + n + n \cdot 2n}{x \cdot \dots \cdot x + 3n} = \frac{4n}{x + n \cdot \dots \cdot x + 3n} + \frac{6nn}{x \cdot \dots \cdot x + 3n}$.

3°. Si l'augmentation est $3n$, l'expression $\frac{1}{x \cdot x + n}$ deviendra par cette augmentation $\frac{1}{x + 3n \cdot x + 4n}$, la différence de l'une à l'autre est donc $\frac{x + 3n \cdot x + 4n - x \cdot x + n}{x \cdot x + n \cdot x + 3n \cdot x + 4n}$, qui se réduit

par la première section à $\frac{2 \cdot 3n \cdot x + n + 2n \cdot 3n}{x \cdot x + n \cdot x + 3n \cdot x + 4n}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par le facteur qui manque dans le dénominateur, pour que tous les facteurs soient consécutifs, il viendra $\frac{2 \cdot 3n \cdot x + n \cdot x + 2n + 2n \cdot 3n \cdot x + 2n}{x \cdot x + n \cdot \dots \cdot x + 4n}$. Le premier terme du nu-

mérateur se réduit par la décomposition à $\frac{2 \cdot 3n}{x + 2n \cdot \dots \cdot x + 4n} + \frac{2 \cdot 3n \cdot 2n}{x + n \cdot \dots \cdot x + 4n} + \frac{2 \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{x \cdot \dots \cdot x + 4n}$. Le second terme se réduit aussi à $\frac{2n \cdot 3n}{x + n \cdot \dots \cdot x + 4n} + \frac{2n \cdot 3n \cdot 2n}{x \cdot \dots \cdot x + 4n}$. La différence demandée est donc $\frac{6n}{x + 2n \cdot \dots \cdot x + 4n} + \frac{18n^2}{x + n \cdot \dots \cdot x + 4n} + \frac{24n^3}{x \cdot \dots \cdot x + 4n}$.

4°. Si l'augmentation est $4n$, l'expression $\frac{1}{x \cdot x + n}$ deviendra par cette augmentation $\frac{1}{x + 4n \cdot x + 5n}$, la différence de ces deux quantités est donc $\frac{x + 4n \cdot x + 5n - x \cdot x + n}{x \cdot x + n \cdot x + 4n \cdot x + 5n}$, qui se réduit

par la première section à $\frac{2 \cdot 4n \cdot x + n + 3n \cdot 4n}{x \cdot x + n \cdot x + 4n \cdot x + 5n}$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur par les facteurs $x + 2n$, $x + 3n$ qui manque au dénominateur pour que

que tous ses facteurs soient consécutifs, il viendra

$$\frac{2 \cdot 4n \cdot z + n \cdot z + 2n \cdot z + 3n + 3n \cdot 4n \cdot z + 2n \cdot z + 3n}{z \dots z + 5n} \text{ Le premier terme}$$

se réduit par la décomposition à $\frac{2 \cdot 4n}{z + 3n \cdot z + 5n} + \frac{2 \cdot 4n \cdot 3n}{z + 2n \cdot z + 5n}$

$$+ \frac{2 \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n}{z + n \dots z + 5n} + \frac{2 \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{z \dots z + 5n} \text{ Le second terme qui}$$

vaut $\frac{3n \cdot 4n \cdot z + n \cdot z + 3n}{z \dots z + 5n} (A) + \frac{3n \cdot 4n \cdot n \cdot z + 3n}{z \dots z + 5n} (B)$ se réduit de

$$\text{même à } \frac{3n \cdot 4n}{z + 2n \dots z + 5n} + \frac{3n \cdot 4n \cdot 3n}{z + n \dots z + 5n} + \frac{3n \cdot 4n \cdot 3n \cdot n}{z \dots z + 5n} = A,$$

$$\frac{3n \cdot 4n \cdot n}{z + n \dots z + 5n} + \frac{3n \cdot 4n \cdot n \cdot 3n}{z \dots z + 5n} = B. \text{ Si donc l'on rassemble tou-}$$

tes ces parties, on aura $\frac{8n}{z + 3n \dots z + 5n} + \frac{36nn}{z + 2n \dots z + 5n}$

$$+ \frac{96n^3}{z + n \dots z + 5n} + \frac{120n^4}{z \dots z + 5n}.$$

5°. Si l'augmentation est $5n$, l'expression $\frac{z}{z \cdot z + n}$ devien-
dra par cette augmentation $\frac{z}{z + 5n \cdot z + 6n}$, la différence de

l'une à l'autre est donc $\frac{z + 5n \cdot z + 6n - z \cdot z + n}{z \cdot z + n \cdot z + 5n \cdot z + 6n}$, qui se réduit par

la première section à $\frac{2 \cdot 5n \cdot z + n + 4n \cdot 5n}{z \cdot z + n \cdot z + 5n \cdot z + 6n}$, & en multipliant le

numérateur & le dénominateur de cette fraction par $z + 2n$,

$z + 3n$, $z + 4n$, qui sont les facteurs qui manquent

au dénominateur pour qu'ils soient consécutifs, on aura

$$\frac{2 \cdot 5n \cdot z + n \cdot z + 2n \cdot z + 3n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot z + 2n \cdot z + 3n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n},$$

en décomposant le premier terme, il vient $\frac{2 \cdot 5n}{z + 4n \dots z + 6n}$

$$+ \frac{2 \cdot 5n \cdot 4n}{z + 3n \dots z + 6n} + \frac{2 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{2 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n}{z + n \dots z + 6n}$$

$$+ \frac{2 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{z \dots z + 6n} \text{ Le second terme se réduit à}$$

$$\frac{4n \cdot 5n \cdot z + n \cdot z + 2n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n} = \frac{4n \cdot 5n \cdot z + n \cdot z + 2n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n} (A)$$

$$+ \frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot z + n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n} (B) + \frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot n \cdot z + 4n}{z \dots z + 6n} (C) \text{ qui}$$

Mem. 1723.

A a

par la décomposition, deviennent $\frac{4n \cdot 5n}{z + 3n \dots z + 6n} + \dots$

$$\frac{4n \cdot 5n \cdot 4n}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 4n \cdot 2n}{z + n \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 4n \cdot 2n \cdot n}{z \dots z + 6n} = A,$$

$$\frac{4n \cdot 5n \cdot 2n}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot 4n}{z + n \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot 4n \cdot n}{z \dots z + 6n} = B,$$

$$\frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot n}{z + n \dots z + 6n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 2n \cdot n \cdot 4n}{z \dots z + 6n} = C. \text{ Si l'on rassemble}$$

$$\text{toutes ces parties, on aura } \frac{10n}{z + 4n \dots z + 6n} + \frac{60nn}{z + 3n \dots z + 6n}$$

$$\frac{240n^3}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{600n^4}{z + n \dots z + 6n} + \frac{720n^5}{z \dots z + 6n} \text{ pour}$$

la différence cherchée.

COROLLAIRE.

Il est donc évident que la différence cherchée est

$\frac{10n}{z + 2n} \dots$ lorsque l'augmentation est $\dots \dots \dots n$

$$\frac{2 \cdot 2n}{z + n \dots z + 3n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2}{z \dots z + 3n} \dots \dots \dots 2n$$

$$\frac{3 \cdot 2n}{z + 2n \dots z + 4n} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2}{z + n \dots z + 4n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3}{z \dots z + 4n} \dots \dots \dots 3n$$

$$\frac{4 \cdot 2n}{z + 3n \dots z + 5n} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2}{z + 2n \dots z + 5n} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3}{z + n \dots z + 5n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^4}{z \dots z + 5n} \dots \dots \dots 4n$$

$$\frac{5 \cdot 2n}{z + 4n \dots z + 6n} + \frac{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2}{z + 3n \dots z + 6n} + \frac{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^4}{z + n \dots z + 6n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot n^5}{z \dots z + 6n} 5n$$

&c.

Si l'on examine tous ces termes & leurs coefficients, lesquels sont marqués par le premier chiffre de chaque terme, on verra que ces coefficients sont ceux des puissances d'un binome, excepté le premier terme; c'est-à-dire, par exemple, que lorsque l'augmentation est $3n$, la différence cherchée est composée de trois termes, & que les premiers chiffres de chacun de ces trois termes sont les coefficients du binome élevé au cube, & ainsi des autres.

D'où il suit que si l'on nomme m l'augmentation que chaque facteur doit recevoir, on aura cette suite

$$\frac{2 \cdot m}{z + m = n \cdot z + m \cdot z + m + n} + \frac{m \cdot m = n \cdot 3}{z + m = 2n \dots z + m + n}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2 n \cdot 4}{x + m - 3 n \dots x + m + n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2 n \cdot m - 2 n \cdot 5}{x + m - 4 n \dots x + m + n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2 n \cdot m - 3 n \cdot m - 4 n \cdot 6}{x + m - 5 n \dots x + m + n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2 n \cdot m - 3 n \cdot m - 4 n \cdot m - 5 n \cdot 7}{x + m - 6 n \dots x + m + n} \\
 & + \&c. = \frac{1}{x \cdot x + n} - \frac{1}{x \cdot x + m \cdot x + n + m} \text{ pour la différence}
 \end{aligned}$$

d'une fraction dont le dénominateur est composé de deux facteurs, lesquels doivent augmenter de la grandeur m .

Cette suite sera composée d'autant de termes que la grandeur m contiendra de fois la grandeur n .

PROPOSITION III.

Trouver la différence d'une grandeur algébrique fractionnaire, dont le dénominateur est composé de trois facteurs, quelle que soit l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur.

Soit cette expression algébrique $\frac{1}{x \cdot x + n \cdot x + 2 n}$ dont on demande la différence, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant n , $2 n$, $3 n$, $4 n$, $5 n$, $6 n$, ou enfin m .

1°. Si l'augmentation est n , cette expression deviendra

$$\frac{1}{x + n \cdot x + 2 n \cdot x + 3 n}, \text{ la différence de l'une à l'autre est donc } \frac{1}{x \cdot x + n \cdot x + 2 n} - \frac{1}{x + n \cdot x + 2 n \cdot x + 3 n} = \frac{3 n}{x \dots x + 3 n}$$

2°. Si l'augmentation est $2 n$, la différence demandée sera

$$\frac{1}{x \cdot x + n \cdot x + 2 n} - \frac{1}{x + 2 n \cdot x + 3 n \cdot x + 4 n} = \frac{x + 3 n \cdot x + 4 n - x \cdot x + n}{x \dots x + 4 n}$$

qui se réduit par la première section à $\frac{2 \cdot 3 n \cdot x + n + 2 n \cdot 3 n}{x \dots x + 4 n}$, &

$$\text{en décomposant à } \frac{2 \cdot 3 n}{x + n \dots x + 4 n} + \frac{2 \cdot 3 n \cdot n}{x \dots x + 4 n} + \frac{2 n \cdot 3 n}{x \dots x + 4 n}$$

3°. Si l'augmentation est $3 n$, la différence demandée sera

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x \cdot x + n \cdot x + 2 n} - \frac{1}{x + 3 n \cdot x + 4 n \cdot x + 5 n} = \frac{x + 3 n \cdot x + 4 n \cdot x + 5 n - x \cdot x + n \cdot x + 2 n}{x \dots x + 5 n} \\
 & = \frac{3 \cdot 3 n \cdot x + n \cdot x + 2 n + 3 \cdot 2 n \cdot 3 n \cdot x + n + 1 \cdot 2 n \cdot 3 n \cdot 4 n}{x \dots x + 5 n}
 \end{aligned}$$

Le premier

A a ij

terme se réduit, en décomposant, à $\frac{3 \cdot 3 n}{z + 2 n \dots z + 5 n}$
 $+$ $\frac{3 \cdot 3 n \cdot 2 n}{z + n \dots z + 5 n}$ $+$ $\frac{3 \cdot 3 n \cdot 2 n \cdot n}{z \dots z + 5 n}$. Le second à $\frac{3 \cdot 2 n \cdot 3 n}{z + 2 n \dots z + 5 n}$
 $+$ $\frac{3 \cdot 2 n \cdot 3 n \cdot n}{z \dots z + 5 n}$. La différence cherchée est donc $\frac{9 n}{z + 2 n \dots z + 5 n}$
 $+$ $\frac{36 n^2}{z + n \dots z + 5 n}$ $+$ $\frac{60 n^3}{z \dots z + 5 n}$.

4°. Si l'augmentation est $4 n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z \cdot z + n \cdot z + 2 n} - \frac{1}{z + 4 n \cdot z + 5 n \cdot z + 6 n}$

$= \frac{3 \cdot 4 n \cdot z + n \cdot z + 2 n + 3 \cdot 3 n \cdot 4 n \cdot z + n + 3 n \cdot 4 n \cdot 5 n}{z \cdot z + n \cdot z + 2 n \cdot z + 4 n \cdot z + 5 n \cdot z + 6 n}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par $z + 3 n$, qui est le facteur qui manque au dénominateur, pour que tous les facteurs soient consécutifs, on aura

$$\frac{3 \cdot 4 n \cdot z + n \cdot z + 2 n \cdot z + 3 n + 3 \cdot 3 n \cdot 4 n \cdot z + n \cdot z + 3 n + 3 n \cdot 4 n \cdot 5 n \cdot z + 3 n}{z \dots z + 6 n}$$

Le premier terme se réduit par la décomposition à $\frac{3 \cdot 4 n}{z + 3 n \cdot z + 6 n}$

$\frac{3 \cdot 4 n \cdot 3 n}{z + 2 n \cdot z + 6 n} + \frac{3 \cdot 4 n \cdot 3 n \cdot 2 n}{z + n \cdot z + 6 n} + \frac{3 \cdot 4 n \cdot 3 n \cdot 2 n \cdot n}{z \dots z + 6 n}$. Le second à $\frac{3 \cdot 3 n \cdot 4 n}{z + 2 n \cdot z + 6 n} + \frac{3 \cdot 3 n \cdot 4 n \cdot 3 n}{z + n \cdot z + 6 n} + \frac{3 \cdot 3 n \cdot 4 n \cdot 3 n \cdot n}{z \dots z + 6 n}$.

Le troisieme à $\frac{3 n \cdot 4 n \cdot 5 n}{z + 2 n \cdot z + 6 n} + \frac{3 n \cdot 4 n \cdot 5 n \cdot 3 n}{z \dots z + 6 n}$. La différence cherchée est donc $\frac{12 n}{z + 3 n \cdot z + 6 n} + \frac{72 n^2}{z + 2 n \cdot z + 6 n}$
 $+$ $\frac{240 n^3}{z + n \cdot z + 6 n} + \frac{360 n^4}{z \cdot z + 6 n}$.

5°. Si l'augmentation est $5 n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z \cdot z + n \cdot z + 2 n} - \frac{1}{z + 5 n \cdot z + 6 n \cdot z + 7 n}$

$= \frac{3 \cdot 5 n \cdot z + n \cdot z + 2 n + 3 \cdot 4 n \cdot 5 n \cdot z + n + 4 n \cdot 5 n \cdot 6 n}{z \cdot z + n \cdot z + 2 n \cdot z + 5 n \cdot z + 6 n \cdot z + 7 n}$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur par $z + 3 n$.

$z + 4 n$, qui sont les facteurs qui manquent au dénominateur, pour que tous les facteurs soient consécutifs, on aura

$$3 \cdot 5 n \cdot z + n \cdot z + 2 n \cdot z + 3 n \cdot z + 4 n + 3 \cdot 4 n \cdot 5 n \cdot z + n \cdot z + 3 n \cdot z + 4 n + 4 n \cdot 5 n \cdot 6 n \cdot z + 3 n \cdot z + 4$$

$$z \dots z + 7 n$$

Le premier terme se réduit à $\frac{3 \cdot 5n}{z + 4n \dots z + 7n} + \frac{3 \cdot 5n \cdot 4n}{z + 3n \dots z + 7n}$
 $+ \frac{3 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n}{z + 2n \dots z + 7n} + \frac{3 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n}{z + n \dots z + 7n} + \frac{3 \cdot 5n \cdot 4n \cdot 3n \cdot 2n \cdot n}{z \dots z + 7n}.$

Le second se réduit à $\frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot z + n \cdot z + 2n \cdot z + 4n}{z \dots z + 7n} (A)$

$+ \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot n \cdot z + n \cdot z + 4n}{z \dots z + 7n} (B)$, dont la décomposition donne

$A = \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n}{z + 3n \dots z + 7n} + \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot 4n}{z + 2n \dots z + 3n} + \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot 4n \cdot 2n}{z + n \dots z + 7n}$

$+ \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot 4n \cdot 2n \cdot n}{z \dots z + 7n}$, & $B = \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot n}{z + 2n \dots z + 7n} + \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot n \cdot 4n}{z + n \dots z + 7n}$

$+ \frac{3 \cdot 4n \cdot 5n \cdot n \cdot 4n \cdot n}{z \dots z + 7n}$. Le troisieme terme se réduit à

$\frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot z + n \cdot z + 4n}{z \dots z + 7n} (C) + \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot 2n \cdot z + 4n}{z \dots z + 7n} (D)$, dont

la décomposition donne $C = \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n}{z + 2n \dots z + 7n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot 4n}{z + n \dots z + 7n}$

$+ \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot 4n \cdot n}{z \dots z + 7n}$, & $D = \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot 2n}{z + n \dots z + 7n} + \frac{4n \cdot 5n \cdot 6n \cdot 2n \cdot 4n}{z \dots z + 7n}$.

Si donc on rassemble toutes ces parties, on aura

$\frac{15n}{z + 4n \dots z + 7n} + \frac{120n^2}{z + 3n \dots z + 7n} + \frac{600n^3}{z + 2n \dots z + 7n} + \frac{1800n^4}{z + n \dots z + 7n}$

$+ \frac{2520n^5}{z \dots z + 7n}$ pour la différence cherchée.

6°. Si l'augmentation est $6n$, on trouvera en suivant la même méthode

$\frac{18n}{z + 5n \dots z + 8n} + \frac{180n^2}{z + 4n \dots z + 8n} + \frac{1200n^3}{z + 3n \dots z + 8n} + \frac{5400n^4}{z + 2n \dots z + 8n}$

$+ \frac{15120n^5}{z + n \dots z + 8n} + \frac{20160n^6}{z \dots z + 8n}$ pour la différence demandée.

C O R O L L A I R E.

Il est donc évident que la différence d'une fraction dont le dénominateur est composé de trois facteurs est

$\frac{1 \cdot 3 \cdot n}{z \dots z + 3n} \dots$ lorsque l'augmentation est $\dots \dots \dots n^3$

$\frac{2 \cdot 3 \cdot n}{z + n \dots z + 4n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^2}{z \dots z + 4n} \dots \dots \dots 2n^3$

$\frac{3 \cdot 3 \cdot n}{z + 2n \dots z + 5n} + \frac{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^2}{z + n \dots z + 5n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^3}{z \dots z + 5n} \dots \dots \dots 3n^3$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot n}{z + 3n \dots z + 6n} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^2}{z + 2n \dots z + 6n} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^3}{z + n \dots z + 6n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot n^4}{z \dots z + 6n} \dots \dots \dots 4n^3$

$\frac{5 \cdot 3 \cdot n}{z + 4n \dots z + 7n} + \frac{10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^2}{z + 3n \dots z + 7n} + \frac{10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^3}{z + 2n \dots z + 7n} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot n^4}{z + n \dots z + 7n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot n^5}{z \dots z + 7n} 5n^3$

A a iij

Si l'on examine tous ces termes, & leurs coefficients qui sont représentés par le premier chiffre de chaque terme, on verra que la différence d'une fraction composée de trois facteurs, sera composée d'autant de termes, que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur contient de fois n , & que les coefficients de ces termes sont ceux du binome élevé à une puissance égale à l'augmentation que doit recevoir chaque facteur, en observant de retrancher le premier coefficient de cette puissance.

D'où il suit, que si l'on veut que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur soit m , on aura cette suite

$$\begin{aligned} & \frac{m. 3}{x + m - n \dots x + m + 2n} + \frac{m. m - n. 3. 4}{2. x + m - 2n \dots x + m + 2n} \\ & + \frac{m. m - n. m - 2n. 4. 5}{2. x + m - 3n \dots x + m + 2n} + \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. 5. 6}{2. x + m - 4n \dots x + m + 2n} \\ & + \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. m - 4n. 6. 7}{2. x + m - 5n \dots x + m + 2n} + \&c. = \frac{1}{x. x + n. x + 2n} \\ & - \frac{1}{x + m. x + n + m. x + 2n + m} \text{ pour la différence cherchée.} \end{aligned}$$

Si l'on cherche par la même méthode, la différence d'une fraction, dont le dénominateur soit composé de quatre facteurs, & l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur soit m , on trouvera cette suite

$$\begin{aligned} & \frac{m. 4}{x + m - n \dots x + m + 3n} + \frac{m. m - n. 4. 5}{2. x + m - 2n \dots x + m + 3n} \\ & + \frac{m. m - n. m - 2n. 4. 5. 6}{2. 3. x + m - 3n \dots x + m + 3n} + \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. 5. 6. 7}{2. 3. x + m - 3n \dots x + m + 3n} \\ & + \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. m - 4n. 6. 7. 8}{2. 3. x + m - 5n \dots x + m + 3n} + \&c. = \frac{1}{x. x + n. x + 2n. x + 3n} \\ & - \frac{1}{x + m. x + n + m. x + 2n + m. x + 3n + m} \end{aligned}$$

Si l'on cherche la différence d'une fraction dont le dénominateur soit composé de cinq facteurs, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant m , on trouvera cette suite

$$\frac{m. 5}{x + m - n \dots x + m + 4n} + \frac{m. m - n. 5. 6}{2. x + m - 2n \dots x + m + 4n}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + m - 3n \dots 4n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + m - 4n \dots 4n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + m - 4n \dots 4n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n \cdot m - 5n \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + m - 6n \dots 4n} + \&c. \\
 & \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \\
 & \frac{1}{1} \cdot 1 + n \cdot 1 + 2n \cdot 1 + 3n \cdot 1 + 4n \quad 1 + m \cdot 1 + n \cdot 1 + 2n \cdot 1 + 3n \cdot 1 + 4n + m
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

On aura donc ces suites, pour la différence d'une fraction composée de 1. 2. 3. 4. 5. &c. facteurs, l'augmentation étant m .

$$\begin{aligned}
 & \frac{m \cdot 1}{1 + m - n \cdot 1 + m} + \frac{m \cdot m - n}{1 + m - 2n \dots 1 + m} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n}{1 + m - 3n \dots 1 + m} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n}{1 + m - 4n \dots 1 + m} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n}{1 + m - 5n \dots 1 + m} \\
 & + \&c. \text{ pour un facteur.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m \cdot 2}{1 + m - n \cdot 2 + m + n} + \frac{m \cdot m - n \cdot 3}{1 + m - 2n \dots 1 + m + n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot 4}{1 + m - 3n \dots 1 + m + n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot 5}{1 + m - 4n \dots 1 + m + n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n \cdot 6}{1 + m - 5n \dots 1 + m + n} \\
 & \&c. \text{ pour deux facteurs.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m \cdot 3}{1 + m - n \dots 1 + m + 2n} + \frac{m \cdot m - n \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 1 + m - 2n \dots 1 + m + 2n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 1 + m - 3n \dots 1 + m + 2n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 1 + m - 4n \dots 1 + m + 2n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 1 + m - 5n \dots 1 + m + 2n} \&c. \text{ pour 3 facteurs.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m \cdot 4}{1 + m - n \dots 1 + m + 3n} + \frac{m \cdot m - n \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 1 + m - 2n \dots 1 + m + 3n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 1 + m - 3n \dots 1 + m + 3n} + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 1 + m - 4n \dots 1 + m + 3n} \\
 & + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot m - 3n \cdot m - 4n \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 1 + m - 5n \dots 1 + m + 3n} \&c. \text{ pour 4 fac-} \\
 & \text{teurs.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{m. 5}{z + m - n \dots z + m + 4n} + \frac{m. m - n. 5. 6}{2. z + m - 2n \dots z + m + 4n} \\
+ \frac{m. m - n. m - 2n. 5. 6. 7}{2. 3. z + m - 3n \dots z + m + 4n} + \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. 5. 6. 7. 8}{2. 3. 4. z + m - 4n \dots z + m + 4n} \\
+ \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. m - 4n. 6. 7. 8. 9}{2. 3. 4. z + m - 5n \dots z + m + 4n} \&c. \text{ pour cinq} \\
\text{facteurs.}
\end{array}$$

La loi de ces suites est aisée à appercevoir, 1°. elles ont toutes le même nombre de termes quel que soit le nombre des facteurs, pourvu que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur soit la même : par exemple, si $m = 4n$, le 5^e terme de toutes ces suites s'évanouit, aussi-bien que tous les termes qui le suivent.

2°. Les chiffres qui, dans chaque terme de ces suites, multiplient les quantités $m. m - n. m - 2n. \&c.$ expriment les nombres figurés d'une bande horisontale du triangle arithmétique de M. Paschal, laquelle bande est indiquée par le nombre des facteurs de la fraction dont on a pris la différence, c'est-à-dire, que si la fraction est composée, par exemple, de trois facteurs, ces quantités seront les nombres figurés du troisième ordre, &c. dont on excepte le premier terme. De là il suit que si l'on nomme p le nombre des facteurs, on aura cette suite pour la différence d'une fraction dont le nombre des facteurs est p .

$$\begin{array}{l}
\frac{m. p}{z + m - n \dots z + m + p - 1. n} \\
+ \frac{m. m - n. p. p + 1}{2. z + m - 2n \dots z + m + p - 1. n} + \frac{m. m - n. m - 2n. p. p + 1. p + 2}{1. 2. 3. z + m - 3n \dots z + m + p - 1. n} \\
+ \frac{m. m - n. m - 2n. m - 3n. p. p + 1. p + 2. p + 3}{1. 2. 3. 4. z + m - 4n \dots z + m + p - 1. n} + \&c. \\
\frac{z + m - n \dots z + p - 1. n}{1} \quad \frac{z + m. z + m + n \dots z + m + p - 1. n}{1}
\end{array}$$

COROLLAIRE II.

Il est donc évident par cette formule, que toute suite de fractions

fractions est sommable dont les dénominateurs sont composés de facteurs qui augmentent arithmétiquement, & dont chaque terme a un facteur de plus que le terme qui le précède, les numérateurs de ces fractions étant les nombres figurés du triangle arithmétique de M. Paschal, multipliés chacun par le terme correspondant de $m, m. m - n, m. m - n. m - 2n, \&c.$

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose $m = n$, tous les termes de cette suite s'évanouiront, excepté le premier terme, l'on aura alors $\frac{p^n}{1 \dots 1 + n + p - 1. n}$, ce qui est le cas du Mémoire imprimé en 1717.

COROLLAIRE IV.

Si l'on suppose $n = 0$, c'est-à-dire, que la fraction dont on a pris la différence soit composée de tant de facteurs égaux qu'on voudra, la suite deviendra

$$\frac{p \cdot m}{1 + m} + \frac{p \cdot p + 1 \cdot m^2}{1 \cdot 2 \cdot 1 + m} + \frac{p \cdot p + 1 \cdot p + 2 \cdot m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 + m} + \frac{p \cdot p + 1 \cdot p + 2 \cdot p + 3 \cdot m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 + m} + \&c. = \frac{1}{1^p} - \frac{1}{1 + m}.$$

D'où l'on voit qu'une suite infinie est sommable, dont tous les termes sont les produits de chaque terme d'une progression géométrique, multipliés par chaque terme d'une suite de nombres figurés.

Exemple. Soit cette suite $\frac{4 \cdot a}{b + a} + \frac{10 \cdot a^2}{b + a} + \frac{20 \cdot a^3}{b + a} + \frac{35 \cdot a^4}{b + a} + \&c.$ qui est formée par les termes d'une progression géométrique, dont le premier est Bb .
Mem. 1723.

$\frac{a}{b+a}$, & par les nombres figurés du 4^e ordre, la somme

de cette suite sera $\frac{x}{b^4} - \frac{x}{b+a^4}$.

Si l'on substitue successivement dans la suite générale pour p , m & z les valeurs que l'on voudra, il naîtra une infinité de suites qui seront toutes sommables.

Voici une autre maniere de trouver les sommes de ces suites.

Soit $\frac{a}{1-a}$, si l'on fait la division à l'infini de cette expression, on aura

$$a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + \&c.$$

jusques à l'infini.

On pourra donc substituer $\frac{a}{1-a}$ pour une telle suite; & si l'on a cette autre

$$a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c. \text{ en la décomposant}$$

$$\text{en } a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a}{1-a}$$

$$+ aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{aa}{1-a}$$

$$+ a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^3}{1-a}$$

$$+ a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^4}{1-a}$$

$$+ a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^5}{1-a}$$

$$+ a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^6}{1-a}$$

$$+ a^7 + \&c. = \frac{a^7}{1-a}$$

$$\text{il viendra } a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c. =$$

$$\frac{1}{1-a} \times a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c.$$

$$= \frac{a}{1-a^2}$$

Si l'on a cette autre suite

$$a + 3aa + 6a^3 + 10a^4 + 15a^5 + 21a^6 + 28a^7 + \&c.$$

qui est composée des nombres figurés du 3^e ordre multipliés par une progression géométrique, on la décomposera en

$$a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c. = \frac{a}{1-a}$$

$$+ aa + 2a^3 + 3a^4 + 4a^5 + 5a^6 + 6a^7 + \&c. = \frac{aa}{1-a^2}$$

$$+ a^3 + 2a^4 + 3a^5 + 4a^6 + 5a^7 + \&c. = \frac{a^3}{1-a^2}$$

$$+ a^4 + 2a^5 + 3a^6 + 4a^7 + \&c. = \frac{a^4}{1-a^2}$$

$$+ a^5 + 2a^6 + 3a^7 + \&c. = \frac{a^5}{1-a^2}$$

$$+ a^6 + 2a^7 + \&c. = \frac{a^6}{1-a^2}$$

$$+ a^7 + \&c. = \frac{a^7}{1-a^2}$$

$$\text{Donc } a + 3a^2 + 6a^3 + 10a^4 + 15a^5 + 21a^6 + 28a^7 + \&c. =$$

$$\frac{1}{1-a^2} \times a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \&c.$$

$$= \frac{a}{1-a^2}$$

Il est clair que dans les nombres figurés de tous les ordres, la même décomposition aura lieu

$$\text{La suite } a + p.a^2 + \frac{p.p+1}{1.2}.a^3 + \frac{p.p+1.p+2}{1.2.3}.a^4$$

$$+ \frac{p.p+1.p+2.p+3}{1.2.3.4}.a^5 + \frac{p.p+1.p+2.p+3.p+4}{1.2.3.4.5}.a^6 + \&c.$$

$$\text{fera donc égale à } \frac{a}{1-a^2}.$$

B b ij

REMARQUE I.

Si l'on fait attention à la règle générale qui a été trouvée pour prendre la différence d'une fraction composée de tant de facteurs qu'on voudra, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant aussi quelconque, on appercevra aussi ce qu'il faut faire, une différence quelconque étant donnée pour retrouver la grandeur dont elle est la différence, ou si il n'y a qu'une partie de cette différence de donnée, on découvrira ce qui manque à cette partie pour retrouver la grandeur dont elle est la différence, cette grandeur est l'intégrale de la différence donnée.

REMARQUE II.

Les grandeurs m , n & p qui entrent dans la formule générale de la différence d'une fraction quelconque, étant toutes trois indéterminées, il est clair que si l'on détermine l'une de ces trois grandeurs, ou deux quelconques, ou enfin toutes trois, & que l'on substitue dans la formule ces valeurs déterminées, cette formule recevra autant de différens changemens que ces trois grandeurs peuvent recevoir de différentes valeurs, & que dans chaque état de cette formule elle exprimera la différence finie d'une expression algébrique fractionnaire dont l'intégrale fini sera par conséquent cette fraction.

Application du Corollaire général à la recherche des sommes des suites.

EXEMPLE I.

Si l'on suppose dans la formule générale $m=4$, $n=2$ & $p=3$, elle se changera en $\frac{12}{1+2 \dots 1+3} + \frac{48}{1 \dots 1+3}$.

Si l'on suppose de plus que z , a successivement les valeurs, 1, 5, 9, 13, 17, 21. &c. ces deux termes seront les formules des deux suites

$$\frac{12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{12}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{12}{11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17} + \frac{12}{15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21} + \&c.$$

$$\& \frac{48}{1.3.5.7.9} + \frac{48}{5.7.9.11.13} + \frac{48}{9.11.13.15.17} + \frac{48}{13.15.17.19.21} + \&c.$$

Pour avoir la somme de ces deux suites il ne faut donc que prendre l'intégrale de cette formule $\frac{12}{z+2\dots z+8} + \frac{48}{z\dots z+8}$, cette intégrale est $\frac{1}{z.z+2.z+4}$, puisque par la formule générale la différence de cette grandeur est $\frac{12}{z+2\dots z+8} + \frac{48}{z\dots z+8}$, la somme de ces deux suites prises depuis les termes $\frac{12}{z+2\dots z+8} + \frac{48}{z\dots z+8}$, jusques à l'infini est donc $\frac{1}{z.z+2.z+4}$, ce qui donne pour la somme entière des deux suites $\frac{1}{1.3.5}$. Car alors $z = 1$.

E X E M P L E II.

Si l'on suppose $m = 4n$, $n = 3$ & $p = 5$, on aura

$$\frac{12.5}{z+9\dots z+24} + \frac{12.9.10}{z+6\dots z+24} + \frac{12.9.6.10}{z+3\dots z+24}$$

pour la différence qui convient à ces suppositions, & chaque terme de cette différence sera la formule d'une suite dans laquelle z , a successivement les valeurs, 1. 13. 25. 37. 49. 61. &c. Ces suites seront donc

$$\begin{aligned} & \frac{12.5}{10.13.16.19.22.25} + \frac{12.5}{22.25.28.31.34.37} + \frac{12.5}{34.37.40.43.46.49} + \&c. \\ & \frac{12.9.10}{7.10.13.16.19.22.25} + \frac{12.9.10}{19.22.25.28.31.34.37} + \frac{12.9.10}{31.34.37.40.43.46.49} + \&c. \\ & \frac{12.9.6.10}{47.10.13.16.19.22.25} + \frac{12.9.6.10}{16.19.22.25.28.31.34.37} + \frac{12.9.6.10}{28.31.34.37.40.43.46.49} \end{aligned}$$

+ &c. dont l'intégrale est $\frac{1}{z.z+3.z+6.z+9.z+12}$ qui est la somme de ces trois suites, depuis le terme exprimé par $\frac{12.5}{z+9\dots z+24} + \frac{12.9.10}{z+6\dots z+24} + \frac{12.9.6.10}{z+3\dots z+24}$ jusques à l'infini, ce qui donne pour la somme entière des trois suites $\frac{1}{1.4.7.10.13}$; car alors $z = 1$.

COROLLAIRE.

La différence d'une fraction étant composée d'autant de termes que m contient de fois n , & chacun de ces termes pouvant être la formule d'une suite, il est évident que soit que l'on considère ces termes en particulier, ou qu'on les réduise en un seul, en les mettant à même dénomination, dans l'un & l'autre cas on trouvera toujours l'intégrale de la somme de plusieurs suites, ou d'une seule suite égale à toutes les autres.

DES MERVEILLES DES DAILS,

Ou de la lumiere qu'ils répandent.

Par M. DE REAUMUR.

2 Juin.
1723.

C'EST d'après Pline que je donne le premier titre; il n'est qu'une traduction de celui du Chapitre LXI. du IX^{me} Livre de son Histoire naturelle; aussi ce Mémoire ne sera-t-il qu'une espece de Commentaire du même Chapitre. Il s'y agit des plus curieux phénomènes que nous connoissons dans le genre des phosphores naturels; une espece de coquillage les fait voir. Tout ce que ce célèbre naturaliste a fait entrer dans son immense Recueil n'est pas également certain; souvent il a eu soin d'avertir qu'il ne parloit que sur le témoignage d'Auteurs qu'il cite, ou sur des *on dit*; & il seroit à souhaiter qu'il eût rapporté, avec la même circonspection, généralement tous les faits dont il n'étoit pas assez sûr par lui-même: mais comme il a négligé de le faire, nous sommes dans la nécessité de vérifier de nouveau, au moins ce que son Histoire nous raconte d'extraordinaire & de merveilleux. J'ai regardé comme une espece de devoir de faire la vérification de ce qu'il nous apprend dans le Chapitre que je viens de citer, & ç'en étoit réellement un pour moi, puisque cette vérification m'a instruit que je devois une sorte de

réparation à cet illustre Auteur, que je devois confirmer des faits qui, quoique vrais, sont en apparence peu croyables, & que je puis avoir contribué à rendre encore plus douteux par la façon dont j'en ai parlé ailleurs.

J'ai rassemblé dans différens Mémoires les observations que m'ont fournies plusieurs especes d'animaux de mer, & surtout quantité de coquillages. Dans un de ces Mémoires, imprimé parmi ceux de l'Académie en 1713. j'ai fait mention du coquillage qui est appelé *coutelier* sur les côtes de Poitou, & *couteau* sur d'autres côtes du Royaume. Rondelet, Aldrovande, Gesner, Jonston, en un mot tous les Naturalistes modernes l'ont pris sans hésiter pour celui que Pline a désigné par les noms de *solen*, *aulos*, *donax*, *onix*, *daçtylus*; le nom de *daçtylus* est pourtant celui dont il s'est servi ordinairement; c'est à ce *daçtylus* à qui il attribue la propriété de luire, dans des circonstances très-singulieres. J'ai dit que les couteliers des côtes de Poitou n'avoient point cette propriété merveilleuse, qu'ils n'étoient nullement lumineux, & j'ai eu raison de le dire, car ils ne le sont pas. Mais j'ai appris depuis, que nous avons un autre coquillage qui produit tous les phénomènes que Pline nous a racontés du *daçtylus*; par son nom même il ressemble plus au *daçtylus* de Pline, que les couteliers. On l'appelle *dail* sur les côtes de Poitou, je l'ai décrit dans le Mémoire cité ci-dessus, à la fin duquel on trouvera des Planches, où la figure de ce coquillage & celle du coutelier sont représentées. Les Naturalistes modernes se sont-ils trompés, lorsqu'ils ont pris notre coutelier pour le *daçtylus* de Pline? Je ne le pense pas: mais peut-être que Pline a regardé notre dail comme une des especes du genre dont sont les couteliers: peut-être aussi qu'il ne s'étoit pas assuré par lui-même de ce qu'il rapporte sur la lumière que donnent ces coquillages; qu'on lui avoit raconté comme propre à une espece, ce qui l'est à une autre. De quelque part qu'on se tourne, il y a ici de l'embarras; le coutelier ressemble plus par sa coquille au *daçtylus* de Pline que le dail, & le dail a la propriété de luire que Pline a attribuée

au dactylus. Si on vouloit que cette propriété ne fût commune qu'à quelques especes du genre, on auroit peine encore à sauver Pline, qui semble l'accorder à toutes les especes de dactylus, ou qui n'a point averti qu'il y en avoit qui ne donnent pas de lumiere.

De tout cela il suit que je pourrois avec assez de vrai-semblance me disculper du reproche qu'on auroit à me faire de ce que j'ai dit, que nos couteliers ne donnent point de lumiere, puisque réellement ils n'en donnent point : mais il faut avoier de bonne foi, que j'eusse apparemment alors nié cette propriété aux dails, comme je l'ai niée aux couteliers. J'avois observé & les uns & les autres, & je ne l'avois remarquée dans aucun ; il ne paroît pas même que je fusse fort disposé alors à la croire sur le seul témoignage de Pline. J'ai dit que ses paroles, celles qui regardent ce coquillage, valaient bien la peine d'être rapportées, je le dis aujourd'hui, mais dans un sens fort différent. Il est juste d'avoier que j'ai eu tort alors de vouloir plaisanter.

Le Chapitre LXI. du IX^{me} Livre de son Histoire naturelle a pour titre, *De dactylis, eorumque miraculis*. Et voici ce qu'il nous en rapporte : *Concharum è genere dactyli, ab humanorum unguium similitudine appellati. His natura in tenebris remoto lumine, alio fulgore clarere, & quanto magis humorem habeant, lucere in ore mandentium, lucere in manibus, atque etiam in solo, atque veste, decidentibus guttis ; ut procul dubio pateat succi illam naturam esse quam miremur in corpore*. La nature de ces coquillages est de luire dans les ténèbres, & de luire d'autant plus, qu'ils ont plus d'eau. Ils luisent dans la bouche de ceux qui les mangent, les gouttes d'eau qui, de ces coquillages, tombent sur les mains, sur les habits, à terre, luisent ; d'où il est évident que la nature de cette liqueur est semblable à celle que nous admirons dans le corps même.

Ou je n'avois pas lu cet endroit de Pline, ou je ne l'avois pas présent, lorsque j'ai fait des observations sur les coquillages que j'ai données ailleurs, j'eusse certainement cherché à le vérifier. Depuis il m'a rendu attentif à examiner dans l'ob-

scurité

l'obscurité ceux dont je croyois qu'il pouvoit avoir voulu parler. Les couteliers, comme je l'ai dit, n'y font voir aucune lumiere, mais les dails y sont lumineux au point & dans toutes les circonstances que nous venons de rapporter d'après cet Auteur.

Il n'est presque pas nécessaire d'avertir que ce n'est pas la coquille qui est lumineuse, c'est l'animal qu'elle couvre, qui l'est, & qu'il l'est à un degré qui lui est propre. On sçait que divers poissons, que des chairs jettent de la lumiere dans l'obscurité : mais elles ne produisent ce phénomène que quand elles sont pourries, au moins en partie ; au lieu que nos dails répandent d'autant plus de lumiere qu'ils sont plus frais, qu'ils ont été plus récemment pêchés.

Les vers qui doivent leur nom à la lumiere dont ils brillent, les vers luisans, n'ont qu'une partie du dessous de leur corps qui luit, au lieu que la chair de nos dails luit par-tout. Je les ai entierement retirés de leurs coquilles, comme on retire des leurs les moules & les huîtres qu'on veut manger ; après quoi je les ai portés dans l'obscurité ; toute leur surface a été lumineuse, il n'y a point eu d'endroits obscurs, il n'y en a point eu qui n'ait paru luire d'une lumiere qui lui étoit propre.

Ce n'est pas seulement aux peaux extérieures que cette propriété est attachée, elle est commune à toute leur chair, à tout ce qui compose leur corps. Qu'on les déchire, qu'on les découpe, les surfaces qui sont formées par ces divisions sont lumineuses comme les autres l'étoient ; en un mot toute leur substance est lumineuse, comme le sont tous les fragmens d'un charbon bien allumé, ou comme l'est par-tout le phosphore d'urine. Nos dails sont de vrais phosphores naturels, qui, comme ce phosphore artificiel, rend brillans tous les corps contre lesquels il est frotté ; les doigts ne sçauroient presque les toucher sans devenir lumineux ; ainsi, comme l'a dit Pline, ils doivent luire dans la bouche de ceux qui les mangent, & même rendre lumineuses la langue, les dents, & toutes les parties de la bouche contre lesquelles ils ont été appliqués.

Ce coquillage fraîchement pêché , a , comme les huîtres & les moules , beaucoup d'eau , pour peu qu'on le manie , des gouttes s'en détachent, ces gouttes elles-mêmes sont lumineuses , comme Pline l'a très-exactement rapporté. Il n'est pas possible que des particules de l'animal ne soient mêlées avec cette eau , ç'en est assez pour la rendre luisante. Après avoir touché ces poissons , j'ai , d'abord par hasard , & ensuite à dessein , lavé le bout de mes doigts dans un verre d'eau ; de cela seul , cette eau paroïssoit dans l'obscurité , telle que le lait nous paroît en plein jour.

La lumière que ces poissons donnent aux corps , contre lesquels ils ont été frottés , n'est pas de longue durée , elle cesse dès que ce qu'ils ont laissé sur ces corps y est devenu sec. Quand j'ai négligé de laver mes doigts sur le champ , j'ai vu la qualité lumineuse qu'ils avoient acquise , s'affoiblir peu à peu , & enfin disparoître entierement. Mais lorsque j'ai mouillé ensuite mes doigts pour les laver , je les ai aperçus presque aussi lumineux qu'ils l'avoient été d'abord.

Cela m'a donné envie de tenter si on ne pourroit point faire de ce poisson un phosphore durable , un phosphore qu'on conserveroit aussi long-temps qu'on voudroit. J'en ai fait sécher quelques-uns , qui en séchant , ont , comme je m'y attendois , perdu leur propriété de luire. Au bout de quatre à cinq jours , quand ces chairs ont été bien seches , je les ai humectées , soit avec de l'eau ordinaire , soit avec de l'eau dans laquelle du sel marin étoit dissous. Alors elles ont recommencé à luire , comme je l'avois espéré : mais cette lueur ayant été beaucoup plus foible que la première , il m'a paru que ces poissons secs n'étoient pas propres à redeviennr des phosphores bien brillans.

J'ai tenté de les conserver de quelques autres manieres , qui n'ont pas mieux réussi. J'ai mis un de ces poissons dans de l'eau de vie , il a presque perdu sur le champ toute sa propriété de luire. J'en ai mis d'autres dans de l'eau avec du sel marin , ils y sont restés long-temps luisans , mais ils ont répandu une lumière beaucoup plus foible que celle qu'ils

donnoient d'abord. C'est vers la fin de l'automne que j'ai fait ces expériences ; alors & dans tout temps où il ne fera pas fort chaud , on peut conserver ces animaux luisans pendant plusieurs jours : mais à mesure qu'ils vieillissent , ils le deviennent moins ; & corrompus jusqu'à un certain point , ils ne le sont plus du tout ; peut-être même que de ces coquillages bien pourris , suffissent pour empêcher ceux qui sont très-frais , de luire. Une expérience m'a donné lieu de le penser. J'ai fait pêcher devant moi des dails , qui , quand je voulus les examiner dans l'obscurité , ne donnerent aucune lumiere. Si on a lû le Mémoire imprimé en 1712 , où j'ai parlé de ces coquillages , on aura vû qu'ils vivent au milieu d'une pierre tendre , qui les environne de toutes parts ; qu'ils y sont dans une espece de prison , d'où ils ne sortent de leur vie ; pour les avoir , on rompt cette pierre. Parmi les coquillages dont je viens de parler , & qui frais ne donnerent aucune lueur , on y en avoit mis qui étoient morts dans leurs trous , & qui même y étoient devenus excessivement puans. Peut-être que l'impression que ceux-ci firent sur les autres , éteignit , pour ainsi dire , toute leur lumiere. C'est un fait que je n'ai pû vérifier , n'ayant pas pû pour lors r'avoir de ces coquillages. Peut-être aussi y a t-il des temps où ces animaux paroîtront plus lumineux que dans d'autres. La fermentation qui se fait dans les machines animales n'est pas toujours la même , & une sorte de fermentation peut donner à des chairs la disposition nécessaire pour faire paroître la lumiere.

Le temps où les animaux s'accouplent , est un temps où il se fait une espece de fermentation particuliere. Il est probable que la lumiere que répandent les vers luisans , doit une partie de sa vivacité à cette fermentation. Ce n'est guere que dans les temps chauds qu'ils luisent dans ce pays ici , & tous ceux qui luisent dans ce pays sont les femelles. On sçait que ce sont des insectes sans ailes : mais ceux qui ont lû les Auteurs qui traitent des insectes , sçavent de plus que le mâle de cet insecte en a ; il est fort bien représenté dans le théâtre des insectes de Mousset. Il vole la nuit ; la

lueur que jettent les vers femelles, lui apprend de quel côté il doit voler. Je ne connoissois le mâle des vers luisans que par les Livres, il ne m'étoit point encore arrivé d'en trouver, lorsqu'un vers luisant femelle servit à m'en faire voir un mâle, il y a plusieurs années. Je tenois pendant la nuit ce vers luisant dans ma main, j'observois la vivacité de sa lumiere, lorsqu'un autre insecte vint se poser sur ma main. Je le pris d'abord pour une espece de scarabée: mais je ne fus pas longtemps à le méconnoître; il s'accoupla sur le champ, & il resta assez long-temps accouplé. Depuis il m'est arrivé plusieurs fois de prendre d'autres mâles de vers luisans, lorsque j'en tenois de femelles dans ma main. Ils viennent aussi voler autour de la chandelle, & si elle n'attiroit point les papillons, on n'auroit aucun lieu de douter que ces insectes ne soient attirés par la chandelle, comme ils le sont par la lueur de leurs femelles. Au reste il y a des temps où les vers femelles ne luisent point, ou presque point, & peut-être sont-ce ceux où ils n'ont aucune disposition à l'accouplement.

D'autres insectes aussi luisent en des temps particuliers. J'ai rencontré des millepieds très-vivans & d'especes assez communes, qui brilloient au moins autant que les vers luisans; & j'ai souvent rencontré d'autres millepieds qui m'ont paru de la même espece, qui n'étoient nullement lumineux.

Il peut donc y avoir des temps où nos dails ne lueroient pas: mais je ne suis point sûr qu'il y en ait de tels; & si j'en ai trouvé qui n'étoient pas luisans, quoique frais, les dails excessivement corrompus, avec lesquels ils étoient mêlés, peuvent avoir eu part à ce phénomène, leur avoir fait perdre sur le champ la propriété de répandre la lumiere, comme j'ai dit que l'eau de vie l'avoit fait perdre à un autre.

Au reste c'est le seul des coquillages des côtes de Poitou à qui j'ai trouvé la propriété de luire. J'ai éprouvé si les moules, les huîtres, les couteliers, les pectongtes, & les différentes especes de limaçons de mer ne l'auroient pas, & je n'en ai pas trouvé la moindre apparence dans aucun de ces coquillages.

DE L'ORIGINE DES PIERRES
APPELLEES
YEUX DE SERPENTS
ET CRAPAUDINES.

Par M. DE JUSSIEU.

DANS l'obligation d'expliquer la maniere dont s'est pû faire l'impression des figures ou de plantes, ou de coquillages qui se trouvent en divers endroits de la France sur plusieurs sortes de pierres, sans que l'on puisse rencontrer dans le pays ni dans le voisinage des corps qui aient pû servir de types à ces impressions, j'ai supposé quelques révolutions extraordinaires qui nous ont précédés de long-tems, telle que seroit celle de quelque inondation, par le moyen de laquelle les mers ayant changé de lit, auroient en certains tems abandonné notre continent qu'elles couvroient auparavant, & s'en étant retirées fort loin, y auroient laissé des dépouilles de plantes & d'animaux marins, dont la plûpart de nos terres se trouvent remplies, & qui par les découvertes qui s'en feront long-tems après nous, serviront de monumens pour confirmer la probabilité de ces révolutions.

Les exemplaires de plantes des Indes & d'Amerique, & les parties solides de poissons de ces mêmes pays, dont il nous a été permis de faire la vérification avec les impressions que j'ai remarquées qui se trouvent sur différentes pierres, & les petrifications même ressemblant en entier à ces sortes de dépouilles, ne nous laissent aucun lieu de douter que ces mêmes plantes n'aient été transportées dans ce continent, & que ces mêmes poissons n'y aient vécu dans le temps que la mer l'a couvert. Toute autre explication semble peu convenir à ces phénomènes. Et si nous ne trouvons aujourd'hui dans les pays & dans les mers qui nous environnent, ni les mêmes

plantes , ni les mêmes poissons , ne seroit-ce point plutôt à l'ignorance dans laquelle nous serions de la route qu'ont tenue les eaux de ces mers , aujourd'hui si éloignées , pour se transporter dans les Indes & dans l'Amerique, qu'il faudroit nous en prendre , qu'à la vérité d'un fait qui se manifeste à nous de plus en plus chaque jour par les envois qui nous sont faits de ces pays, de ces plantes & de ces parties d'animaux.

Je crois avoir assez fait reconnoître les différentes especes de fougeres d'Amerique , le fruit & la semence de l'arbre triste des Indes, sur les pierres de Saint-Chaumont en Lyonnois , dans les Mémoires que j'ai lûs ici en 1718 & 1721.

Pag. 287.

Pap. 69.

Je me flatte d'avoir démontré , sur-tout dans ce dernier , que certaines dents fossiles que l'on découvre près de Montpellier , sont d'un poisson de la Chine : & la comparaison de celles dont je me suis servi pour preuve de cette observation, est aujourd'hui fortifiée par la figure du poisson du genre des rayes , auquel ces dents appartiennent, que M. Barrere, Medecin Botaniste du Roi à Cayenne, nous en a apportées; l'une & l'autre espece desquelles dents ressemblent à celles qui sont fossiles, & se trouvent aux environs de Montpellier; & à celles que M. Volfart * dit avoir découvertes auprès de Cassel.

* Historia
naturalis
hastie inferioris.
Pars prima.
Infol. Cassel
1716.

Et je ne doute pas que par le troisieme Mémoire, concernant cette matiere , lû en 1722, je n'aye convaincu que les pierres figurées , communément appellées *Cornes d'Ammon*, ne soient des impressions de l'intérieur & quelquefois de l'extérieur d'un genre de coquillage appelé *Nautile* , que nous sommes certains que l'on ne trouve (à l'exception d'une seule de ses especes) que dans ces mers éloignées.

J'avouërai cependant que cette ressemblance d'une des especes de corne d'Ammon , avec la seule espece de nautile qui se trouve dans nos mers , m'a fait naître d'abord quelque scrupule que je n'attribuasse peut-être trop légèrement les rapports des impressions des plantes & des figures de plusieurs petrifications que l'on découvre dans nos terres , aux figures des plantes & des parties osseuses des animaux de ces pays si éloignés de nous. Mais des mâchoires d'un poisson

de la mer du Bresil , bon à manger , que les gens du pays appellent le *Grondeur* , qui en ont été apportées par M. de la Thiolais , Chirurgien de Saint-Malo , qui y a fait plusieurs voyages , me fournissent de nouvelles preuves pour la confirmation de ce système , lorsque je trouve dans les dents qui couvrent la surface de ces mâchoires , l'origine des pierres que l'on appelle *yeux de serpents & crapaudines* , qu'Augustin Scilla , peintre Neapolitain , a attribuées aux dents de la mâchoire de notre dorade , dans sa lettre Italienne , intitulée : *La vana speculazione disingannata dal senso, &c. circa i corpi marini che petrificati si trovano in varii luoghi terrestri* , imprimée à Naples en 1670.

Il est vrai que l'opinion de cet Italien * paroissoit assez vrai-semblable avant cette dernière découverte , puisqu'effectivement les unes & les autres de ces pétrifications avoient assez de rapport aux dents de la dorade : mais la vûe de celles de la mâchoire du grondeur en découvre une ressemblance assez parfaite avec ces sortes de pierres figurées , pour nous donner lieu d'assurer que ces parties osseuses de poisson étranger ont pû également se pétrifier en France comme celles de notre dorade.

Quelque ressemblance qu'il y ait dans la figure & dans la disposition des dents de la mâchoire de notre dorade avec celles de la mâchoire du grondeur , & quelque raison que l'on pût avoir de dire que ce dernier poisson soit du genre de la dorade , néantmoins par la seule inspection des deux parties d'une mâchoire du grondeur , articulées ensemble par symphyse , il faut convenir que la figure de celle-ci est tout-à-fait différente de celle-là , soit par l'espece de triangle qui forme l'union de ces deux parties articulées , soit par les apophyses de chacune de ces parties tout-à-fait différentes de celles de la dorade , enforte que si par la seule disposition & par la configuration des dents de l'une & de l'autre de ces mâchoires , on pouvoit rapporter les poissons auxquels elles appartiennent à un même genre , au moins seroit-il vrai de dire que les especes en seroient très-différentes.

* Tab. 11.
pag. 65.
66. & 64.

L'arrangement de ces dents dans la mâchoire du grand est tel que toute la superficie platte des deux mâchoires forme une maniere de pavé supérieur & inférieur, dont les parties les plus petites, qui sont celles qui par la pétrification sont prises pour yeux de serpens, se trouvent dans les côtés de la mâchoire, & que les parties les plus grandes & les plus larges, dont sont formées les crapaudines, se trouvent arrangées sur deux lignes dans le centre de ces especes de pavé; en sorte que ces parties que l'on a qualifiées d'yeux de serpens, sont celles qui servent à percer les alimens dont se nourrit ce poisson, & que l'usage des larges, qui sont les crapaudines, semble être déterminé à écraser & broyer par leur figure, qui dans les unes est plus platte, & dans les autres plus convexe, soit que la forme en soit presque ronde, ou approchante de l'ovale & du quarré, telle qu'on la voit dans les différentes especes de crapaudines.

Chacune de ces sortes de dents est articulée par gemphose dans la place qu'elle tient dans la mâchoire; & lorsqu'on les en détache, on apperçoit dans leur intérieur le même vuide qui se trouve dans presque toutes les crapaudines & dans la plupart de ces prétendus yeux de serpens, dont la substance n'est que la couronne de l'une & de l'autre de ces dents. La racine qui en reste sur la mâchoire, la fait ressembler, lorsque toutes ces dents en ont été séparées, à une espece de ces pierres étoilées qu'on nomme *astroïtes*; & il y a apparence que cet animal change souvent de dents par la découverte que l'on fait aisément au fonds de chacun de ces alvéoles, & derriere la racine des anciennes dents d'une nouvelle qui pullule pour remplacer celle qui doit tomber.

L'origine de ces prétendus yeux de serpens & de ces crapaudines que l'on a mises dans le nombre des pierres précieuses du second ordre, & auxquelles on a tant attribué de vertus, n'est donc plus incertaine, & nous avons pour le moins autant de raison d'assurer qu'elles ne sont autre chose que les dents de ce poisson étranger pétrifiées, que celles de la dorade qui vient dans nos mers, d'autant plus que ces
fortes

fortes de pierres se trouvent si enfoncées au milieu & dans des carrieres les plus dures , & tellement mêlées avec d'autres pétrifications qui n'ont rapport qu'à des parties d'animaux étrangers , qu'on ne peut soupçonner qu'elles ayent pû y être placées fans supposer quelqu'un de ces événemens extraordinaires dont j'ai parlé.

On pourra , pour détruire ce système , se servir des glossopetres si communes en France, dont l'origine est communément rapportée aux dents de la Lamie , du Marteau & du Carcharias , vulgairement appelé *Requiem* : mais quand je conviendrois que ces glossopetres sont effectivement du genre de ces poissons , ne me resteroit-il pas encore l'incertitude de sçavoir si elles appartiennent effectivement aux especes que nous connoissons actuellement dans nos mers , puisque ces especes sont en très-petit nombre, & que la figure de leurs dents nous est assez connue, au lieu qu'il se trouve des glossopetres d'une infinité de figures tout-à-fait dissemblables de celles de ces especes de poissons , & que nous ne devons pas désespérer de voir un jour venir des Indes & de l'Amérique comme les dépouilles de tant d'autres qu'on trouve ici petrifiées , & qui nous ont été envoyées de ces pays-là.

EXPLICATION DES FIGURES.

FIGURE I. Portion de mâchoire d'un poisson des côtes du Bresil , appelé le *Grondeur* , garnie de ses dents , de grosseurs & de figures différentes.

FIG. II. La même portion de mâchoire renversée.

FIG. III. *a, a, a, a*, Dents du Grondeur, tirées de la mâchoire ci-dessus , & vues à part.

b, b, b, b, Les mêmes dents vues en dessous , du côté qu'elles tiennent à leurs racines.

c, Racine d'une de ces dents, & vue du côté qu'elle y tenoit.

d, la même racine renversée , & vue du côté de sa convexité , qui est comme chagrinée.

e, e, e, Dents nouvelles qui se trouvent sous les racines de quelques anciennes , & les surpoussent.

Mem. 1723.

D d

FIG. IV. Mâchoire du Grondeur , composée de deux pieces jointes ensemble par symphyse , & vûe dépouillée de ses dents , les racines étant toutes restées dans leurs alvéoles , à la réserve de cinq qui en ont été tirées , & dont les alvéoles , par rapport à leurs profondeurs , sont marquées d'une couleur plus noire dans le dessein.

FIG. V. La même mâchoire renversée , & vûe du côté de sa partie extérieure.

S U I T E

D E S O B S E R V A T I O N S

S U R L A F A B R I Q U E

D U

S E L A M M O N I A C ,

Avec sa décomposition pour en tirer le sel volatil , que l'on nomme vulgairement SEL d'ANGLETERRE.

Par M. GEOFFROY le Cadet.

LORSQUE je donnai en 1716 mes conjectures sur la composition du sel Ammoniac , dans la description que je fis de ce sel , je ne parlai que de celui qui nous vient d'Égypte par le commerce du Levant , parce qu'en effet c'est le seul qui soit connu parmi les Chymistes , & décrit par les Auteurs.

Il est vrai que Pomet , dans son Histoire générale des drogues , traitant du sel Ammoniac , en a indiqué une autre sorte , mais par apostille seulement : *On nous apportoit autrefois de Venise & d'Hollande du sel Ammoniac fait en pain de sucre , qui étoit beaucoup plus beau que celui que nous voyons présentement.*

Il y a trente ans que Pomet écrivoit , & par le terme

fig. 4.

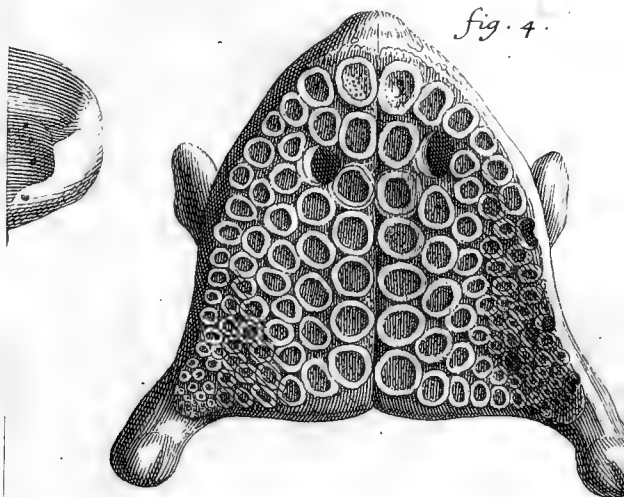
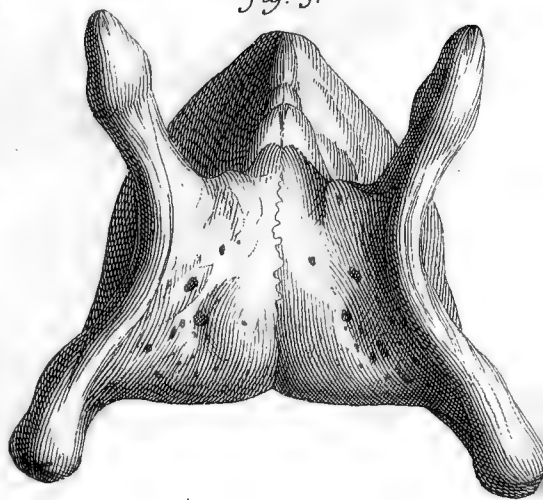


fig. 5.

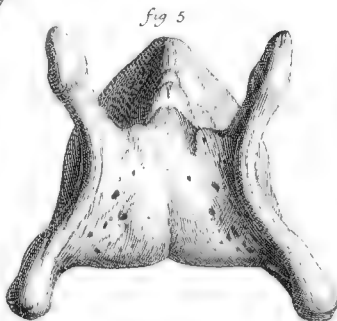
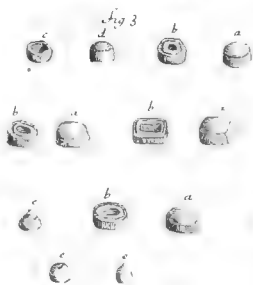
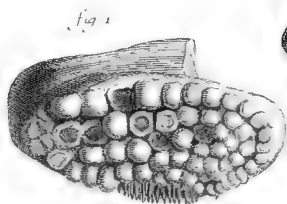
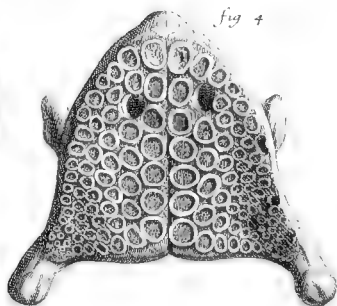
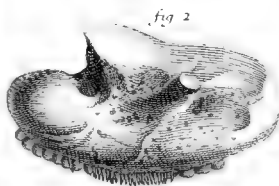


a



a





d'autrefois, on doit entendre plusieurs années au-delà. Il n'est donc pas surprenant que cette sorte de sel ne se fût point encore présentée à moi, & l'apostille de Pomet ne me paroîssoit pas un garant assez sûr pour l'en croire sur sa parole.

Ma curiosité ne fut pas plus satisfaite par les Marchands de qui je m'en informai.

Je n'en trouvai qu'un qui m'assûra qu'il en avoit vû de cette forme, qui étoit apporté des Indes Orientales : mais j'en voulois voir de mes yeux avant que d'en parler, & avoir pieces en main pour les produire, parce qu'en fait de drogues étrangères, il est très-facile d'en imposer.

Je n'ai pû parvenir à trouver de cette espece de sel Ammoniac que dans ces derniers temps. L'interruption du commerce du Levant arrivée par la dernière contagion, dont Marseille a été affligée, a donné occasion à cette dernière découverte ; car alors on a été obligé de tirer d'Hollande les drogues qui nous manquoient. Il nous est donc venu de ce sel, qui jusques-là ne nous étoit connu que par *ouï-dire*. Les factures font foi qu'il vient des Indes, d'où il est apporté par les Vaisseaux de la Compagnie-Hollandoise. Il a véritablement la figure d'un pain de sucre dont la pointe seroit tronquée. Les plus grands de ces pains de sel Ammoniac, ont de diametre neuf-pouces à la base, & trois pouces & un quart au sommet, sur onze pouces & demi de hauteur.

Ils ne sont pas solides dans toute leur masse, l'intérieur en est creux du côté de la base, & forme un cone de sept pouces & demi de diametre, & d'environ cinq pouces & demi de haut.

Il paroît par la grosseur de ces pains de sel Ammoniac, comparés avec ceux qui nous viennent d'Egypte, qu'on travaille ce sel aux Indes en bien plus grand volume. En effet ceux-ci pesent quatorze à quinze livres, pendant que les autres n'en pesent que quatre à cinq.

La consistance est à peu-près la même, ce qui montre qu'ils sont produits par une sublimation presque égale. Il n'y a de différence que la forme qu'ils ont prise du vaisseau subli-

matoire. Celui dont on se sert aux Indes est fait en cone, & il paroît qu'il est adapté au vaisseau qui contient la matiere, soit au-dessus, soit à côté. Il y a plus d'apparence que ce sel est sublimé de cette dernière façon, comme la plus commode pour une masse aussi pesante.

Nous éprouvons qu'en sublimant le sel Ammoniac dans nos cornues, il se moule de même le long du col; & qu'il s'y dispose en forme de cone.

De la maniere dont je conçois que ces vaisseaux sont ajustés, il est aisé de s'imaginer comment on peut employer une quantité suffisante de matiere pour retirer un poids de quatorze à quinze livres de sel sublimé, parce qu'on peut charger à plusieurs fois la cornue pendant la sublimation, par une ouverture faite en haut tout exprès, comme en ont nos cornues tubulées.

Les pains de sel Ammoniac qui se fabriquent en Egypte ne sont si petits que parce qu'ils se subliment au haut du vaisseau même qui contient la matiere, & ce vaisseau ne peut avoir qu'une certaine capacité assez limitée. C'est aussi ce qui leur donne la forme de coupe renversée qu'ils ont prises au haut du balon ou bombe de verre où ils sont sublimés.

Un avantage que l'on retire encore de la maniere dont le sel Ammoniac se fabrique aux Indes, c'est que sa superficie est moins chargée d'impuretés, parce que toutes les fuliginosités qui s'élèvent pendant l'opération, ont plus de facilité à s'échapper vers la pointe du cone, & qu'on les en sépare aisément en tronquant cette pointe, lorsqu'on forme les pains.

On remarque sur le tour du cercle qui termine ces pains, les vestiges de cinq ou six trous, qu'on a eus la précaution de faire pendant l'opération, pour donner au sel, qui se sublime, le moyen de parvenir jusqu'au haut, & de s'y condenser solidement, en laissant échapper l'air raréfié & les fuliginosités qui pourroient arrêter la sublimation.

Les formes où ce sel se sublime sont de verre; car j'en ai trouvé des morceaux qui sont demeurés attachés à la surface des pains, comme j'en avois observé à celle des pains de sel Ammoniac ordinaire.

La surface extérieure de ce sel Ammoniac des Indes, est formée par une croûte solide de cinq à six lignes d'épaisseur dans la partie la plus forte, & qui diminue insensiblement jusqu'à un pouce & demi de la base, où elle se réunit à celle qui enduit intérieurement le creux du pain. Cette croûte, tant interne qu'externe, est composée de lames transparentes, horizontales & très-serrées. L'intérieure est plus transparente, comme la plus exposée à l'action du feu qui confond deux ou trois lames ensemble: mais à mesure que ces lames s'éloignent de la croûte, elles perdent de leur transparence, & on observe facilement le nombre des couches qui composent le corps du pain.

Il est aisé de connoître, par la gradation de ces couches, de quelle maniere elles se forment & s'unissent ensemble par la sublimation. Les premières qui s'élèvent s'attachent aux parois du vaisseau, où elles se durcissent par la chaleur du reverbere, dont le vaisseau sublimatoire est recouvert; elles se serrent ensuite & s'épaississent par l'union des lames salines qui leur succèdent. Voilà comme se forme cette croûte cristalline dont tout le pain est revêtu extérieurement.

La masse saline qui s'élève en grande quantité par la violence du feu, se dispose en aiguilles tout autour de cette croûte: mais ces aiguilles se serrent & se condensent beaucoup moins, parceque l'épaisseur de la masse, venant à augmenter considérablement, met les lames intermédiaires à couvert de l'action du feu. Enfin la pointe du cone se bouche par la quantité de la matiere qui se sublime assez brusquement; de sorte que le feu agit alors avec force sur les dernières couches qui se sont élevées, les presse & les durcit extrêmement: c'est ce qui forme la croûte intérieure & le vuide qui reste au centre de ce cone sublimé. Ce vuide prend aussi la figure de cone, parce que le feu chasse en haut la matiere tant qu'il peut, & l'écarte de tous côtés vers les parois du vaisseau. Comme elle est moins épaisse & plus serrée vers la base, il se forme un creux qui va toujours en diminuant vers le haut où il se termine en pointe, parceque les parties n'ont pu s'écarter davantage.

En coupant un quartier de ces pains de sel Ammoniac, on peut compter entre les deux croûtes, intérieure & extérieure, jusqu'à sept à huit couches de différens degrés de densité.

Comme la plus grande épaisseur est vers la cime du pain, ce n'est pas sans raison qu'on y fait les trous que j'ai remarqués d'abord, afin de débarrasser cette partie qui se boucherait trop promptement.

Pour établir maintenant quelque comparaison entre ces deux sortes de sels Ammoniacs, celui des Indes, & celui d'Egypte, il paroît que c'est la même composition, & que pour la qualité & l'usage qu'on en fait ordinairement, la différence ne doit pas être fort grande.

Celui des Indes a cela d'avantageux, qu'il n'est presque point chargé d'impuretés à sa surface, & qu'il n'y a que sa cime qui soit de moins bon alloi que le reste; ce qui fait que sur la totalité de la masse, il doit y avoir moins de déchet qu'il ne s'en trouve sur les pains de sel Ammoniac d'Egypte qui sont plus chargés d'impuretés, à proportion de leur grosseur.

C'est apparemment ce qui a fait dire à Pomet, que celui qui étoit formé en pain de sucre étoit beaucoup plus estimé: peut-être étoit-il plus recherché des Teinturiers qui en employent une grosse quantité.

Au reste, il faut que ces sortes de pains aient toujours été assez rares, puisqu'ils sont si peu connus, & qu'on n'en trouve point de descriptions dans les Auteurs qui ont eu à traiter du sel Ammoniac.

Par sa décomposition il fournit les mêmes principes qu'on a coutume de tirer de celui qui nous est familier, & à peu-près dans la même proportion.

Quoiqu'on trouve cette sorte de sel dans quelques listes de drogues qui se tirent des Indes, comme le marque Tavernier, il y a apparence qu'il ne vient gueres en Europe, & que les Hollandois, de qui l'on a tiré celui que j'expose aujourd'hui, n'en chargent pas beaucoup leurs Vaisseaux, & n'en font que très-peu de commerce. On sçait même qu'ils

tirent aussi-bien que nous le sel Ammoniac d'Egypte , par le commerce qu'ils font au Levant , & qu'il s'emploie aussi communément chez eux pour les différens usages à quoi il est propre.

Les éclaircissemens que j'ai donnés dans mon Memoire du sel Ammoniac, tel qu'il nous vient d'Egypte , sur sa fabrique & sa composition , dont on n'avoit auparavant aucune connoissance certaine , sembloient exiger de moi une description exacte & circonstanciée de ce nouveau sel , qui confirmât ce que j'ai avancé , que de quelque maniere que l'Ammoniac se fabrique , ce doit toujours être par la sublimation.

Après avoir détaillé dans ce Memoire la composition de ce sel , je vais dans celui-ci parler de sa décomposition , & donner d'abord mes observations sur la maniere d'en tirer le sel volatil urineux , si connu sous le nom de *sel d'Angleterre*.

C'est le même sel qui fait la base du sel volatil huileux de Silvius. Ainsi il a toujours été connu des Chymistes. M. Lemery ne l'a pas omis dans sa Chymie , même dès les premières éditions. Ce nom de *sel d'Angleterre* ne vient donc point de ce que les Anglois en font les inventeurs, mais seulement de ce qu'ils en ont rendu l'usage plus fréquent , & qu'ils l'ont , pour ainsi dire , mis à la mode. En effet , son odeur pénétrante , sans être desagréable , & corrigée outre cela par les différens parfums tirés des plantes odorantes dont il prenoit le nom , comme s'il en venoit effectivement ; sa forme seche , qui le rend plus propre à être porté à la poche dans de petits flacons ; son usage pour les vapeurs & les défaillances , le mirent bien-tôt en vogue parmi les François qui aiment la nouveauté , & sur-tout celle qui vient des Pays étrangers.

Dès l'année 1700 M. Tournefort publia dans les Memoires de l'Académie , que de quinze onces de sel Ammoniac , on pouvoit tirer dix onces de sel volatil , outre trois onces d'esprit.

Mais ce n'est pas encore là tout le sel volatil que l'Ammoniac peut donner , & j'ai trouvé , en travaillant sur ce sel ,

*V. Chym.
de Lemery,
édit. 1713.
pag. 478
& 481.*

qu'il en contenoit une bien plus grande quantité, que je suis venu à bout de développer, & de sublimer en forme saline, dure, épaisse & transparente.

En effet je tire par ma méthode d'une livre de sel Ammoniac plus de treize onces de sel volatil en forme sèche, c'est-à-dire, plus des trois quarts, au lieu que M. Tournefort n'en tiroit sur quinze onces que les deux tiers, qui est cependant un point où il semble que nos Chymistes ne fussent point parvenus avant lui.

C'est un fait qui passe pour constant, que le sel de tartre & le sel Ammoniac étant mêlés ensemble, rendent une odeur urineuse : cependant en prenant la précaution de les bien sécher avant que d'en faire le mélange, il n'en resultera aucune vapeur urineuse ni volatile. L'humidité de l'air suffit pour humecter le sel de tartre, & le mettre en état d'agir sur le sel Ammoniac qui se fait alors sentir par son odeur. Si l'on a donc soin de mettre ce mélange à couvert de l'humidité de l'air, on le gardera quinze jours dans un vaisseau bien fermé, sans qu'il en échappe aucun esprit urineux.

Or pour tirer du sel Ammoniac un sel volatil bien sec, il faut tant qu'on peut éviter la trop grande humidité.

Laisant donc à part les méthodes ordinaires, qui sont assez connues, je remarquerai seulement que M. Lemery avoit eu raison de dire que l'esprit de vin, bien loin de résoudre le sel volatil, contribuoit beaucoup à le conserver, au lieu que l'eau ne fait que le résoudre en esprit.

Ce n'est pas que pour tirer du sel volatil bien sec, il faille rejeter absolument toute sorte d'humidité; car alors on ne retireroit que de simples fleurs qui ne seroient point une masse solide.

Voici donc la méthode qui m'a le mieux réussi. Je prends une partie de sel Ammoniac du plus purifié, pulvérisé très-fin; d'une autre part je prends du sel alkali, comme sel de tartre, sel de cendres gravelées, ou autre pareil, que l'on a purifié par calcination, lessive & évaporation; après quoi je le calcine de nouveau pour le priver d'humidité autant qu'il
est

est possible. On le pulvérise ensuite, & on le passe chaud par le tamis. Je fais pareillement bien sécher le sel ammoniac, jusqu'à le faire fumer. J'en pese alors une partie, & trois fois autant de sel alkali encore chaud. En cet état, ces deux sels se peuvent mélanger exactement, sans rien développer de volatil. On les met dans une cornue, que l'on bouche très-soigneusement, & on les y laisse vingt-quatre heures sans qu'il en émane rien qui approche de ce qui sort ordinairement du mélange du sel ammoniac avec le sel de tartre. Je verse dans la cornue deux onces & demie d'esprit-de-vin bien rectifié pour chaque livre de sel ammoniac, avec la précaution de tenir aussi-tôt la cornue exactement bouchée, pour arrêter les sels volatils, qui ne manquent pas de s'échapper, dès que l'humidité qu'apporte l'esprit-de-vin se répand dans les sels.

Il est à propos de laisser le tout digérer en quelque sorte, quoiqu'à froid, & de remuer les sels dans la cornue pour donner lieu à l'esprit-de-vin de s'étendre, de pénétrer autant qu'il est possible les parties salines, & d'exciter une sorte de fermentation. Après douze heures de digestion, on peut déboucher la cornue, & y adapter deux balons, dont le premier a deux ouvertures pour communiquer de la cornue au second balon. On en lute bien les jointures, & le temps de sécher les luts est un surcroît de digestion. Alors on mène le feu par degrés, pour opérer la sublimation à feu de reverbere très-doux. Il sort premièrement un peu d'esprit en vapeur, mais qui se condense presque aussi-tôt aux parois du premier balon. Ce qu'il en passe dans le second demeure liquide, & enfin tout le premier balon se garnit de sel volatil qui s'attache fermement aux parois en une croûte plus ou moins épaisse, selon la quantité de sel qu'on sublime.

Lorsqu'il ne sort plus rien, on délute les vaisseaux, on sépare la liqueur qui est contenue dans le dernier balon, & celle qui peut être restée dans le premier. Le tout ensemble rend à-peu-près la quantité d'esprit-de-vin qu'on a employé. Tout le sel volatil a pris une forme sèche très-solide, à la

218 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
réserve d'une petite portion qui paroît comme de la neige ,
parce qu'elle s'est trouvée dans le balon mêlée avec l'esprit-
de-vin. Il reste encore du sel volatil dans cet esprit ; car au
bout de quelques jours il en dépose en forme d'aiguilles ,
comme il arrive aux crySTALLISATIONS de sels dans les opéra-
tions ordinaires. Et si l'on survuide cette liqueur dans une
autre bouteille , il s'en déposera encore à la longue en crys-
taux solides de différentes figures , au lieu que les premiers
sont très-fins.

Ce sel, ainsi que les autres sels volatils , peut souffrir une
rectification. La façon la plus commode pour toutes sortes
de sels volatils, c'est de les rectifier dans les mêmes vaisseaux
de verre au bain-marie , dont la chaleur est très-douce & très-
égale , & en cela préférable à celle du bain de sable.

En faisant cette rectification , il est bon de joindre à ce sel
les huiles essentielles dont on veut le parfumer, parce que de
cette manière il n'en prend que les parties les plus subtiles &
les plus agréables à l'odorat.

La méthode que je viens de décrire , pour tirer le sel vola-
til en forme sèche dans la plus grande quantité possible , est
aussi la plus propre pour déterminer au plus près, combien
le sel ammoniac contient de volatil , & la portion de sel aci-
de avec laquelle ce volatil étoit embarrassé.

C'est ce que je vais faire voir, en comparant ce que j'ai em-
ployé de matière avec le produit de mon opération.

J'ai pris trois livres de sel alkali, une livre de sel ammo-
niac , & deux onces & demie d'esprit-de-vin. Le tout ense-
mble fait une masse de quatre livres deux onces & demie.

J'ai retiré en forme sèche treize onces trois gros de sel vo-
latil , & de plus une once cinq gros & demi d'esprit , outre
une once demi-gros qui s'est imbibé dans les papiers dont
j'ai garni les jointures des vaisseaux. Cela fait en tout seize
onces un gros de sel volatil , dont il faut déduire les deux
onces & demie d'esprit-de-vin que j'ai employées. Reste
pour treize onces cinq gros de volatil qu'a fourni une livre
de sel ammoniac par mon opération.

D'autre part le *caput mortuum* resté dans la cornue, a pésé trois livres une once, quoique je n'eusse employé que trois livres de sel alkali pour intermede, d'où j'ai droit de conclurre que cette once de surplus est le poids du sel acide contenu dans la livre de sel ammoniac, & qui s'en est séparé en s'unissant au sel alkali fixe.

Or les seize onces un gros de volatil qui se sont trouvées dans les balons avec les trois livres une once qui sont restées dans la cornue, ne sont que quatre livres une once un gros; & tout ce que j'avois employé pésoit quatre livres deux onces & demie.

Il s'en faut donc une once trois gros que je ne retrouve mon poids. Déchet qui ne peut venir que du volatil qui m'est échapé, & dont je n'ai pû éviter la perte malgré toutes mes précautions.

Joignant ce poids d'une once trois gros avec treize onces cinq gros de sel volatil, qui se sont trouvées tant en forme sèche qu'autrement, cela fait en tout quinze onces de sel volatil qui s'est élevé par mon opération. Je puis donc en conclurre que dans une livre de sel ammoniac il y a quinze onces de sel volatil uni & incorporé par la sublimation, avec une once seulement de sel acide marin. Cette grande quantité de volatil que je trouve contenue dans le sel ammoniac, paroîtra peut-être un paradoxe en Chimie.

M. Tournefort, qui a été plus loin que les autres, n'a tiré, comme je l'ai remarqué, de quinze onces d'ammoniac, que dix onces de sel & trois onces d'esprit, qui ne peuvent guere contenir que six gros de sel volatil. Mais outre que par sa méthode il n'a pas tiré autant de sel volatil qu'il le pouvoit, pour n'avoir pas mis assez d'intermede, il a manqué à tenir compte de ce qu'il a dû perdre de volatil en opérant.

On peut m'opposer que cette quantité extraordinaire de sel volatil que je tire de l'ammoniac n'y étoit pas absolument contenue, & que peut-être vient-elle du sel alkali qui a servi d'intermede, & dont une partie s'est volatilisée pendant l'opération.

Mais puisqu'il est impossible de retirer du sel volatil ammoniac sans un intermede alkali, celui qu'on retire par les autres méthodes, quoiqu'en moindre quantité, a-t-il plus droit de passer pour le sel volatil de l'ammoniac seul ?

De plus, par la vérification de mes pesées, que j'ai faites avec la dernière exactitude, je trouve dans ma cornue le poids de l'alkali que j'ai employé pour intermede, & une once en sus pour le sel acide qui pouvoit être contenu dans l'ammoniac. Il n'y a donc pas d'apparence que l'intermede alkali se soit volatilisé, puisqu'en ce cas j'en trouverois le poids diminué dans le résidu. Je ne crois pas non plus qu'on puisse dire que cette diminution ait été suppléée par le sel acide de l'ammoniac qui devoit être de plus d'une once sur une livre, puisque M. Fournefort, qui avoit retiré par son opération beaucoup moins de volatil, n'a trouvé qu'une demi-once pour le poids du sel acide, ce qui certainement n'est point assez pour quinze onces de sel ammoniac, comme il s'en est bien apperçû. Aussi en trouvai-je le double presque sur la même quantité. C'est un demi-gros de sel acide par once, & par les observations que j'ai faites, il ne paroît pas qu'il s'en puisse séparer davantage.

En voici la preuve : c'est que la calcination de mon mélange de sel de tartre avec l'ammoniac m'a donné précisément la même proportion de ce même sel acide que j'avois trouvé, après la sublimation, comme je vais le faire voir.

J'ai pris, pour plus grande précaution, deux creusets pareils, dans chacun desquels j'ai mis trois gros de sel de tartre avec un gros de sel ammoniac, tels que je les avois employés dans ma sublimation, & la quantité d'esprit-de-vin proportionnée. Je les ai poussés à feu ouvert, pour en chasser tout ce qu'il pouvoit y avoir de sel volatil. En pesant le résidu, je l'ai trouvé, tant dans l'un que dans l'autre creuset, augmenté précisément de trois grains.

D'autre part j'avois mis dans un troisième creuset six gros du même sel de tartre tout seul, & après une calcination pareille aux autres, puisqu'elle a été faite en même-temps &

au même feu, j'ai trouvé le résidu diminué de trois grains juste, c'est un grain & demi de diminution que la calcination a opéré sur trois grès.

Mais dans la calcination, dont je viens de parler, du mélange du sel de tartre avec l'ammoniac, bien-loin d'avoir un grain & demi de diminution, j'ai trouvé une augmentation de trois grains. Donc le résidu de cette calcination est augmenté du poids de quatre grains & demi. Or ces quatre grains & demi ne peuvent être que le poids du sel acide contenu dans le grès de sel ammoniac que j'ai employé, & dont il fait précisément la seizième partie. Je puis donc assurer que la composition du sel ammoniac est telle, que de seize parties il n'y en a qu'une qui reste embarrassée dans l'intermede, & qu'il y en a quinze de volatils, comme je l'avois déjà éprouvé par ma sublimation.

Je n'ai pris pour la calcination qu'une petite quantité de matieres, afin d'en avoir le poids plus juste, & le résidu de cette opération se rapporte, comme on voit, avec la dernière précision au poids que le résidu de la sublimation m'avoit fourni sur une masse considérable.

Cette augmentation de poids dans l'intermede, provient d'une portion de l'acide du sel marin qui étoit contenu dans l'ammoniac, puisque par les lotions on tire du résidu de cette calcination un sel crySTALLISÉ en forme cubique, qui est la forme particuliere aux crySTaux de sel marin.

Que si l'on vient présentement à m'opposer que cet acide marin, qui étoit mêlé dans l'ammoniac, a pû se volatiliser lui-même en partie, je m'en tiendrai à mes observations, qui m'assurent qu'en décomposant le sel ammoniac, tout devient volatil, à la réserve d'une seizième partie qui est retenue par l'intermede dont on s'est servi.

EXPLICATION DES FIGURES.

La FIGURE I. représente un pain de sel ammoniac des Indes, formé en maniere de cone, dont le sommet seroit tronqué.

La FIG. II. représente le même pain coupé verticalement, pour montrer le creux intérieur qui est au bas du pain.

La FIG. III. représente le même pain coupé horizontalement, où l'on fait voir l'épaisseur de la croûte qui enveloppe tout le pain & l'arrangement des couches qui en forment la masse intérieure.

La FIG. IV. représente un quartier de l'intérieur de ce pain, détaché d'en haut, qui fait voir que les couches sont moins serrées vers le haut du pain que vers le bas.

Les FIG. V. & VI. représentent un pain de sel ammoniac ordinaire, tel qu'il nous vient d'Egypte, vû par dessus & par dessous.

*DERNIERES REMARQUES
SUR UN CAS SINGULIER
DU*

PROBLEME DES TANGENTES.

Par M. SAURIN.

28 Juin
1724.

EN commençant mes remarques sur le Problème général des tangentes, je les réduisis à quatre articles. J'ai traité les trois premiers dans deux Mémoires précédens, imprimés parmi ceux de 1716. Voici le quatrième & dernier.

Suivant mon engagement, je dois donner pour la résolution du cas singulier dont il s'agit, une méthode nouvelle qui s'étende à tous les exemples qui peuvent être proposés, & qui s'y applique immédiatement, sans exiger ni transformation d'axe, ni aucune autre préparation. J'ai quelque grace à demander là-dessus. Il s'étoit présenté à mon esprit une idée légère de la règle en question; & sur cette première vûe, je me hâtai de la promettre comme nouvelle: mais en l'examinant, j'ai d'abord reconnu qu'elle n'est pas différente de celle

fig. 2.

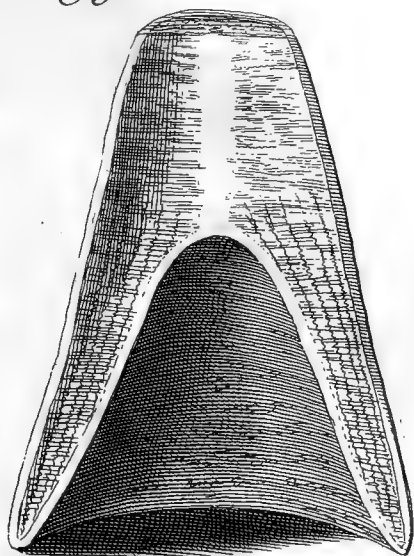


fig. 5.

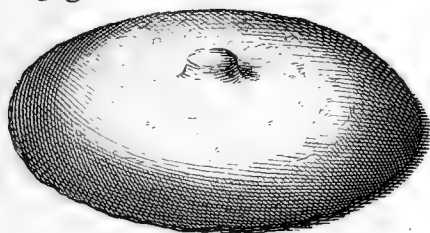


fig. 6.



fig. 1



fig. 2

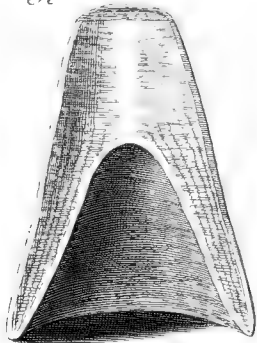


fig. 4



fig. 3

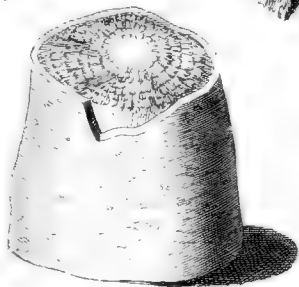


fig. 5

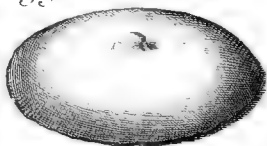


fig. 6



qui a fait le sujet des deux Mémoires précédens , & qu'elle n'en est proprement qu'un abrégé : elle ne l'abrege même que très-peu , lorsque les valeurs données de l'appliquée & de l'abscisse sont réelles ; mais elle la rend considérablement plus courte & plus aisée , quand au point donné les valeurs des co-ordonnées sont l'une & l'autre égales à zéro. La voici appliquée aux exemples mêmes proposés dans les premiers Mémoires.

Soit donc $y^4 - 8aayy + aaxx = 0$, l'équation de la

$$- 6axy$$

courbe à quatre rameaux, rapportée à deux axes qui se coupent perpendiculairement au point d'intersection de deux de ces rameaux : on demande les tangentes à ce point-là , point d'origine des co-ordonnées , & où par conséquent elles sont l'une & l'autre égales à zéro.

Il ne s'agit que de trouver en ce point le rapport du dy au dx , ou la valeur de $\frac{dy}{dx}$. La regle générale ordonne de différencier l'équation , & de répéter les différentiations , en ne prenant que les premières différences , jusqu'à ce que les x & les y disparaissent. Les termes venus de ces différentiations , étant rangés en différentes colonnes , suivant le degré des dimensions des différences dy , dx ; on substitue dans chaque colonne les valeurs données de x & de y , en commençant par celles où les différences ne sont qu'au premier degré , & passant ainsi de l'une à l'autre , jusqu'à ce qu'on en ait trouvé une dont les termes ne soient pas détruits par la substitution. C'est des termes non détruits de cette colonne que l'on tire la valeur cherchée de $\frac{dy}{dx}$.

Au lieu de tout cela , qui seroit long à faire dans l'exemple proposé , & incomparablement plus dans d'autres ; je dis , les co-ordonnées x & y passent par le dx & le dy avant que de venir à leur valeur donnée ; c'est-à-dire , dans notre exemple , qu'elles deviennent dx & dy avant que de devenir égales à zéro. Sur ce principe je substitue partout dans l'équation proposée dx & ses puissances , au lieu de x & de ses puissances.

224 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cès, & de même dy & ses puissances, au lieu de y & de ses puissances.

Ainsi au lieu de $y^4 - 8aayy - 6axy + aax = 0$; j'ai tout d'un coup $dy^4 - 8aad y^2 - 6adxdy^2 + aad x^2 = 0$; ce qui me donne, en négligeant dy^4 & $6adxdy^2$, $8aad y^2 = aad x^2$; & $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{8}$, ou $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Soit encore $x^4 - ayx + by^3 = 0$, une courbe dont il faille trouver les tangentes au point qui donne $x = 0$ & $y = 0$; suivant mon principe, cette équation devient au point proposé $dx^4 - adydx^2 + bdx^3 = 0$; & négligeant dx^4 , on a $bdy^3 = adydx^2$. D'où l'on tire $dy = 0$; & $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{b}{a}$, ou $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$.

L'équation du *folium* de M. Descartes, les deux axes étant les deux tangentes au point d'intersection, est celle-ci, $x^3 - 3pyx + y^3 = 0$; on demande la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en ce point-là, où les co-ordonnées sont l'une & l'autre $= 0$. Ma méthode me donne $dx^3 - 3pdydx + dy^3 = 0$; d'où il vient $dydx = 0$; & en effet dans le point d'intersection des tangentes, qui sont les deux axes, le dy est nul par rapport au dx , à l'égard de l'une des branches ; & le dx est nul par rapport au dy , à l'égard de l'autre branche ; & c'est ici une remarque que nous aurons occasion de rappeler plus bas.

Si l'on prend pour les deux axes de la même courbe une parallèle à son asymptote, passant par le point d'intersection, & la perpendiculaire à cette parallèle au même point ; l'équation, en se servant des mêmes lettres, sera $\sqrt{2}x^3 - 3pxx + 3\sqrt{2}xyx + 3pyy = 0$, qui devient au point donné $\sqrt{2}dx^3 - 3pdx^2 + 3\sqrt{2}dxdy^2 + 3pdy^2 = 0$; & l'on a $3pdy^2 = 3pdx^2$, & $dy^2 = dx^2$; ce qui est évident par soi-même, les tangentes faisant entr'elles un angle droit, & faisant avec les deux axes des angles de 45 degrés.

Si, au lieu de la parallèle à l'asymptote, on prend l'asymptote même, on aura pour l'équation $x^3 - 3\sqrt{2}pxx + \frac{3}{2}ppx + 3yyx - \sqrt{2}xp^3 = 0$; qui, en prenant $\frac{1}{2}a$ pour $\frac{p}{\sqrt{2}}$ se

se changera en celle-ci, $4x^3 - 12axx + 9aax + 12yyx - 2a^3 = 0$; & si le point d'interfection est encore le point donné, où y étant toujours $= 0$, x devient $= \frac{1}{2}a$, selon mon principe il faudra toujours substituer dans l'équation, au lieu de y & ses puissances, dy & ses puissances: mais selon le même principe, x devenant ici $= \frac{1}{2}a - dx$ avant que de devenir $= \frac{1}{2}a$, il faut substituer, au lieu de x & ses puissances, $\frac{1}{2}a - dx$ & ses puissances. En faisant cette substitution, on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, $4dx^3 - 12dy^2dx - 6addx^2 + 6addx^2 = 0$; & négligeant $4dx^3 - 12dy^2dx$, il reste $6addx^2 = 6addx^2$, & $dy^2 = dx^2$; ce qui fait voir, comme auparavant, que les tangentes sont avec les axes des angles de 45 degrés.

Soit encore ici $y^4 - 4ay^3 + 4aayy + 12aaxy + aaxx - 6axy^2 - 8a^3x = 0$, la courbe de notre premier exemple, mais rapportée à d'autres axes qui donnent au même point déjà proposé, $x = y = a$. Suivant le principe établi, y devient $= a - dy$ avant que de devenir $= a$; & de même on a $x = a - dx$ avant que de l'avoir $= a$; je substitue donc d'abord dans l'équation $a - dy$ & ses puissances, au lieu de y & ses puissances; $a - dx$ & ses puissances, au lieu de x & ses puissances, & par cette substitution l'équation se trouve réduite à celle-ci, $dy^4 - 6addx dy^2 - 8aaddx^2 + aaddx^2 = 0$; d'où l'on tire, en négligeant $dy^4 - 6addx dy^2$, $8aaddx^2 = aaddx^2$, $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{8}$, & $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, comme on l'a déjà trouvé.

La regle générale, expliquée dans mes autres Mémoires, se forme, en substituant dans l'équation $y - dy$, ou $y + dy$, & $x - dx$, ou $x + dx$ & leurs puissances, à la place de y & de x & de leurs puissances. Après cette substitution il en faut faire une autre des valeurs de x & de y dans les termes venus de la première, & rangés en différentes colonnes, selon les différentes dimensions de dy & dx . Il est évident que la substitution que je fais d'abord, renfermant celle des

226 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
valeurs données, fait évanouir dans le résultat tous les termes qui se détruisent par la seconde substitution de la regle générale; & c'est par-là qu'elle se trouve abrégée: mais, ainsi que je l'ai dit dès le commencement, beaucoup moins que lorsque les valeurs données sont l'une & l'autre égales à zéro.

Au reste cette regle que nous avons tant examinée, & que nous venons d'abrégée, n'est point absolument nécessaire, & l'on peut résoudre le cas proposé des points à plusieurs tangentes par la seconde section de l'analyse des infiniment petits, sans recourir à l'article 163. de la 9^{me}. Il n'y a qu'à faire évanouir dans la fraction donnée par la premiere différenciation une des inconnues, & diviser ensuite le nouveau numérateur, & le nouveau dénominateur par le plus grand commun diviseur. C'est ce que je vais faire voir dans le dernier exemple même auquel je viens d'appliquer mon abrégé; & comme, en le proposant à nos méthodes, on n'y a pas gardé la loi des homogenes, je le mettrai ici tel qu'il nous a été proposé.

$$\text{Soit donc l'équation } A \dots y^4 - 8y^3 - 12xyy + 48xy + 16yy + 4xx = 0, \text{ l'équation proposée d'une courbe dont il faut trouver les tangentes au point qui donne } y = x = 2.$$

On a par la section 2. de l'analyse des infiniment petits, $\frac{dy}{dx} = \frac{3yy - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x}$; je vais faire évanouir l'inconnue y , en substituant partout dans cette fraction sa valeur en x .

Comme l'équation a quatre racines, & que y , par conséquent y a quatre valeurs; sçavoir,

$$\begin{aligned} \{y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}\} & y = 2 + \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x}; \\ \{y = 2 - \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x}\} & y = 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}; \end{aligned}$$

il faut prendre pour la substitution une de celles où $y = 2$ donne aussi $x = 2$; je prends donc celle-ci $y = 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$, & j'ai $3yy = 24 + 18x - 12\sqrt{4x} + 12$

$\sqrt{4+2x} - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}; -12y = -24 + 12\sqrt{4x} - 12\sqrt{4+2x}$; donc $3yy - 12y = 18x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; & $3yy - 12y - 2x + 16 = 16x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} + 16$; cette dernière quantité est le nouveau numérateur de la fraction.

$y^3 = 32 + 36x - 16\sqrt{4x} + 16\sqrt{4+2x} - 12\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} - 6x\sqrt{4x} + 14x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; $-6yy = -48 - 36x + 24\sqrt{4x} - 24\sqrt{4+2x} + 12\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; $+8y = 16 - 8\sqrt{4x} + 8\sqrt{4+2x}$; $-6xy = -12x + 6x\sqrt{4x} - 6x\sqrt{4+2x}$. Donc $y^3 - 6yy + 8y - 6xy = -12x + 8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; & $y^3 - 6yy - 8y - 6xy + 12x = 8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; quantité du nouveau dénominateur. On a donc $\frac{dy}{dx} = \frac{16x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} + 16}{8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}}$

$$= \frac{16x - 12\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x} + 16}{8x\sqrt{4+2x} - 4\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}; \text{ \& divisant par 4; } \frac{dy}{dx} = \frac{4+4x - 3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}} = \frac{4+2x+2x-3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}} = \frac{\sqrt{4+2x} - 3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x} + 2x}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}. \text{ Il est évident que cette}$$

fraction est divisible haut & bas par $\sqrt{4+2x} = 2\sqrt{x}$, & que cette division donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4+2x} - \sqrt{x}}{\sqrt{4+2x} \times \sqrt{x}} =$ (en met-

tant pour x sa valeur 2) $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{8} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

donc $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$; & $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ce qu'il fal-

loit trouver.
Soit cette autre équation $P. \dots y^4 - 2by^3 - 2axy^2 + bbyy - 2abxy + aaxx = 0$, pour avoir les tangentes au point Ffij

de cette courbe où les co-ordonnées y & x sont égales à zéro. La règle proposée dans ce Mémoire donnera tout d'un coup

$$bbdy^2 - 2abdx dy + aadx^2 = 0, \& dy - \frac{dx}{b} = 0,$$

& $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$. Mais sans avoir recours à cette règle, si l'on fait évanouir l'une des inconnues par la substitution de sa valeur en l'autre, on trouvera la même chose, en ne se servant que de la méthode ordinaire des *infinitement petits*. Suivant cette méthode, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{2ayy + 2aby - 2aax}{4y^3 - 6byy - 4axy - 2abx + 2bby}$.

L'équation P peut être réduite sous les signes radicaux à cette forme, $y - \sqrt{ax} - \sqrt{by} = 0$; ou $\sqrt{ax} = y - \sqrt{by}$; d'où l'on tire $x = \frac{yy + by \pm 2y \times \sqrt{by}}{a}$. En substituant cette valeur de x en y dans la fraction différentielle

$$\frac{2ayy + 2aby - 2aax}{4y^3 - 6byy - 4axy - 2abx + 2bby} = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{2ayy + 2aby - 2ayy - 2aby \pm 4ay\sqrt{by}}{4y^3 - 6byy - 4y^3 - 4byy \pm 8yy\sqrt{by} - 2byy - 2bby \pm 4by\sqrt{by} + 2bby}$$

$$\text{qui étant corrigée, se réduit à } \frac{\pm 4ay\sqrt{by}}{12byy \pm 8yy\sqrt{by} \pm 4by\sqrt{by}}$$

$$= (\text{en divisant par le commun diviseur } 4y\sqrt{by}) \frac{\pm a}{3\sqrt{by} \pm 2y \pm b},$$

ou mettant pour y sa valeur donnée zéro, il vient enfin $\frac{\pm a}{\pm b} = \frac{dy}{dx}$. Ce qu'il falloit trouver.

Soit pour dernier exemple l'équation $Q \dots y^3 - 3ayx + 3aay - axx + 1aax - 2a^3 = 0$; on cherche les tangentes de la courbe exprimée par cette équation au point qui donne $y = x = a$. Suivant la méthode de la section 2. des *infinitement petits*, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay - 3aa} = \frac{0}{0}$, en substituant pour x & pour y leur valeur commune a : mais si avant cette substitution, on y fait celle de y en x , ou de x en y , en sorte que l'une ou l'autre s'évanouisse, on trouvera le rapport réel de dy à dx . Prenons la valeur de y ,

L'équation réduite aux signes radicaux, donne $y = a + \sqrt[3]{a}$
 $\times \sqrt[3]{a - x}$; donc $yy = aa + 2a\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{aa}$
 $\times \sqrt[3]{a - x}$; si l'on met ces deux valeurs de y & de yy dans
 le dénominateur de la fraction $\frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$, on aura

$$\frac{2ax - 2aa}{3aa + 6a\sqrt[3]{a - x} + 3\sqrt[3]{aa} \times \sqrt[3]{a - x} - 6aa - 6a\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a - x} + 3aa}$$

ôtant ce qui se détruit, il viendra. $\frac{2ax - 2aa}{3\sqrt[3]{aa} \times \sqrt[3]{a - x}}$

$$= \frac{-2a \times a - x}{3\sqrt[3]{aa} \times \sqrt[3]{a - x}} = \frac{-2 \times \sqrt[3]{a^3} \times a - x}{3\sqrt[3]{aa} \times \sqrt[3]{a - x}}$$

& divisant par le commun diviseur $\sqrt[3]{aa} \times a - x$,
 on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{0}$, en

mettant pour x sa valeur a . Ce qui donne une tangente
 commune à deux rameaux, & perpendiculaire à l'axe des
 x .

Il n'est pas nécessaire d'ajouter d'autres exemples : on voit
 assez que toutes les fois qu'ayant les racines de l'équation, on
 pourra faire évanouir dans la fraction différentielle une des
 inconnues, & diviser le résultat de cet évanouissement par
 le plus grand commun diviseur, on aura le rapport véritable
 du dy au dx , & par conséquent les tangentes requises. Ce
 n'est en effet que ce commun diviseur égal à zéro, qui rend
 égaux à zéro le numérateur & le dénominateur de la frac-
 tion, & ce commun diviseur s'y trouve toujours dans les
 points de concours de plusieurs rameaux, soit points d'inter-
 section, soit points d'attouchement, parce que les inconnues
 de l'équation ayant l'une & l'autre dans ces points-là autant
 de racines égales qu'il y a de rameaux, la première différen-
 ciation n'en ôte qu'une, & en laisse une autre, s'il y en avoit
 deux; ou deux, s'il y en avoit trois; ou trois, s'il y en avoit
 quatre, &c. Et ce sont ces racines qui restent dans le numé-
 rateur & dans le dénominateur qui les rendent égaux à zéro,

230 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ainsi que je l'ai déjà expliqué dans mon premier Mémoire
sur cette matiere.

C'est pour n'avoir pas fait assez attention à cette raison que j'ai donnée du cas où l'on trouve $\frac{d y}{d x} = 0$, que feu M. Guinée ; fort habile d'ailleurs , est tombé dans un paralogisme , dont il est surprenant qu'il ne se soit point apperçu. Ce paralogisme qui entraîne après lui bien des absurdités , fait grand tort à un Mémoire , à cela près excellent , que l'on a de cet Auteur parmi ceux de l'année 1706. Le Mémoire a pour titre , *Observations sur la Méthode de maximis & minimis, &c.* Et le paralogisme mérite d'autant plus d'être relevé, qu'il a été une occasion de chute au sçavant Commentateur de l'*Analyse des infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, en lui donnant lieu de faire plusieurs remarques plus subtiles que solides , non-seulement sur l'endroit particulier où est le paralogisme , & sur quelques autres du Mémoire , mais aussi en général sur toute la matiere de *maximis & minimis*.

On avoit proposé à M. Guinée quelques difficultés sur la sect. 3. des infiniment petits, où l'Auteur de ce Traité donne l'usage du calcul différentiel dans les questions des plus grandes & des plus petites appliquées. Comme les points des courbes, où se terminent ces appliquées, se trouvent par la supposition du rapport des différences dy, dx , donné dans ces points-là, M. Guinée a crû devoir expliquer les divers rapports que ces différences peuvent avoir dans les différens points des courbes : & d'abord il les réduit à ces trois genres ; rapport fini , rapport infini , & rapport indéterminé. Le rapport fini est lorsque les différences sont entr'elles comme deux quantités finies ; le rapport infini est celui où l'on a $\frac{d y}{d x} = \frac{m}{0}$, ou $\frac{d y}{d x} = \frac{0}{m}$ (m étant une quantité finie quelconque) ; le rapport indéterminé est notre $\frac{d y}{d x} = 0$. Il l'appelle *indeterminé*, parce que, pour me servir de ses propres termes, 0 peut être égal à une quantité quelconque p ; puis-que p multipliée par le dénominateur zéro, produit le numérateur

zéro. Cette application du rapport indéterminé, fait entendre, ce me semble, que dans les points où la fraction différentielle le donne tel, il peut être réellement un rapport déterminé, soit fini, soit infini, & que la fraction, dans ce cas, ne le donne indéterminé qu'à cause d'un multiplicateur commun $= 0$, qui s'y trouve dans le numérateur. Jusqu'ici tout va bien : mais ce qui suit ne va pas de même.

Personne n'ignore, dit M. Guinée, après cette courte exposition, qu'il ne se rencontre entre les différences dx & dy des co-ordonnées des courbes, des rapports finis & infinis dans différents points des mêmes courbes : mais on ne sçait peut-être pas si généralement qu'il s'y rencontre quelquefois certains points où le rapport de dx & dy est indéterminé ; c'est pourquoi, ajoute-t-il, j'ai jugé à propos de le démontrer ici.

Les difficultés de feu M. Rolle sur ces points-là, & les solutions données à des difficultés, avoient déjà fait connoître, & le rapport & les points où il se présente. Quoi qu'il en soit, voici comme est énoncé le Théorème que M. Guinée se propose de démontrer.

Le rapport des différences dx & dy des co-ordonnées des courbes est indéterminé dans tous les points d'intersection (qui seront dans la suite appelés nœuds) de deux rameaux où les tangentes ne sont pas parallèles aux co-ordonnées ; ou, ce qui est la même chose, aux axes conjugués, soit que l'on suppose dx ou $dy = 0$.

Ce Théorème, ainsi énoncé, est plein d'équivoques & d'erreurs, c'est une vérité de fait, & qui n'a pas besoin de démonstration que dans les points d'intersection, ou *nœuds*, comme les appelle M. Guinée, l'équation différentielle d'où l'on tire le rapport des différences, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. 1°. S'il y a quelque chose à démontrer, c'est la raison pourquoi le rapport de dy à dx , étant réellement déterminé dans ces points-là, il ne laisse pas de se présenter dans la fraction différentielle sous la forme du rapport indéterminé $\frac{0}{0}$. 2°. M. Guinée restraint ce rapport indéterminé aux points d'inter-

section ; erreur considérable , le rapport des différences se présentant également indéterminé dans tous les points de rencontre de plusieurs rameaux , soit points d'intersection , soit points d'attouchement , quoique réellement déterminé dans les uns & dans les autres. 3°. A l'égard des seuls points , même d'intersection , M. Guinée se renferme encore dans ceux où les tangentes ne sont point parallèles aux co-ordonnées , ou aux arcs conjugués ; autre erreur , d'autant plus remarquable , que dans les points d'intersection en particulier où les rameaux se coupant à angles droits , les tangentes se trouvent parallèles aux axes conjugués , non-seulement l'équation différentielle donne $\frac{dy}{dx} = 0$ à cause du concours des racines égales : mais réellement dans ces points-là dy est $=$ à zéro par rapport à dx , à l'égard de l'un des rameaux , & dx à son tour est égal à zéro par rapport à dy , à l'égard de l'autre rameau ; ce que je ferai voir bien-tôt , ainsi que je l'ai promis au commencement même de ce Mémoire. 4°. C'est une pure brouillerie que ces mots qui finissent l'énoncé du Théorème , soit que l'on suppose dy ou $dx = 0$. Ce n'est pas la supposition de dy ou $dx = 0$ qui fait que dans les points dont il s'agit , l'on trouve $\frac{dy}{dx} = 0$: mais c'est parce qu'on y trouve $\frac{dy}{dx} = 0$, que la supposition de $dy = 0$ & de $dx = 0$ donne ces mêmes points. Que si M. Guinée veut dire , comme en effet on verra tout-à-l'heure qu'il le veut dire , que dans les points d'intersection où les tangentes ne sont pas parallèles aux axes conjugués , l'une des différences ne peut pas devenir égale à zéro que l'autre ne le devienne aussi ; il ne dit rien qui soit particulier aux points d'intersection , rien qui ne convienne à tous les points pris sur un seul rameau , & où le rapport des différences est un rapport fini , & donné fini par la fraction différentielle.

Le dernier sens que je viens de donner à cette fin de l'énoncé , soit que l'on suppose dy ou $dx = 0$, paroît évidemment dans la nouvelle exposition que M. Guinée fait de son

son théorème, en l'appliquant à l'exemple de la courbe $KADBL$, & dans la démonstration qui la suit.

Soit, dit-il, la courbe $KADBL$ qui a un nœud en D , dont les axes conjugués sont AB , AC ; & les co-ordonnées AP ou AQ , x , PM , ou QN , y ; il faut démontrer que si les tangentes au point D , ne sont pas parallèles aux axes conjugués AB , AC , les différences dx & dy deviendront toutes deux égales à zéro au point D , par la supposition de l'une des deux $= 0$.

Voilà ce que M. Guinée se réduit à démontrer, & ce qu'en effet il démontre de cette sorte.

Par un point quelconque M , pris sur le rameau AD soient menées les droites, FMN parallèle à AB , qui rencontrera le rameau BD en N ; MP , NQ & DE parallèles à AC . Si l'on suppose présentement que le point M s'approche de plus en plus à l'infini du point D ; $MN = PQ$ deviendra enfin dx , & $OD dy$; de sorte que par la supposition de MN ou $OD = 0$, le point M tombera en D ; les points O & N tomberont aussi en D , & par conséquent MN & OD , dx & dy seront nulles, ou $= 0$, parce que le point d'intersection en D est un point mathématique, l'angle MDN étant d'une grandeur finie; ce qui n'arriveroit pas de même, si les rameaux AD , BD , se touchoient en D , car MN devenant nulle, OD demeureroit égale au petit côté de l'attouchement, & par conséquent infinie par rapport à MN . Il est donc constant que dans les nœuds le rapport de dx à dy est indéterminé, ou $= 0$ par la supposition de dx ou $dy = 0$.

M. Guinée a donc ici démontré que si les tangentes au point D , ne sont pas parallèles aux axes conjugués AB , AC , les différences dx & dy deviendront toutes deux égales à zéro par la supposition de l'une des deux $= 0$; & c'est à quoi il s'étoit réduit: mais c'est de quoi il n'étoit nullement question dans le cas où l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Dans tout point de courbe, comme je l'ai déjà dit, où le rapport de dx à dy est un rapport fini, soit que ce soit un point d'intersection, ou que ce soit un point particulier à un seul rameau, il est

234 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 évident que si l'une des différences devient $= 0$, l'autre le devient aussi, & qu'elles s'évanouissent ensemble en tombant sur le point. Supposons le point D pris sur le seul rameau $KADH$, ne pourrai-je pas faire à l'égard du point D ou de tout autre pris à volonté sur le même rameau; ne pourrai-je pas faire, dis-je, le même raisonnement que fait M. Guinée dans sa démonstration? Ne sera-t-il pas vrai dans ce cas comme dans le sien que le point O tombant en D , le point M y tombera aussi, & que OD (dy) étant égal à zéro, MN (dx) sera aussi égal à zéro?

C'est indépendamment de toute supposition de $dy = 0$, ou de $dx = 0$, que l'on trouve au point d'intersection D , $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; on le trouve ainsi sans faire tomber ni OD (dy) ni MO (dx) sur le point mathématique D : on le trouve ainsi, non parce que le point D est un point mathématique, mais parce que c'est un point de concours de plusieurs racines égales: on le trouveroit de même si les rameaux AD , BD , se touchoient en D , quoique MN y devenant nulle, OD demeurât égale au petit côté de l'attouchement. Encore une fois soit dans les points d'intersection, soit dans les points d'attouchement, le rapport des différences est réellement déterminé: mais dans les uns & dans les autres il se montre indéterminé à cause de la pluralité des racines égales; d'où naît dans la fraction différentielle un commun multiplicateur $= 0$, qui la rend par conséquent $= \frac{0}{0}$; & c'est pour l'ôter qu'il faut ou répéter les différentiations, ou faire évanouir une des inconnues, & diviser ensuite la fraction résultante par le plus grand commun diviseur; comme je l'ai exécuté dans ce Mémoire à l'égard de la courbe même $KDBL$ prise ici pour exemple par M. Guinée.

Je viens au Commentaire sur les infiniment petits, la démonstration de M. Guinée y est combattue: mais par un raisonnement moins recevable encore que la démonstration même M. Guinée, dit-on, pose en fait que si la supposition de $dy = 0$, & celle de $dx = 0$, donnent la même valeur au

lieu d'un maximum ou d'un minimum, ou d'un nœud.

L'Auteur de ce Commentaire, dont le mérite dans les sciences est si connu, & que je fais profession d'honorer parfaitement, ayant trouvé cette règle en défaut dans plusieurs exemples, où la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$ donne d'autres points que des points d'interfection, a jugé avec raison qu'il falloit que la prétendue démonstration de la règle fût fautive ou défectueuse : mais n'ayant ni assez considéré la nature des points donnés par la supposition, ni assez compris que la démonstration de M. Guinée n'étoit point du tout au fait de la question, il paroît avoir crû que la règle seroit démontrée, si l'on convenoit que dans le point d'interfection D de la courbe proposée, les différences dy & dx tombant sur le point même D , devenoient l'une & l'autre égales à zéro : c'est ce qui l'a jetté dans une subtilité qu'il trouvera lui-même frivole, pour peu qu'il veuille y penser. Cette subtilité est de regarder les deux rameaux qui se coupent comme ayant de la largeur ; d'où il résulte, suivant sa pensée, que ces deux rameaux se coupant obliquement au point D , ce nœud a quelque étendue, & n'est pas un point mathématique, & qu'ainsi il y a réellement au point D un dy & un dx . Après avoir rapporté la proposition de M. Guinée que l'on a vûe ; on pourroit, dit-il, lui faire quelques difficultés sur la preuve qu'il apporte de sa proposition. *IBIDEM.* LBNDS & KAMD se croisent bien en D ; & au point D , NO (x) & OD (y) s'évaluoient ; mais il ne s'ensuit pas qu'en D il n'y ait ni dx ni dy ; car SDN coupe obliquement DM, & par conséquent leur nœud a quelque étendue : & comme NDS n'est pas perpendiculaire sur AMD, elle est couchée sur plus d'un point, & l'on peut concevoir une dy qui réponde à son élévation le long de l'oblique MD.

C'est un paradoxe qu'on ne reçoit point en Géométrie qu'un nœud qui a de l'étendue. Tout point d'interfection de deux lignes, soit droites, soit courbes, est un point mathématique, les lignes elles-mêmes étant mathématiques & sans

236 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 aucune largeur. Mais quelle nécessité d'avoir recours à ce paradoxe, pour trouver au point D un dx & un dy ? Qui ne voit qu'en ce point les valeurs de x & de y étant l'une & l'autre $= a$ dans l'équation de M. Guinée, elles passent, ainsi qu'on l'a dit si souvent dans ce Mémoire, x par $a - dx$, & y par $a - dy$, avant que de venir $= a$, en tombant sur le point D ? Et en effet mes solutions précédentes ont montré qu'on y a réellement $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, ou $= \frac{1}{2\sqrt{2}}$, en prenant a pour 2, comme a fait M. Guinée dans son équation. M. Guinée n'ignoroit pas ce rapport réel & déterminé des différences dans ce point, & il n'avoit garde de rien avancer de contraire dans sa démonstration; ce qu'il y avance, & qui est très-vrai, c'est que si l'on suppose le $dx = 0$, en le faisant tomber sur le point D , le dy tombant avec le dx sur le même point, devient aussi $= 0$.

L'illusion de M. Guinée est d'avoir crû trouver en cela, & démontrer par cela, la raison qui fait que les valeurs de x & de y qui conviennent aux points d'intersection, étant substituées dans l'expression générale du rapport des différences dx & dy tirée de l'équation différentielle de la courbe, donne $\frac{dy}{dx} = 0$; & réciproquement que les points d'intersection sont donnés par la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$.

Si l'idée du concours des racines égales dans les points de rencontre de plusieurs rameaux s'étoit présentée à M. de Crouzas, sa pénétration ordinaire lui auroit fait aisément découvrir que dans les exemples qu'il oppose à la proposition de M. Guinée, les points donnés par la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$, ne sont pas à la vérité des points d'intersection, mais que ce sont des points d'attouchement, & par conséquent toujours des points de rencontre de plusieurs rameaux. Parmi ces exemples il n'en auroit pas mis dans lesquels il suppose des points d'intersection, qui cependant ne sont pas donnés par le rapport de $\frac{dy}{dx} = 0$; de sorte que selon lui, la règle

proposée non-seulement donne des points d'interfection où il n'y en a pas, mais encore elle manque d'en donner où il y en a. Enfin il n'auroit pas pris occasion de-là de recommander si souvent l'attention au sujet que l'on traite, en l'opposant en quelque sorte au calcul exact de l'équation qui en renferme la nature & les propriétés. Rapportons quelques-uns des endroits les plus remarquables.

C'est l'article 49. des *infiniment petits* qui a donné lieu aux difficultés proposées à M. Guinée, & aux observations qu'il a faites pour les éclaircir. L'exemple que M. le Marquis de l'Hôpital y présente à sa méthode de *Max. & Min.* est mon exemple *Q*, le dernier de ceux auxquels j'ai appliqué les remarques données dans ce Mémoire, & le premier que M. de Crouzas oppose à la règle de M. Guinée. Il est proposé dans l'analyse des *infiniment petits* sous les signes radicaux, comme on le voit ici en *H*.

$$H. \dots y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}.$$

Après que M. de Crouzas a expliqué comment de cette équation différenciée sous cette forme, on tire $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}; \text{ il montre selon les idées, \& par les raison-}$$

nemens de M. Guinée, qu'outre le *Minimum* de M. le Marquis de l'Hôpital, que la supposition de $dx = 0$ donne au point où $x = a$, il y a encore dans cette courbe deux *Maxima* au point où (la courbe étant supposée continuée à l'infini) y est infiniment grand par rapport à a , & x infiniment grand encore par rapport à y ; point indiqué par la supposition de $dy = 0$. Ces *Maxima* infinis de M. Guinée, & particulièrement le raisonnement qu'on fait sur le -2 qui multiplie $\sqrt[3]{a}$ dans le numérateur, demanderoient de n'être point passés sans réflexion: mais je ne m'y arrête pas ici, pour suivre M. de Crouzas.

Il reprend l'équation $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$, & l'ex-

G g ii.

primant par son équivalente $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, il tire de la différentiation de cette équation équivalente, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a - 2x}{3\sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}}$, où trouvant la même va-

leur de $x = a$, donnée par l'une & l'autre supposition de $dy = 0$, & de $dx = 0$, il en forme une objection contre M. Guinée, dont la règle devroit donner ici un point d'interfection, qui n'y est pas. *M. Guinée*, dit-il, *prétend que c'est-là une preuve d'un faux Maximum, ou d'un nœud. Mais ce caractère est équivoque; il faut se rendre attentif au sujet dont il s'agit, & non pas aux signes, pour faire un juste discernement.*

Ce caractère est équivoque, il est vrai, par rapport au nœud, le point donné par les deux suppositions pouvant être un point d'attouchement, & non pas un point d'interfection: mais c'est toujours une marque infallible d'un point de rencontre de plusieurs rameaux, qui est nécessairement, ou point d'attouchement, ou point d'interfection.

La courbe dont il s'agit dans cet exemple, est la parabole cubique, dont le point *D*, point de rencontre des deux rameaux, est un point d'attouchement; & ce point est donné en effet par la valeur de $x = a$. Mais ce point commun des deux rameaux, considéré sur un seul des deux, & pris séparément, cesse d'être un point de rencontre; & c'est aussi

pourquoi l'équation proposée $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$ n'exprimant qu'un seul rameau; les deux suppositions $dy = 0$, & $dx = 0$ dans son équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2}{3} \sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}$, ne donnent point une même valeur; c'est de la supposition seule de $dx = 0$ que l'on tire $x = a$.

Si M. de Crouzas ne s'étoit pas trompé par mégarde, en différentiant son équation équivalente, $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, il ne lui seroit pas venu l'équation différentielle qu'il en a tirée, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2a}{3\sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}}$;

mais celle-ci, $\frac{2ax - 2aa}{\sqrt[3]{a^3 - 2aax + a^2x^2}} = \frac{-2a \times a - x}{\sqrt[3]{aa \times a - x} \times \sqrt[3]{a - x}}$;
 & divisant par le commun diviseur $\sqrt[3]{aa \times a - x}$, on a
 comme auparavant $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a - x}} = \frac{dy}{dx}$; ce qui anéantit l'objection.

Que si l'on s'arrête à la fraction $\frac{-2a \times a - x}{\sqrt[3]{aa \times a - x} \times \sqrt[3]{a - x}}$

sans diviser par le commun diviseur $a - x$; il est clair que le numérateur étant le même qu'on auroit, en différenciant l'équation délivrée des signes radicaux, il convient alors à la courbe entière composée des deux rameaux; & que dans cet état les deux suppositions $dy = 0$, & $dx = 0$ doivent donner une même valeur, en vertu du commun diviseur $a - x$ qui reste, & par conséquent indiquer un point de concours de racines égales, qui est le point d'attouchement D . Et en effet cette action est précisément la même que celle qui vient de l'équation délivrée des signes radicaux, quand on a fait évanouir dans cette fraction l'inconnue y par la substitution de sa valeur en x , comme on le peut voir plus haut dans l'exemple Q .

Nous ne dirons pas ici avec M. de Crouzas qu'il faut se rendre attentif au sujet dont il s'agit, & non pas aux signes, pour faire un juste discernement: mais nous dirons qu'il faut se rendre bien attentif aux signes, pour se rendre attentif au sujet, puisqu'il n'est connu que par les expressions algébriques qui le présentent à l'esprit. On ne découvre point ce que renferme l'équation donnée d'une courbe par la considération de la courbe encore inconnue: mais on connoît la nature de la courbe, & l'on développe tout ce qui lui convient, par le calcul exact de l'équation donnée qui l'exprime.

M. de Crouzas vient enfin à l'équation dégagée de signes; $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + a^2xx$, dont la

différentiation lui donne, comme à nous dans notre exemple Q , $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$. Si dans cette équation différentielle on suppose $dy = 0$, on a $x = a$; & si l'on y suppose $dx = 0$, on a $y = a$; de sorte que dans l'équation non différenciée $y = a$ donnant $x = a$, & $x = a$ donnant $y = a$, les deux suppositions $dy = 0$ & $dx = 0$ se trouvent donner un même point; ce qui marqueroit, selon M. Guinée, un *nœud*, que la courbe n'a pas.

$\frac{dy}{dx} = 0$ ne donne donc pas ici un point d'intersection; & M. Guinée a tort: mais c'est toujours un point de concours de plusieurs rameaux qui est donné, & tel est le point d'attouchement D de la courbe proposée.

P. 112. Je suis fâché de trouver, après cette objection, une nouvelle réflexion de M. de Crouzas sur le même ton que la précédente. *On voit encore dans cet exemple, dit-il, qu'un peu d'attention à la nature de la courbe, fait connoître le rapport de dy & dx , & découvre par-là si c'est le numérateur ou le dénominateur qu'on doit évaluer à zéro. Si on néglige cette considération, & qu'on se contente de calculer une équation, sans se former une juste idée des quantités qu'elle renferme, non-seulement on pourra se trouver embarrassé, mais on pourra même se tromper.*

Il semble que M. de Crouzas veuille rendre le calcul respectable de la méprise de M. Guinée, & du défaut de sa règle. Il se fait une affaire sérieuse de nous avertir d'être sur nos gardes, & de ne nous fier qu'à bonnes enseignes à nos calculs équivoques, & sujets à tromper; il nous exhorte d'avoir grand soin d'appeller à notre secours, contre leur incertitude ou leur obscurité, la lumière des raisonnemens, & la considération attentive de la nature de la courbe proposée. Crainte frivole, & dangereux avis. Ce n'est que le calcul qui développe les quantités que renferme une équation, & qui nous fait connoître la nature de la courbe qu'elle exprime, ainsi que je l'ai déjà dit: ce n'est jamais le calcul qui nous trompe, quand il est bien fait; il n'a pas besoin d'être appuyé par des raisonnemens: mais d'ordinaire ce sont les raisonnemens

mens qui nous trompent, & qui ne doivent nous déterminer qu'autant qu'ils sont indiqués, ou appuyés par le calcul. M. Guinée ne s'est point trompé pour s'être contenté de calculer une équation : mais c'est un faux raisonnement indépendant du calcul qui l'a jetté dans l'erreur.

Pour justifier la réflexion que j'oppose à celle de M. de Crouzas, je le prends ici lui-même sur le fait; c'est dans son raisonnement sur -2 qui multiplie \sqrt{a} dans le numérateur de la fraction différentielle $\frac{-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a-x}} = \frac{dy}{dx}$. Je l'ai pas-

sé plus haut : mais un petit désir de vengeance en faveur du calcul contre sa remarque, me fait saisir l'occasion présente de le rappeler. En faisant $dy=0$, il trouve après M. Guinée, comme on l'a déjà dit, un *Maximum* infini, c'est-à-dire, une tangente infinie au point de la courbe continuée à l'infini. Sur cela je n'ai rien à dire : mais voici ce qu'il ajoute de lui-même : le nombre 2 qui précède \sqrt{a} , avertit même que de côté & d'autre du point E, il se trouve une telle tangente.

Sûrement le nombre 2 n'avertit point de cela. Quand on fait $dx=0$, & qu'on trouve un *Minimum* au point où l'on a $x=a$, le nombre 3 qui précède $\sqrt{a-x}$, nous marque-t-il trois points de la courbe, qui ayent chacun leur *Minimum* ? Le nombre 2 du numérateur n'a nul avantage sur le nombre 3 du dénominateur ; & si l'un nous donnoit deux *Maxima*, il faudroit que l'autre nous donnât trois *Minima*. D'où vient que M. de Crouzas trouve dans l'un un avertissement qu'il ne trouve pas dans l'autre ? Ce n'est pas le calcul qui mene-là. Par le calcul, $dy=0$ donne tout simplement $2\sqrt{a}=0$, comme $dx=0$ donne tout simplement aussi $3\sqrt{a-x}=0$; on pourroit même ôter 3 du dénominateur, & mettre $\frac{2}{3}$ dans le numérateur, & alors M. de Crouzas n'auroit que deux tiers de tangente. Qu'est-ce donc qui l'a porté à faire dire au nombre 2, ce que certainement il ne dit pas, & ne doit pas dire ? C'est qu'ayant considéré la courbe qu'il

242 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 avoit sous les yeux, il a vû que du point *D* elle jettoit deux rameaux, qui, s'éloignant l'un de l'autre, s'étendoient à l'infini des deux côtés de ce point, & par conséquent que sa tangente infinie devoit aussi s'étendre de part & d'autre, pour aller toucher les deux rameaux chacun dans leur point infiniment éloigné. Ces deux points où *d y* est égal à zéro, donnés par la nature de la courbe, s'étant ainsi présentés à lui avec la double tangente, & trouvant 2 dans le numérateur de la fraction différentielle, il lui a paru que cela s'ajustoit fort bien, & que ce 2 n'étoit là que pour désigner les deux points & les deux tangentes.

Mais, outre ce que nous avons déjà dit sur ce 2, M. de Crouzas nous permettra d'ajouter qu'il n'a pas pris garde que si ce nombre marquoit deux tangentes dans la fraction où il se trouve, il marqueroit faux; puisqu'il les marqueroit dans un seul rameau, l'équation différentielle $\frac{-2 \sqrt[3]{a}}{3 \sqrt[3]{a-x}} = \frac{dy}{dx}$ étant tirée de l'équation radicale $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$, qui n'exprime qu'un des rameaux.

On voit donc ici ce que je voulois faire voir, que le raisonnement de M. de Crouzas est une méprise qui vient de la considération mal entendue ou mal appliquée de la courbe décrite, & d'un défaut d'attention au calcul, à qui l'on fait dire, non ce qu'il dit, mais ce que l'on croit, & que l'on croit par erreur, qu'il doit dire.

Je reviens à la page 112, d'où j'étois remonté à la page 110. M. de Crouzas y ajoute encore quelques réflexions sur l'article 49^{me} des *infiniment petits*. Il y a du faux, & n'y a rien d'exact dans ces réflexions. Je les rapporterai, parce qu'elles serviront à confirmer de plus en plus ce que j'ai établi; & que M. de Crouzas s'y trouve encore en faute, pour être plus attentif à donner aux expressions du calcul la signification qui l'accommodé, que de recevoir celle qu'elles ont, & qu'elles présentent à ceux qui savent, ou qui veulent bien les entendre.

Si AE , dit-on, $= a = x$; le rameau $*MmD$ finit en D * Fig. 2.
vis-à-vis du point E ; & ce rameau, à proprement parler, n'a point de minimum; car on appelle la plus petite appliquée, celle qui, de côté & d'autre, en a de plus grandes; ce qui n'a pas lieu dans les appliquées d'un seul rameau.

$M.$ de Crouzas dit la même chose à l'égard de l'autre rameau, qui, non plus que le précédent, & par la même raison, n'a, selon lui, aucun minimum.

J'attaque d'abord la raison donnée; & je dis que pour qu'une appliquée soit la plus grande, il n'est pas nécessaire qu'elle ait après elle une suite décroissante d'appliquées, il suffit, pour être un *maximum*, qu'elle soit la dernière d'une suite croissante qui la précède. Qu'il y en ait, ou qu'il n'y en ait point après elle de plus petites, pourvu qu'il n'y en ait point de plus grandes, c'est toujours un véritable *maximum*. Il en est de même d'une plus petite appliquée; qu'il y en ait, ou qu'il n'y en ait pas après elle de plus grandes, pourvu qu'il n'y en ait pas de plus petites; c'est un véritable *minimum*.

Ainsi il ne manque rien au *minimum* que $M.$ le Marquis de l'Hôpital & $M.$ de Crouzas même après lui ont tiré de l'équation du rameau MmD , en faisant $dx = 0$ dans le dénominateur de la fraction différentielle, & qu'ils auroient aussi tiré de l'équation particulière de l'autre rameau mMD ; il ne lui manque rien, dis-je, pour être un véritable *minimum*; & il ne devient celui de la courbe, que parce que le *minimum* d'un rameau tombant au point d'attouchement sur le *minimum* de l'autre, les deux *minima* égaux n'en font qu'un seul DE commun aux deux rameaux; & comme ce *minimum* dans chaque rameau n'est que le petit côté du rameau prolongé jusqu'à la rencontre de l'axe des x AE sur lequel il est perpendiculaire; ce qui fait qu'au point D de chaque rameau pris séparément, dy est infini par rapport à dx ; il est évident que les deux petits côtés des deux rameaux étant appliqués l'un sur l'autre, le dy au point D devenu point commun, est de même infini par rapport au dx , & que le

H h ij

244 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
minimum y doit être donné par la même supposition de $dx = 0$, qui le donne dans l'un & l'autre rameau pris séparément.

On est surpris sans doute de l'explication que je viens de donner d'une chose qui s'offre d'elle-même à des yeux ouverts : mais ce qu'ajoute M. de Crouzas va faire cesser la surprise à l'égard de l'explication. Après avoir dit, comme on a vu, que les deux rameaux, pris séparément, n'ont aucun *minimum*, il poursuit ainsi : *mais si l'on fait évanouir les signes radicaux, on aura une équation qui conviendra également aux deux rameaux. En ce cas, il y a un minimum, & l'appliquée ED en a de côté & d'autre de plus grandes qu'elles.* Cela pourroit passer, en quelque sorte, à la faveur d'un, à proprement parler, qu'on a mis plus haut. Voici l'étonnant : *mais, aussi, ajoute M. de Crouzas, en cherchant le minimum, on la plus petite appliquée, on le trouve dans le numérateur.*

C'est dans le dénominateur qu'on a trouvé le *minimum*, considéré dans un seul rameau, où il n'est que précédé de plus grandes appliquées, & n'en a point après lui. Dans la courbe entière au point d'attouchement des deux rameaux, il est & précédé, & suivi de plus grandes appliquées, & c'est pour cela, dit-on, qu'on le trouve dans le numérateur. Les calculateurs d'équations auront peine à appercevoir le fin de ce raisonnement, il leur paroîtra peu propre à éclaircir leurs calculs.

Puisqu'on le trouve dans le numérateur, on le trouve donc en faisant $dy = 0$ au point D : mais n'y est-il pas réellement infini, comme dans chacun des rameaux ? Et n'est-ce plus dans les deux points infiniment éloignés sur les deux rameaux qu'il est égal à zéro ? Ne doit-il pas donner dans la courbe entière la double tangente infinie qu'on lui a fait donner dans un des rameaux ?

Ces contradictions sont échappées à M. de Crouzas dans ces momens de distraction, & d'attention lassée, qu'éprouvent quelquefois ceux qui pensent le plus, & qui travaillent beaucoup : mais ce qui a aidé à l'y faire tomber, c'est de

n'avoir pas assez bonne opinion de nos calculs, & de vouloir les faire dépendre de raisonnemens étrangers qui ne sont pas sûrs, & qui trompent souvent. Cette prévention, jointe à un défaut d'attention à la nature des points de concours, l'a empêché de voir que dans la fraction différentielle

$$\frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa} = \frac{dy}{dx}, \text{ qui se tire de l'équation de la}$$

courbe délivrée des signes radicaux, les suppositions de dy & de $dx = 0$, donnoient également le point D , non comme point à *minimum*, mais comme point de concours de racines égales; & que ce point étant ici un point d'attouchement qui a un *minimum*, & non pas un point d'interfection, il se trouve, par ce hasard, que tant $dy = 0$ que $dx = 0$ donnent le *minimum* en donnant le point. Et quoique de cette maniere même on ne le trouve pas plus dans le numérateur que dans le dénominateur; M. de Crouzas a été plus frappé du numérateur, où l'on voit clairement qu'en supposant $dy = 0$, on a $x = a$, valeur qui lui étoit déjà connue pour celle qui donnoit le *minimum*. Ainsi ayant oublié que dy étoit réellement infini au point D , & que le seul dx y étoit $= 0$; il s'est arrêté au numérateur. Mais s'il avoit divisé la fraction par le plus grand commun diviseur $a - x$,

comme on l'a déjà fait, au lieu de $\frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$, il auroit eu $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}} = \frac{dy}{dx}$; ce qui lui auroit sauvé

les méprises où ses raisonnemens l'ont jetté.

Une remarque solide de M. de Crouzas, sur laquelle j'ai déjà beaucoup appuyé dans un de mes deux Mémoires de 1716, & qui me fournira encore la matiere d'un nouveau Mémoire, est celle-ci: *On pourroit alléguer une infinité d'exemples d'expressions en terms radicaux qui designent des courbes sans maximum: mais dès qu'on a élevé les signes à leur puissance, il se trouve que cette puissance renferme d'autres racines, en vertu desquelles elle est l'expression d'une courbe à maximum.* De sorte qu'attaquer la nouvelle méthode par les prétendus em-

246 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
barras ou jettent des exemples de cette nature, est un pur sophisme d'équivoque.

En voulant éclaircir cette remarque par un exemple très-simple, M. de Crouzas tombe encore dans quelques fautes qui regardent le sujet de ce Mémoire. L'exemple est l'équation d'une hyperbole équilatérale, $xx - ax = yy$; en différentiant, on a $\frac{d y}{d x} = \frac{2x - a}{2y}$; $dy = 0$, donne bien $x = \frac{1}{2}a$; & si la courbe avoit une appliquée qui répondit à cette valeur de x , elle seroit un *maximum* ou un *minimum*; mais n'ayant aucune appliquée le long de tout l'axe, elle n'y peut avoir ni *maximum* ni *minimum*; au lieu que si l'équation est élevée au quarré $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$, elle renfermera l'équation du cercle $ax - xx = yy$; car ce quarré de l'équation $xx - ax = yy$, est aussi le quarré de l'équation $ax - xx = yy$, comme encore le produit de l'une par l'autre; & en vertu de cette combinaison de l'hyperbole équilatère avec le cercle, la supposition de $dy = 0$ dans la fraction différentielle que l'on tire de cette équation quarrée, donnant encore $x = \frac{1}{2}a$, on a une appliquée y qui répond à cette valeur de x , & qui est un vrai *maximum*. Tout cela est fort bien dit par M. de Crouzas. Mais il se trompe, & se trompe par rapport à mon sujet, en cherchant les valeurs de x dans le numérateur de la fraction différentielle.

Cette fraction est $\frac{4x^3 - 6axx + 2aax}{4y^3} = \frac{d y}{d x}$; ainsi $dy = 0$ donne $4x^3 - 6axx + 2aax = 0$; ou $2x^3 - 3axx + aax = 0$; d'où l'on tire ces trois valeurs de x ; $x = 0$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$. Les fautes dont je reprends ici M. de Crouzas, c'est d'avoir dit que la valeur de $x = a$ lui donnoit une *absurdité*, & de n'avoir rien dit de $x = 0$; il est vrai que ces deux valeurs ne donnent ni *maximum* ni *minimum*, mais elles ne donnent aucune absurdité l'une ni l'autre, puisqu'elles servent à indiquer deux points de rencontre de deux branches. Car si l'on fait $dx = 0$, on aura $4y^3 = 0$, ou $y = 0$; or $y = 0$ dans l'équation quarrée donne $x = 0$, & $x = a$; ainsi ces mêmes valeurs sont données par $dy = 0$,

& par $dx = 0$. Voilà donc deux points de concours de deux branches donnés ; aussi voit-on dans la courbe composée des deux hyperboles opposées, & du cercle, telle qu'elle est représentée dans la Figure 3. que le point où l'on a $x = a$, & $y = 0$, est le point d'attouchement B du cercle & de l'hyperbole ; & que celui où l'on a $x = 0$, & $y = 0$, est l'autre point d'attouchement A du cercle & de l'hyperbole opposée. Ainsi le calcul fait évanouir l'absurdité admise par le raisonnement de l'Auteur.

Il peche plus bas contre la judicieuse remarque qu'il venoit de faire, & que nous avons rapportée tout-à-l'heure, en opposant à la règle de M. Guinée l'exemple $y = \frac{a - x \times \sqrt{x}}{\sqrt{a}}$;

*c'est l'équation, dit-il, d'une * courbe qui a un nœud là où $x = a$;* * Fig. 4.

& la différenciant ensuite, il en tire $\frac{dy}{dx} = \frac{a - 3x}{2\sqrt{ax}}$

$= \frac{-2a}{2a}$ dans le point où $x = a$. Puis il ajoute ; *or dans*

cette courbe qui a un nœud, $\frac{dy}{dx}$ n'est pas $= 0$.

Quand on ne prend qu'une branche de la courbe, comme fait ici M. de Crouzas, il n'y peut avoir ni nœud ni autre point de rencontre, qui suppose toujours plusieurs branches ;

ainsi on ne doit pas avoir $\frac{dy}{dx} = 0$: mais si on élève l'équa-

tion proposée à la puissance du signe radical, elle se changera en celle-ci ; $ayy = x^3 - 2axx + aax$; d'où il viendra

$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - 4ax + aa}{2ay}$; & dans le point donné où

l'on a $x = a$, on a $y = 0$; & par conséquent on aura

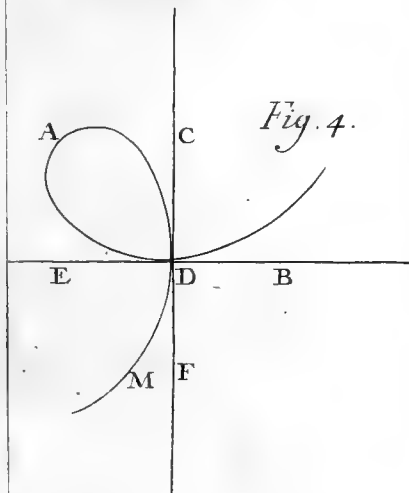
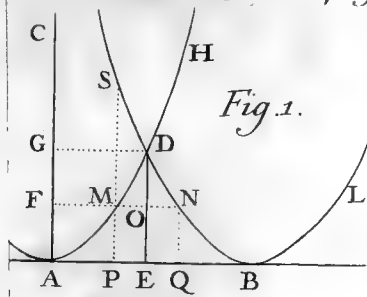
$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - 4ax + aa}{2ay} = \frac{0}{0}$.

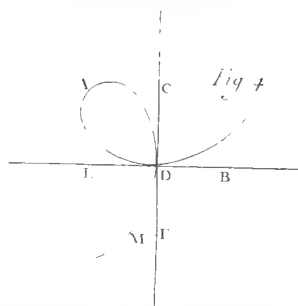
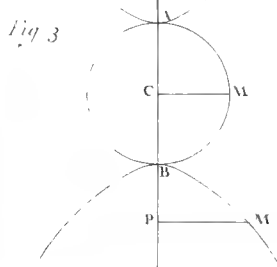
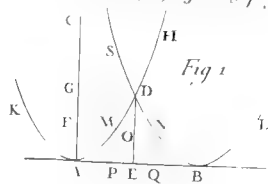
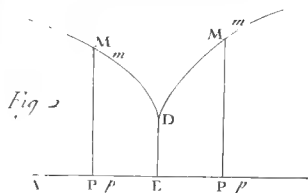
M. de Crouzas répète ici ce qu'il avoit déjà avancé au sujet de la démonstration de M. Guinée. *Il est vrai, dit-il, que si on suppose $dy = 0$, il faudra en dire autant de $dx = dy$; & cette égalité de dx & de dy vient de ce que les deux rameaux se coupent à angles droits, & que l'intersection n'est dans l'un ni dans l'autre que de la largeur précise de la courbe.*

Je ne dis rien sur ce raisonnement répété : mais je prends cette occasion de faire voir ce que j'ai promis, que dans les courbes qui se coupent à angles droits comme celle-ci & le *Folium* de M. Descartes ; si l'on prend les deux tangentes au point d'intersection pour les deux axes, les différences dy & dx y seront réellement l'une & l'autre $= 0$, & l'une & l'autre réellement $=$ à l'infini, & cela en les considérant par rapport aux deux branches prises séparément. Car soit les deux tangentes CF, BE , les deux axes de la branche ADM qui n'a que CF pour tangente au point D , & soit CF l'axe des x , & BE celui des y ; il est évident que la tangente de cette branche se confondant avec l'axe CF , le dx est égal au petit côté de la branche, quand le dy tombe sur le point D ; donc on a à l'égard de ce rameau $dy = 0$ par rapport à dx .

Les deux mêmes droites étant aussi les axes de la branche ADM , qui a pour sa tangente l'axe BE , il est évident encore que le dy est égal au petit côté de cette branche, quand le dx tombe sur le point D ; donc à l'égard de cette branche, on a $dx = 0$, par rapport à dy . Voilà donc en D , point commun des deux branches dy & $dx = 0$, tour à tour l'un par rapport à l'autre, & tour à tour aussi l'un par rapport à l'autre, égaux à l'infini ; ce que je devois montrer, & qui est conforme à la doctrine établie, que la supposition de dx égal à l'infini, ou de $dy = 0$, sert à trouver tous les points des courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des x ; & de même que la supposition de dy égal à l'infini, ou de $dx = 0$, sert à trouver tous les points où les tangentes sont parallèles à l'axe des y .

M. de Crouzas fait revenir encore l'exemple de l'art. 49. des *infin. p. 1*. C'est apparemment un oubli, d'en avoir déjà fait une difficulté à M. Guinée. Il en propose aussi plusieurs autres qu'il seroit inutile & ennuyeux de rapporter ; je dirai seulement que ce sont toujours des points d'attouchement de plusieurs rameaux, donnés par $\frac{dy}{dx} = 0$: mais au lieu que
celui





celui que nous avons examiné est un point de rebroussement, les nouveaux qu'il a pris dans l'*analyse* qu'il commente, sont les points d'inflexion.

Il y a un petit nombre d'autres endroits qu'il retouchera sans doute dans une seconde édition, & qui ont en effet besoin d'être retouchés; il me semble qu'il fait trop valoir & répète trop souvent ses réflexions sur le calcul, qu'il regarde presque comme fait sans lumière, & au secours duquel il appelle toujours, & veut qu'on appelle les raisonnemens, après tant de répétitions, & à la suite de toutes les remarques qu'on a vûes, & de plusieurs autres qu'il dit avoir tirées de M. Guinée. *Je les ai simplement*, ajoute-t-il encore, *éclaircies par des exemples aisés, & par des raisonnemens un peu étendus. J'ai souvent remarqué qu'il est très-important de s'accoutûmer à éclairer ses calculs par le raisonnement; sans quoi un cas un peu nouveau vous laisse tout d'un coup dans l'embarras.*

Les philosophes, & ceux qui ont fait leur principale étude des hautes sciences, font honneur à la géometrie, quand ils daignent s'y appliquer: mais pleins de confiance en leurs lumières, ils veulent d'abord tout éclairer, comme si tout étoit obscur. Avec les plus grandes lumières, & les meilleures intentions, ils pourroient tout gâter, en donnant trop, non à la raison, mais aux raisonnemens.

Ils me permettront donc de répéter ici ce que j'ai déjà dit plusieurs fois, que nos calculs n'ont pas tant de besoin qu'on pense d'être éclairés; ils portent avec eux une lumière suffisante, une lumière propre; & c'est d'ordinaire de leur sein même que sort toute celle qu'on peut répandre sur eux, & que peut recevoir le sujet qu'on traite. Je ne sçai qu'une exception à ma remarque; c'est un ouvrage sublime que le public verra bien-tôt avec admiration, & dont l'Auteur est d'un mérite au dessus de tout éloge.

À l'égard de M. de Crouzas, la connoissance que j'ai de son caractère & de son amour pour la vérité, m'a mis au large avec lui; je n'ai point craint qu'il fût blessé de la manière libre avec laquelle j'ai examiné & repris quelques en-

250 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
droits de son commentaire; & c'est un honneur que je rends
aux sentimens de son cœur, d'oser assurer qu'il sera bien-
aîse que la matiere traitée dans ce mémoire ait été éclaircie,
même aux dépens de ses remarques.

O B S E R V A T I O N S E T R E F L E X I O N S

Sur la COMETE qui a paru au mois d'Octobre 1723.

Par M. MARALDI.

13 Nov.
1723.

LE 18 du mois d'Octobre dernier, un peu avant 7 heures
du soir, le Ciel étant serein, nous découvrîmes du côté
du midi, une comete qui paroissoit à la vûe simple comme
une étoile nebuleuse. Elle étoit placée proche de trois peti-
tes étoiles qui sont dans l'épaule du capricorne, fort proche
du tropique, & par conséquent peu élevée sur l'horison.

L'ayant regardée avec une lunette de 16 pieds, on voyoit
au milieu une lumière blanchâtre & assez claire, dont le dia-
mètre étoit fort petit: mais elle avoit autour une grande
chevelure, dont l'éclat & la densité alloient en diminuant
jusqu'aux bords, qui étoient confus & mal terminés. On dé-
termina d'abord sa situation, en la comparant avec trois
étoiles, à l'égard desquelles elle étoit située, & en obser-
vant ensuite son passage par le méridien & sa hauteur méri-
dienne. Ces observations que nous fîmes à 7 heures, étant
comparées avec celles que l'on continua de faire jusqu'à 10,
firent connoître que la comete avoit un mouvement assez
sensible qui la portoit vers les parties septentrionales du ciel,
& par conséquent qu'elle venoit des méridionales; ce qui a
été confirmé par la suite des observations que nous avons
faites.

Nous donnerons une autrefois le détail de ces observa-

tions, il suffira présentement de rapporter ce qui en résulte.

Par les observations du 18 Octobre, comparées avec celles du 19, faites à la même heure, on trouve que le mouvement que faisoit la comete en 24 heures sur le cercle qu'elle a décrit, étoit de 5 degrés & 5 minutes.

Ayant ensuite comparé le mouvement qui résulte des observations faites entre le 19 & le 21, on trouve qu'en deux jours il a été de 7 degrés & 2 minutes d'un grand cercle; d'où il paroît que ce mouvement alloit en diminuant, ce qu'il a continué de faire de plus en plus jusqu'à la fin des observations. Cette diminution continuelle de mouvement de la Comete fait connoître qu'elle avoit passé son périégée, & qu'elle s'éloignoit de la terre.

On suppose que toutes les cometes, pendant qu'elles sont visibles, parcourent une portion de cercle fort excentrique à la terre, qui n'est pas sensiblement différente d'une ligne droite. Dans cette ligne on imagine un point le plus proche de nous, appelé périégée. Ce point partage en deux parties égales le chemin que fait la comete pendant qu'elle est visible; elle en parcourt une partie avant que d'arriver au périégée, l'autre après l'avoir passé. Pendant qu'elle parcourt la première partie, son mouvement accélère de jour en jour, son diamètre apparent augmente, & elle approche en même temps de la terre jusqu'à ce qu'elle arrive au périégée, qui est l'endroit où le mouvement est le plus vite, & le diamètre apparent le plus grand. Après avoir passé le périégée, le mouvement propre de la comete se ralentit, & le diamètre apparent diminue à peu-près avec les mêmes degrés qu'il avoit augmenté.

Ou suppose que toutes les cometes ont ces mêmes propriétés, & si l'on en a observé plusieurs, seulement lorsque leur mouvement diminuoit, cela vient de ce qu'on ne les a pas apperçues quand il accéléroit; ce qui peut dépendre de quelques causes accidentelles.

Supposant donc que la comete, pendant qu'elle a été visible, ait décrit une portion de cercle qui n'est point sensible:

252 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ment différente d'une ligne droite ; par la méthode de feu M. Cassini, expliquée dans le traité de la Comete, imprimé à Rome en 1664, nous avons calculé le temps auquel elle est arrivée au périée, le lieu du ciel où il s'est rencontré, le mouvement qu'elle faisoit en cet endroit, & celui qu'elle fait avant & après.

Pour avoir toutes ces connoissances, nous avons employé trois observations, faites le 18, le 21 & le 26 d'Octobre, & par les calculs qui en résultent, on trouve que la comete est arrivée à son périée le 14 d'Octobre, à deux heures après midi, & qu'en cet endroit son mouvement apparent étoit de 20 degrés par jour, & par conséquent dans la premiere observation que nous fîmes le 18 d'Octobre, il y avoit quatre jours qu'elle avoit passé par le point de son cercle le plus proche de la terre, & elle en étoit éloignée d'un arc d'un grand cercle de 57 degrés $\frac{1}{4}$.

Cette distance entre la premiere observation & le périée, étant portée sur un grand cercle qui passe par les lieux où la comete s'est trouvée dans toutes les observations, & qui représente aussi la trace qu'elle a décrite avant que d'y arriver, donne la situation du périée dans la partie du ciel qui est entre la constellation du phenix & la belle étoile appelée *Canopus*, dans l'extrémité méridionale de l'Eridan ; ainsi le périée de la comete se trouve dans l'hémisphere austral du ciel, qui ne se leve point sur notre horison, & qui par conséquent nous est toujours caché ; elle n'a donc pas pu être visible, lorsque son mouvement étoit le plus grand.

De la constellation du phenix la comete a passé sur celle de la grue, qui n'est pas non plus visible sur notre horison. Le 17 Octobre elle se trouva avec les étoiles de poisson méridional, qui commencent à paroître sur l'horison de Paris : mais ce jour-là le ciel étant couvert, nous ne pûmes pas l'observer.

Elle fut observée le même jour à Albano proche de Rome par M. Bianchini Prélat-Domestique du Pape. Suivant son observation, elle avoit une queue fort petite, tournée à

l'orient, qui se voyoit à la vûe simple, mais qui se perdoit de vûe avec la lunette de 16 pieds; on voyoit cependant avec la même lunette une grande chevelure, au milieu de laquelle il y avoit une lumiere plus vive, semblable aux étoiles les plus petites. Il déterminâ sa situation par son passage par le méridien & par sa hauteur méridienne, & par diverses distances des étoiles qu'il observa.

Le 18 Octobre elle se trouva sur la constellation du Capricorne, où nous la vîmes pour la première fois; ainsi à cause de la situation particulière de la route de la comète par rapport à notre horizon, & à cause des nuages qui couvrirent le ciel le 17 Octobre, on ne pouvoit pas la voir plutôt que le 18, le jour même que nous l'observâmes.

Le jour suivant 19, elle coupa l'écliptique au 8^{me}. degré d'*aquarius*; ce jour-là le soleil étant au 26^{me}. degré de *libra*, étoit éloigné de 102 degrés du lieu où étoit la comète, ce qui ne favorise pas le sentiment de ceux qui les font venir du soleil; la direction du mouvement de la comète du midi au septentrion ne leur est pas non plus favorable.

Le 21 la comète se trouva proche de l'étoile la plus occidentale de deux qui sont dans la main précédente d'*aquarius*; de-là elle a passé entre deux étoiles les plus occidentales qui sont au dessous de la main d'Antinoüs, & continuant ensuite sa route, elle traversa l'équinoctial entre le premier & second jour de Novembre au 301^{me}. degré d'ascension droite. Nous en avons continué les observations jusqu'au 4 & 5 Novembre qu'elle paroïssoit encore assez belle avec la lunette, malgré la clarté de la lune qui étoit ce jour-là dans son premier quartier: mais les nuages qui ont couvert le ciel pendant trois jours de suite, & le clair de lune qui a succédé, n'ont pas permis de l'observer plus long-temps.

Il paroît par toutes ces observations, aussi-bien que par les premières, que la comète avoit un mouvement qui la portoit du midi au septentrion, & que pendant 18 jours qu'elle a été visible, elle a suivi assez précisément la portion d'un grand cercle, qui à l'égard de l'écliptique, décline de

14 degrés vers l'occident. Depuis le 18 Octobre jusqu'au 5 Novembre, qui est le dernier jour que nous l'avons observée, elle a fait sur sa route 25 degrés 49 minutes, & depuis le périégée, elle en a fait 83. Dans le dernier jour de son apparition, le mouvement de la comete étoit si fort diminué, qu'elle ne parcouroit plus en 24 heures qu'un tiers de degré, ce qui n'est que la 60^{me}. partie du mouvement qu'elle doit avoir fait dans le périégée. Cette diminution de mouvement vient de la grande obliquité qu'avoit à notre égard la ligne, que parcouroit alors la comete, & dans cette situation elle étoit sept ou huit fois plus éloignée de nous que dans le périégée.

Il y a long-temps qu'on n'a point vû des cometes dont le mouvement, quand il est plus vite, ait été de 20 degrés, & par conséquent aussi grand que celui de la comete de cette année.

On observe dans les planetes, que celles qui sont plus proche de nous ont leur mouvement plus vite. Si les cometes gardoient la même regle que les planetes, il y auroit lieu de croire que celle de cette année, qui dans son périégée avoit un mouvement plus grand que celui de la lune, auroit été aussi plus proche de la terre que n'est la lune : mais nous ne sçavons pas si les cometes ne sont pas des corps d'un ordre différent que les planetes.

Son mouvement qui la portoit du midi vers le septentrion, ne nous a pas donné la commodité de chercher sa parallaxe & sa distance à la terre en parties de son diametre, parce que la comete ne s'est pas rencontrée pendant long-temps dans le parallele d'une même étoile fixe.

On auroit pu encore chercher si sa parallaxe étoit sensible le 4 & le 5 Novembre, lorsque le mouvement de la comete se faisoit dans la direction des deux étoiles un peu éloignées l'une de l'autre, & visibles dans la même ouverture de la lunette, comme je me l'étois proposé : mais le ciel ne fut pas favorable à notre dessein à cause des nuages. Nous avons cependant une observation qui pourroit faire connoître si sa

parallaxe est sensible , supposé qu'on ait fait la même observation en quelques autres Villes éloignées.

Le soir du 19 Octobre , pendant que j'observois la comete avec une lunette de 16 pieds , je vis à $8^h\ 38'$ une petite étoile qui ne paroissoit pas cinq ou six minutes auparavant. Mais je commençai de la voir si proche du milieu du disque , qu'elle s'y confondoit de sorte que je crus que c'en étoit une partie , & je ne fus assuré que c'étoit une étoile fixe que lorsque la comete par son mouvement en fut un peu éloignée , quoique l'étoile fût encore plongée dans la partie la plus dense de l'atmosphère qui environnoit la comete.

On tire de cette observation deux conséquences. La première , que le corps qui forme la comete est fort petit par rapport à l'atmosphère ou à la chevelure qui l'environne , parce que nous vîmes l'étoile fort proche du milieu de la comete. La seconde , que cette chevelure est transparente dans l'endroit même où elle est plus dense & plus épaisse , puisqu'on voyoit l'étoile fixe à travers , assez près du milieu de l'apparence que formoit la comete.

Dans l'hypothese que les cometes décrivent des cercles fort excentriques à la terre , elles doivent retourner à se rendre visibles après certains intervalles de temps plus ou moins longs , selon la grandeur des cercles qu'elles décrivent , & selon le mouvement plus ou moins vite avec lequel elles les parcourent.

Suivant cette idée que nous avons des cometes , ayant comparé celle de cette année avec une autre qui a paru en 1707 , nous avons trouvé entr'elles un rapport qui mérite d'être remarqué.

Nous observâmes avec M. Cassini la comete de 1707 , & les observations en sont rapportées dans les Mémoires de l'Académie de la même année. Elle fut vûe par M. Manfredi à Bologne , quelques jours avant nos premières observations , à cause qu'il eut le temps plus favorable. Cet habile astronome vit la comete de 1707 le 25 Novembre au 4^{me} degré & demi d'*Aquarius* avec une latitude méridionale de 5 :

256 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
degrés ; cette situation n'est éloignée que de 4 degrés vers l'occident de celle où a été la comete de cette année le 18 Octobre. Celle de 1707 passa l'écliptique le 26 Novembre au 6^{me}. degré d'*Aquarius*, celle de cette année a traversé le même cercle le 19 Octobre au 8^{me}. degré du même signe à deux degrés de distance de la premiere ; l'une & l'autre a passé proche de l'étoile qui est dans la main occidentale d'*Aquarius*, ce qui fait voir que depuis les premieres observations les traces décrites par le mouvement de ces deux cometes se sont approchées & se sont croisées ensuite. La comete de cette année a continué son chemin un peu plus à l'orient à l'égard des étoiles par où passa celle de 1707.

Il paroît donc que ces deux cometes sont venues des parties australes du ciel, & ont continué leur chemin vers les septentrionales ; qu'elles ont coupé l'écliptique dans le même signe du Zodiaque, à deux degrés près l'une de l'autre. La premiere suivit presque un cercle de latitude, & n'avoit que 4 degrés d'inclinaison à l'égard de l'écliptique ; la dernière en a une de 14 degrés environ, desorte que le cercle qu'elle a décrit a fait avec l'écliptique un angle de 76 degrés vers l'Orient.

Par les calculs dont les principes sont rapportés dans les Mémoires de 1707, le périégée de la comete de cette année-là se rencontre entre les constellations de la grue & celle de l'indien, qui est une partie du ciel qui n'est point visible sur notre horizon ; le périégée de la comete de cette année se rencontre, comme nous avons dit, proche de la constellation du phenix, qui est aussi un endroit du ciel qui n'est point visible dans notre climat. Ces deux endroits sont éloignés entr'eux de 30 degrés d'un grand cercle ; le périégée de la dernière étant plus méridional que celui de la premiere.

Par les calculs qui représentent assez bien les observations que nous fîmes de la comete de 1707, son mouvement apparent dans le périégée étoit de 10 degrés par jour ; & par des calculs semblables que nous avons faits à l'égard de la comete de cette année, son mouvement dans le périégée étoit de 20 degrés

degrés par jour, par conséquent le double plus vite que celui de l'autre.

Voilà en quoi les hypothèses de ces deux comètes conviennent, & en quoi elles sont différentes. Si l'on vouloit supposer que la comète de cette année est la même que celle de 1707, & qu'après 16 ans elle est retournée au même endroit du Ciel, ce que je n'oserois pourtant pas assurer, il ne seroit pas nécessaire de donner aucun mouvement au nœud, puisque l'une & l'autre a coupé l'écliptique au même endroit, à deux degrés près. Ces deux comètes ayant donc le même nœud, conviennent entr'elles dans ce principe, comme fait la même planète, quand après avoir fait une ou plusieurs révolutions, elle retourne au même endroit du Ciel. Mais ces deux comètes ne s'accordent pas si bien ensemble dans les autres principes; car elles n'ont pas eu la même inclinaison, ni le même mouvement à égale distance du périégée, ni la même situation du périégée; cependant on pourroit représenter la différente situation de leur périégée, en donnant à ce terme un mouvement qui seroit beaucoup plus petit que celui qu'on donne au périégée de la lune, pour représenter la diversité du mouvement qu'elle fait en différens temps, en différens endroits du Zodiaque.

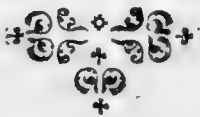
La variation de l'inclinaison qu'il faudroit donner à l'orbite de ces deux comètes, en supposant que c'est la même, n'est pas non plus sans exemple dans quelques planètes, aussi-bien que dans la lune: mais celle de la variation de l'excentricité qu'il faut supposer pour représenter la diversité des mouvemens que ces deux comètes ont eus dans le périégée est plus particulière, & n'a pas d'exemples aussi sensibles & aussi assurés dans les planètes que les variations précédentes.

Pour avoir une certitude plus grande, que la comète de cette année est la même que celle de 1707, il faudroit qu'elles eussent la même inclinaison à l'écliptique, le même mouvement à égale distance du périégée, & la même intersection dans le même degré du zodiaque. C'est principalement à ces marques que les anciens ont reconnu les planètes, & les ont

258 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
distinguées les unes des autres ; c'est aussi par ces principes
que feu M. Cassini conjectura que la comete de 1680 pou-
voit être la même qui avoit paru en 1577.

Quand deux différentes cometes n'ont pas la même incli-
naison , le même mouvement à l'égard du périée , & la
même intersection avec l'écliptique , mais seulement une de
ces choses , comme il arrive à l'égard des deux cometes de
cette année & de 1707 , il ne s'ensuit pas qu'elles ne puis-
sent pas être une même comete , parce que nous voyons
que la même planete varie aussi un peu dans son mouvement
& son nœud , quand elle retourne dans les mêmes parties du
Ciel ; ce que peut faire aussi la même comete , quand , après
un certain nombre d'années , elle retourne à se rendre visi-
ble. Mais dans ce cas on n'a pas de preuves suffisantes pour
dire qu'elle peut être une même comete.

Pour en avoir des conjectures plus assurées , il faudroit
avoir plusieurs observations des retours des cometes qui
eussent entr'elles quelques-unes des convenances que nous
avons remarquées ; pour lors on pourroit comparer les va-
riations qui seroient arrivées , soit au mouvement , soit au
nœud , soit à l'inclinaison. Si dans cette comparaison les va-
riations se font avec quelque regle dans les différens re-
tours , & qu'elles soient à peu-près proportionnelles aux in-
tervalles de temps dans lesquelles les cometes ont paru ,
pour lors il y auroit lieu de croire que ce sont les mêmes :
mais comme nous n'avons que depuis 150 ans des observa-
tions un peu exactes & circonstanciées des cometes , on n'en
a pas un assez grand nombre pour faire cette comparaison.



O B S E R V A T I O N DU PASSAGE DE MERCURE D A N S L E S O L E I L.

Du 9 Novembre 1723.

Par M. C A S S I N I.

IL y avoit long-temps que l'observation du passage de Mercure dans le Soleil, du 9 Novembre de cette année 1723 avoit été prédite. Dès l'année 1691, M. Halley, célèbre Astronome Anglois, l'avoit mise, dans les transactions philosophiques, au nombre de celles qui devoient paroître sur notre horizon.

13 Nov.
1723.

M. Manfredi en avoit déterminé les phases dans ses éphémérides, imprimées à Bologne en 1715. M. Delisle le jeune avoit donné à l'Académie le détail du calcul de cette observation, fondé sur les Tables de M. de la Hire. M. des Places l'avoit marquée dans son état du Ciel; & il y en a un Mémoire fort détaillé dans les Journaux de Trevoux du mois de Juillet de cette année. Ainsi les Astronomes étoient dans l'attente de cette observation, pour reconnoître les hypothèses qui s'y accorderoient le mieux.

Heureusement le Ciel a été serein, & il nous a réussi de faire cette observation avec des circonstances très-favorables, ayant vu l'entrée de Mercure dans le soleil, & ayant suivi cette planète jusqu'à son coucher avec le soleil.

Quoique Mercure fasse sa révolution autour du Soleil en 88 jours, & qu'il passe entre le soleil & la terre environ tous les quatre mois, il s'en faut bien qu'on puisse l'apercevoir dans toutes ses révolutions.

Cette planète, vue de la terre, peut s'éloigner de part & d'autre de l'écliptique de près de cinq degrés, & comme le

K k ij

demi-diametre du Soleil , dont le centre est toujours sur l'écliptique, n'est que de 15 à 16 minutes, il doit arriver le plus souvent que Mercure dans sa révolution passe dessus ou au dessous du soleil, où il est impossible de le distinguer à cause de la grande lumiere, qui l'environne. Souvent même ces éclipses arrivent sous notre horison ; principalement dans cette saison où le Soleil ne paroît que pendant un peu plus de la troisieme partie de sa révolution journaliere. Aussi dans l'espace de 26 ans, depuis le 3 Novembre de l'année 1697 jusqu'au 9 Novembre de cette année, il ne nous a pas réussi de faire aucune de ces sortes d'observations qui sont très-importantes pour déterminer les mouvemens de cette planète, sa figure, sa grandeur, & les principaux élémens de sa théorie.

La premiere observation de Mercure dans le soleil, dont on ait connoissance, fut faite le 7 Novembre de l'année 1631 par M. Gassendi. Comme il s'attendoit à le voir occuper un espace considérable sur le disque du soleil; il crut d'abord que c'étoit une tache: mais ayant remarqué que son mouvement étoit beaucoup plus vite que celui que l'on aperçoit dans les taches, il reconnut que c'étoit Mercure, qu'il continua d'observer jusqu'à sa sortie du disque du soleil.

Le second passage de Mercure dans le Soleil fut observé le 3 Novembre de l'année 1651 par Shakerlaus, Astronome Anglois, qui alla exprès à Surate pour y faire cette observation, qui devoit arriver de nuit en Europe.

La troisieme observation fut faite le 3 Mai de l'année 1661 à Londres par M^r. Huggens, Mercator & Streete, & à Dantzick par M. Hevelius.

La quatrieme arriva le 7 Novembre de l'année 1677. Elle fut faite à Avignon par M^{rs}. Gallet & de Beauchamp, & dans l'Isle de Sainte-Helene par M. Halley.

La cinquieme observation fut faite le 10 Novembre de l'année 1690 à Canton dans la Chine, par le P. Fontenay Jesuite.

Le sixieme passage de Mercure dans le soleil est arrivé le

3 Novembre de l'année 1697. Il fut observé à Paris par mon Pere & M. Maraldi. J'étois alors en Hollande, où je l'observai à Rotterdam.

Ainsi l'observation dont nous faisons le rapport, est la septieme qui ait été faite jusqu'à présent.

Je m'étois préparé à la faire avec une lunette de 8 pieds, qui avoit au foyer commun de ses verres quatre fils qui se coupoient à angle de 45 degrés. Cette lunette étoit placée sur une machine parallactique pour suivre aisément le mouvement journalier du soleil & de Mercure. J'avois aussi dressé une lunette de 16 pieds, afin de pouvoir distinguer plus facilement Mercure, que nous sçavions devoir paroître fort petit.

A 2^h 50' 52" j'apperçûs avec la lunette de 16 pieds, sur le bord oriental du Soleil, Mercure qui y formoit une petite échancrure.

A 2^h 51' 48" Mercure étoit entierement entré, & son bord oriental rasoit celui du Soleil.

A 2^h 53' 6" Mercure étoit éloigné du bord oriental du soleil exactement de la grandeur de son diametre, qu'il avoit par conséquent parcouru dans l'espace d'une minute 18 secondes, d'où l'on a conclu son entrée dans le soleil à 2^h 50' 30", 22 secondes auparavant qu'on l'ait apperçû.

Il paroissoit fort noir, de figure exactement ronde, sans aucune nébulosité qui l'environnât, comme on l'avoit soupçonné en 1697, ce que l'on continua d'observer jusqu'à la fin.

Pour déterminer son cours dans le soleil, je le plaçai dans la lunette de 8 pieds, de maniere que par son mouvement journalier il parcourût exactement un des fils, & j'observai son passage par le centre & celui des bords du soleil par les fils horaires & les obliques. Dans d'autres observations le bord du soleil parcouroit un des fils, & je remarquois le passage du soleil par le fil horaire, & celui de Mercure par le fil horaire & les obliques.

La premiere de ces méthodes, qui consiste à faire passer Mercure par le centre, & les bords du soleil par le fil oblique.

& les horaires, a cet avantage, lorsque cette planete est proche du parallele du centre du Soleil, qu'on a par ce moyen sa situation au temps de son passage sans aucune réduction sensible ; au lieu que par la méthode ordinaire, on a à la vérité exactement la situation de la planete par rapport au cercle horaire au temps de son passage par ce cercle : mais à l'égard de la distance au parallele, qui se mesure par le passage entre les fils obliques, il faut avoir égard au mouvement de Mercure dans l'intervalle de ce passage qui est sensible dans l'espace de quelques minutes.

On a aussi par cette méthode la situation de la planete dans le disque du soleil par l'intersection de trois fils, sçavoir le fil horaire & les deux obliques, ce qui donne le moyen de reconnoître les observations les plus exactes, lorsque l'intersection est dans un même point.

Fig. 1. Pour faire usage de cette méthode, il faut circonscrire au cercle qui représente le disque du Soleil, un quarré $ABED$, & tirer à l'un des côtés AB le diametre prrallele FG , on divisera les arcs FX , FI , qui sont chacun de 90 degrés en deux parties égales aux points L & M , d'où l'on menera les tangentes MN , LN , qui couperont le diametre FG prolongé en N . On divisera les côtés AB , DE , en autant de parties que le diametre du soleil a employé de secondes à passer par le fil horaire. On prendra de A vers B , comme en O , & de D vers E , comme en P , la différence entre le passage de Mercure & du bord occidental du soleil par le fil horaire, & l'on menera OP . On prendra aussi la différence entre le passage de Mercure & du bord du soleil par le fil oblique supérieur qu'on portera de N vers G , comme en R , & l'on menera QH parallele à NV . On prendra enfin la différence entre le passage de Mercure & du bord occidental du Soleil par le fil oblique inférieur qu'on portera de N vers G , comme en S , & l'ontirera SV parallele à NM . Les trois lignes OP , QH , SV , doivent se couper au point T qui marque la situation de Mercure au temps de son passage par le centre de la lunette.

La raison de cette opération est que Mercure étant placé au point T dans le disque du soleil, la ligne TV représente le fil oblique supérieur, lorsqu'il passe par le centre de la lunette, & la ligne TQ le fil oblique inférieur. D'où il résulte que cette planète parcourant la ligne XT parallèle à FG , l'intervalle entre son passage par le centre & celui du bord par le fil oblique supérieur, doit être mesuré par TY égal à VR , & la différence entre ce passage & celui du bord par le fil oblique inférieur, doit être mesurée par TX égale à NS .

On peut aussi, pour une plus grande facilité, prendre la différence en secondes entre le passage de Mercure par le centre, & celui des bords par les obliques, qui est mesuré par RS , dont la moitié RZ , est égale à la distance TZ de Mercure au fil horizontal FG ; car dans les triangles TZR , TZS , rectangles en Z , les angles TRZ , TSZ , sont égaux à l'angle XTR de 45 degrés que le fil horizontal TX fait avec le fil oblique TQ . Les angles RTZ , STZ , sont donc chacun de 45 degrés, & par conséquent TZ est égal à RZ ou SZ , c'est-à-dire à la moitié de RS .

Voici la première observation qui a été faite du passage du soleil & de Mercure par les fils de la lunette.

- A 2^h 55' 15" le premier bord au fil horaire.
- 2 57 28 Mercure au centre.
- 2 57 31 le second bord au fil horaire.
- 57 55 le second bord au fil oblique inférieur.
- 58 1 le second bord au fil oblique supérieur.

Le passage du soleil par le fil horaire, dans cette observation, est de 2' 16", qui converties en minutes de degré, sont 34 minutes du parallèle que le Soleil décrit, & qui étant réduites en degrés d'un grand cercle, sont 32' 32" $\frac{1}{2}$. La différence entre le passage de Mercure & du second bord du soleil par le fil horaire est de 3 secondes d'heure, ou de 45 secondes de degré, qui étant retranchés du demi-diamètre du soleil sur le parallèle qui a été observé de 17 minutes,

donne la différence d'ascension droite entre le centre du soleil & Mercure de $16^{\circ} 15''$ vers l'occident, qui étant ajoutées à l'ascension droite du soleil au temps du passage de Mercure par le centre qui étoit de $224^{\text{d}} 12' 16''$, donne l'ascension droite de cette planete à $2^{\text{h}} 57' 28''$ de $224^{\text{d}} 28' 31''$.

La différence entre le passage du bord oriental du soleil par les fils obliques est de 6 secondes, dont la moitié 3 secondes d'heure ou 45 secondes est la distance de Mercure au parallele du soleil vers le midi, à cause que le bord inférieur du soleil a passé le premier. Réduisant cette distance mesurée sur un parallele en secondes d'un grand cercle, on aura 43 secondes trois tierces, qui étant ajoutées à la déclinaison du soleil, qui étoit alors de $16^{\circ} 51' 10''$, donne la déclinaison de Mercure de $16^{\circ} 51' 53''$. L'ascension droite de cette planete ayant été déterminée pour le temps de cette observation, de $224^{\text{d}} 28' 31''$, on trouvera la longitude de $7^{\circ} 16' 55' 55''$, dont retranchant la longitude du soleil de $7^{\circ} 16' 40' 48''$, reste de la distance de Mercure au soleil en longitude de $15' 7''$ vers l'Orient. On calculera aussi la latitude de Mercure, qu'on trouvera de $3' 44''$ vers le Septentrion.

Nous ne rapporterons pas ici le détail de toutes les observations suivantes. Il suffira de remarquer qu'à $3^{\text{h}} 13' 33''$ la différence entre le passage du bord oriental du soleil & de Mercure par le fil horaire étoit de 9 secondes, & que ce bord passa dans le même instant par le fil oblique supérieur & par l'inférieur, ce qui montre que la déclinaison de cette planete étoit la même que celle du soleil qui étoit alors de $16^{\circ} 51' 24''$. Convertissant les 9 secondes d'heure en minutes d'un degré, on aura $2' 15''$, qui étant retranchées de 17 minutes donne $14' 45''$, différence entre l'ascension droite du soleil & celle de Mercure, qu'il faut ajouter à l'ascension droite du soleil qui étoit alors de $224^{\text{d}} 12' 56''$ pour avoir celle de Mercure de $224^{\text{d}} 27' 41''$. L'ascension droite & la déclinaison de cette planete étant ainsi connues, on aura sa longitude de $7^{\circ} 16' 55' 1''$, dont retranchant celle du soleil, qui étoit alors de $7^{\circ} 16' 41' 29''$, reste la distance de Mercure

au

au soleil en longitude à $3^h 13' 33''$ de $13' 32''$, on l'avoit trouvée à $2^h 57' 28''$ de $15' 7''$; le mouvement de Mercure en longitude à l'égard du centre du soleil a donc été dans l'espace de 16 minutes 5 secondes de $1' 35''$, ce qui est à raison de $5' 54''$ par heure. On calculera aussi la latitude septentrionale de Mercure au temps de cette observation de $3' 58''$, plus grande de $14''$ que par la première observation, ce qui donne le mouvement horaire apparent de cette planète en latitude de $52'' 15'''$.

Comme l'intervalle entre cette observation & la première est trop petit pour pouvoir en déduire le mouvement de Mercure avec quelque exactitude, nous avons employé la pénultième observation, qui a été faite avec toute l'exactitude possible, & que nous avons préférée à la dernière, à cause que le soleil étoit alors dans les vapeurs où ses bords paroissent mal terminés.

Le passage de Mercure par le centre de la lunette y fut observé à $4^h 21' 52''$, l'intervalle entre son passage & celui du bord oriental du soleil par le fil horaire étoit de 35 secondes, & l'intervalle entre le passage de ce bord par les obliques de 26 secondes; d'où l'on a tiré la distance en longitude de Mercure au centre du soleil de $6' 41'' \frac{1}{2}$, plus petite de $8' 25'' \frac{1}{2}$ que dans la première observation, & sa latitude de $5' 14''$, plus grande de $1' 30''$ que dans cette observation.

L'intervalle entre ces deux observations est de $1^h 24' 24''$: c'est pourquoi l'on fera comme $1^h 24' 24''$ est à une heure, ainsi $8' 25'' \frac{1}{2}$ sont au mouvement horaire de Mercure à l'égard du soleil qu'on trouvera de $6' 0'' \frac{1}{2}$.

On fera aussi comme $8' 25'' \frac{1}{2}$ sont à la distance de Mercure au centre du soleil dans la pénultième observation qui est de $6' 41'' \frac{1}{2}$; ainsi $1^h 24' 24''$ sont à $1^h 7' 4''$, qui étant ajoutées à $4^h 21' 52''$, donne le temps de la conjonction de Mercure à $5^h 28' 56''$. On fera de même comme $8' 25''$ sont à $6' 41'' \frac{1}{2}$, ainsi $1' 30''$, différence en latitude entre les deux observations, sont à $1' 11'' 32'''$,

qui étant ajoutés à $5^{\circ} 14''$, latitude de Mercure au temps de la dernière observation, donne sa latitude au temps de sa conjonction avec le soleil de $6^{\circ} 25' 32''$. On fera enfin comme le sinus de $8^{\circ} 25' \frac{1}{2}$ est à la tangente de $1^{\circ} 30''$; ainsi le sinus total est à la tangente de $10^{\circ} 5' 46''$ qui mesure l'obliquité de la route de Mercure à l'égard de l'écliptique.

Cette obliquité étant connue, on trouvera la latitude septentrionale de Mercure au temps de son passage par le milieu du soleil, de $6^{\circ} 19' 36''$, & la différence entre le lieu de Mercure au temps de sa conjonction, & son lieu au temps de son passage par le centre du soleil, de 1 minute 6 secondes 32 tierces de degré, qui, converties en temps, supposant le mouvement horaire de Mercure de $6' 0''$, font $11' 5''$, qui étant retranchés du temps de la conjonction qui a été déterminé à $5^h 28' 56''$, donne le temps du passage de Mercure par le milieu de son cours dans le disque du soleil à $5^h 17' 51''$. On a déterminé son entrée à $5^h 50' 30''$, la différence est $2^h 27' 21''$ dont le double $4^h 54' 42''$, mesure le temps que Mercure a dû employer à passer par le disque du soleil.

Pour déterminer la situation du nœud de Mercure, nous avons employé une observation du passage de cette planète dans le disque du soleil, faite à Paris le 3 Novembre 1697, dans laquelle la conjonction arriva à $5^h 58'$ du matin, la longitude de Mercure, vûe du soleil, étant de $1^s 11^d 33' 50''$, & sa latitude de $10' 42''$ vers le midi, contraire à celle que l'on a observée le 9 Novembre de cette année, où la conjonction est arrivée à $5^h 29'$, la longitude de Mercure étant de $1^s 16^h 47' 10''$, & sa latitude de $6' 25' \frac{1}{2}$ septentrionale.

Fig. 2.

Pour représenter ces observations, soient les cercles *HILM*, *OPRS* qui représentent le soleil, dont les centres *D* & *C* sont éloignés l'un de l'autre de l'intervalle *CD* qui mesure sur l'écliptique la différence entre le vrai lieu de Mercure dans ces deux observations, qui est de $5^d 13'$.

20". Ayant tiré les diamètres *IM*, *PS* perpendiculaires à *DC*, soit pris *CE* de 10' 42" vers le midi égal à la latitude méridionale de Mercure, vûe de la terre dans la premiere observation, & *DB* ou *CA* de 6' 25" $\frac{1}{2}$ vers le septentrion égal à la latitude septentrionale de Mercure dans cette dernière observation, soit mené *AB*, parallele à *DC* & *BE* qui coupe *DC* au point *N*. Il est clair que l'interseccion *N* de ces deux lignes marque le vrai lieu du nœud de Mercure, supposé qu'il n'ait eu aucun mouvement sensible dans l'intervalle entre les deux observations. Car *CE*, latitude de Mercure, vûe de la terre dans la premiere observation est à *DB*, latitude de cette planete dans l'observation de cette année, comme la vraie latitude de Mercure, vûe du soleil dans la premiere observation, est à sa vraie latitude dans l'observation de cette année; mais les latitudes des planetes sont entr'elles comme les sinus de leurs distances à leur nœud. Donc *CE* est à *BD*, comme le sinus de *CN* au sinus de *DN*, & *CE* plus *DB* ou *AE*, somme des deux latitudes qui est de 17' 7" $\frac{1}{2}$, est à *CE* 10' 42", comme le sinus de *DN*, plus *NC* ou *DC* de 5^d 13' 20", est au sinus de *CN*, qu'on trouvera de 3^d 15' 41", & qui étant ajouté au vrai lieu de Mercure dans la premiere observation qui étoit de 1^s 11^d 33' 50", donne la longitude du point *N* de 1^s 14^d 49' 31" qui est le lieu du nœud de Mercure supposé fixe.

Pour déterminer le temps auquel le nœud de Mercure supposé mobile est arrivé au point *N*, on fera comme *BA* ou *DC*, de 5^d 13' 20" est à *CN*, qui a été trouvé de 3^d 15' 41", ainsi 26 ans & 6 jours, temps que le nœud a employé à se mouvoir entre les deux observations, est à 16 années & 99 jours, qui étant ajoutés au 3 Novembre de l'année 1697, donne le 10 Février de l'année 1714 pour le temps que le nœud de Mercure est arrivé au point *N*, sa longitude étant de 1^s 14^d 49' 31".

Pour rendre raison de cette opération, soit *CV*, la latitude véritable de Mercure au temps de la premiere observation, & *DT*, cette latitude au temps de la seconde observation,

soient faits les angles CVG , DTF , égaux au complément de l'inclinaison véritable de Mercure, en sorte que les angles CGV , DFT , mesurent l'inclinaison véritable de cette orbite. VG représentera la distance de Mercure à son nœud au temps de la première observation, TF cette distance au temps de la seconde observation, & GF le mouvement de ces nœuds pendant l'intervalle entre les deux observations.

Dans les triangles VNG , TNF , les angles VNG , TNF sont égaux de même que les angles GVN , FTN , différence entre les angles égaux CVN , DTN & CVG , DTF ; c'est pourquoi l'on aura GN , mouvement du nœud, depuis la première observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé en N , est à NF , mouvement du nœud depuis cette intersection jusqu'à la seconde observation, comme VN est à TN , & composant GF est à GN , comme TV est à VN , comme TQ ou CD est à CG ; mais GF est à GN comme le temps que le nœud a employé à se mouvoir de G vers F dans l'intervalle, entre les deux observations est au temps que ce nœud a employé à parcourir l'arc GN depuis la première observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point N . Donc CD est à CN comme le temps que le nœud a employé à se mouvoir entre les deux observations est au temps que le nœud a employé à parcourir l'arc GN , depuis la première observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point N . Ajoutant ce temps à celui de la première observation, on aura le temps que le nœud de Mercure est arrivé au point N . Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer le mouvement du nœud de Mercure, on comparera de la même manière l'observation du 3 Novembre 1697, avec celle du 7 Novembre 1677, dans laquelle la longitude de Mercure étoit de $1^{\circ} 15^d 43' 3''$, & sa latitude de $4' 40''$ septentrionale, de dénomination contraire à celle que Mercure avoit le 3 Novembre 1697, & l'on trouvera que le lieu du nœud étoit le 4 Decembre 1683 de $1^{\circ} 14^d 27' 26''$; on l'a trouvé le 10 Février 1714.

de $1^{\text{h}} 14^{\text{d}} 49' 31''$; le mouvement du nœud a donc été de $22' 5''$ en 30 années 68 jours, ce qui est à raison de 44 secondes par année, & de $7' 23''$ pour 9 années 272 jours, intervalle entre le 10 Février 1710 & le 9 Novembre 1723. Ajoutant ces 7 minutes $23''$ au lieu du nœud du 10 Février 1710 qui a été trouvé de $1^{\text{h}} 14^{\text{d}} 49' 31''$, on aura le lieu du nœud le 9 Novembre 1723 de $1^{\text{h}} 14^{\text{d}} 56' 54''$.

Voilà ce qui résulte du calcul de la première & pénultième observation.

Pour employer toutes les autres qui ont été faites depuis l'entrée de Mercure dans le soleil jusqu'à ce que l'on a cessé de le voir, on a décrit une figure qui représente le disque du soleil, dans laquelle on a placé le lieu de Mercure, suivant toutes les observations qui en ont été faites, de la manière qui a été enseignée ci-dessus, ayant égard à l'effet de la réfraction dans ces différentes observations. On a tiré ensuite par le plus grand nombre des lieux qui ont été ainsi déterminés, une ligne droite qui représente la route que Mercure a décrite dans le soleil. Cette ligne occupe dans le soleil 30 minutes 10 secondes, dont le diamètre du soleil est de 32 minutes 32 secondes. La portion de cette route que Mercure a décrite depuis l'entrée de son centre dans le soleil, qui est arrivée à $2^{\text{h}} 51' 10''$ jusqu'à $4^{\text{h}} 26' 52''$, temps de la pénultième observation, est de $9' 10''$, ce qui donne le mouvement horaire de Mercure à l'égard du soleil, vu de la terre de $6' 4''$, assez conforme à celui que l'on a déterminé ci-dessus de $6' 0''$.

Le mouvement horaire apparent de Mercure étant de $6' 4''$, & la route que Mercure a décrite dans le soleil de $30' 10''$, on déterminera le temps que Mercure a employé à passer par le soleil, de $4^{\text{h}} 58' 38''$, dont la moitié $2^{\text{h}} 29' 19''$ étant ajoutée à $2^{\text{h}} 51' 10''$, temps de l'entrée de son centre dans le soleil, donne son passage par le milieu du soleil à $5^{\text{h}} 20' 19''$, ce qui s'éloigne peu du calcul de M. Halley, qui donne le temps de son passage à $5^{\text{h}} 26' 0''$.

Ayant tracé dans la figure du soleil l'écliptique par rapport au parallele dont elle déclinait dans le temps de l'observation, de $10^d 34'$, on trouve que la route de Mercure décline de l'écliptique de 8 degrés & un quart vers le septentrion, ce qui diffère d'un degré 50 minutes de celle que l'on avoit déterminée par le calcul, & qui provient, selon les apparences, de ce que dans les dernières observations le soleil étant près de l'horison, la différente réfraction des bords du soleil doit avoir fait varier la situation véritable de Mercure par rapport à l'écliptique. Cette obliquité apparente de la route de Mercure s'accorde assez exactement à celle qui résulte des tables de M. de la Hire de $8^d 12' 53''$.

A l'égard de la latitude, on la trouve de $6' 0''$, plus petite de 25 secondes que par la première comparaison, ce qui peut provenir de la même cause que nous avons expliquée ci-dessus.

Suivant cette latitude on trouvera par la méthode expliquée ci-dessus le mouvement annuel du nœud de Mercure de 54 secondes, & le lieu de son nœud de $1^s 15^1 3' 12''$, plus avancé de $6' 18''$ que par la précédente détermination. On peut aussi par cette observation déterminer immédiatement le lieu du nœud de Mercure; car l'obliquité apparente de la route de Mercure étant connue de $8^d 12' 53''$, & sa latitude au temps de la conjonction de $6' 0''$, on aura la distance apparente de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction de $42' 0''$.

Le mouvement véritable de Mercure, vu du soleil, est de $15' 17''$, dont retranchant le mouvement vrai du soleil, qui est de $2' 31''$, reste le vrai mouvement de Mercure à l'égard du soleil de $12' 46''$; c'est pourquoi l'on fera comme $6' 4''$ mouvement de Mercure, vu de la terre, sont à $12' 46''$; ainsi $42' 0''$, distance apparente de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction avec le soleil, sont à $1^d 28' 26''$, distance véritable de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction. Les retranchant du vrai lieu de Mercure, vu du soleil dans sa conjonction, qui est de $1^s 16^d 47' 10''$,

on aura le vrai lieu du nœud de Mercure de $1^{\text{s}} 15^{\text{h}} 18' 44''$, plus avancé de $15' 32''$ que par le calcul précédent.

On déterminera aussi par le moyen de l'obliquité apparente de la route de Mercure & de sa latitude, la distance du milieu de sa route dans le soleil, au lieu de sa conjonction de 51 secondes & demie de degré, qui converties en heure, sont $8' 31''$, qui étant ajoutées à $5^{\text{h}} 20' 19''$, passage de Mercure par le milieu de sa route dans le soleil, donne le temps de sa conjonction à $5^{\text{h}} 28' 50''$, qui ne diffère que de 6 secondes du calcul précédent.

On peut aussi par le moyen de cette observation déterminer assez exactement la grandeur véritable de Mercure ; car le temps que cette planète a employé à s'éloigner du bord du soleil, de la grandeur de son diamètre, ayant été observé de $1' 18''$, on fera comme le temps que Mercure a employé à parcourir le soleil est au temps qu'il a employé à parcourir son diamètre : ainsi les minutes & secondes comprises dans la route de Mercure, sont à la portion de cette route qui a été parcourue par son diamètre apparent, qu'on trouvera de 7 secondes 53 tierces, & qui représenteroient le diamètre de Mercure, vû de la terre, s'il avoit passé par le centre du soleil. C'est pourquoi il faut le réduire, en faisant comme le diamètre du soleil qui est de $32' 32''$ est à la route de Mercure de $30' 10''$, ainsi 7 secondes 53 tierces sont au diamètre de Mercure, vû du soleil, qu'on trouvera de 7 secondes 20 tierces. Dans l'observation faite en 1697, mon pere l'avoit déterminé de 8 secondes, ce qui est à peu-près de la même quantité.

Le mouvement horaire apparent de Mercure, étant de $6' 4''$, & son mouvement vrai, vû du soleil, de $12' 46''$, la distance de Mercure à la terre est à sa distance au soleil dans la proportion réciproque de ces différens mouvemens, c'est-à-dire, comme 678 à 322 ; on aura donc la distance de Mercure à la terre à la distance de la terre au soleil comme 678 à 1000 ; ainsi le diamètre de Mercure ou de la terre, qui est de 7 secondes 20 tierces, ne paroîtroit,

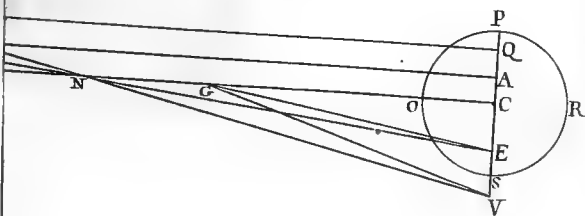
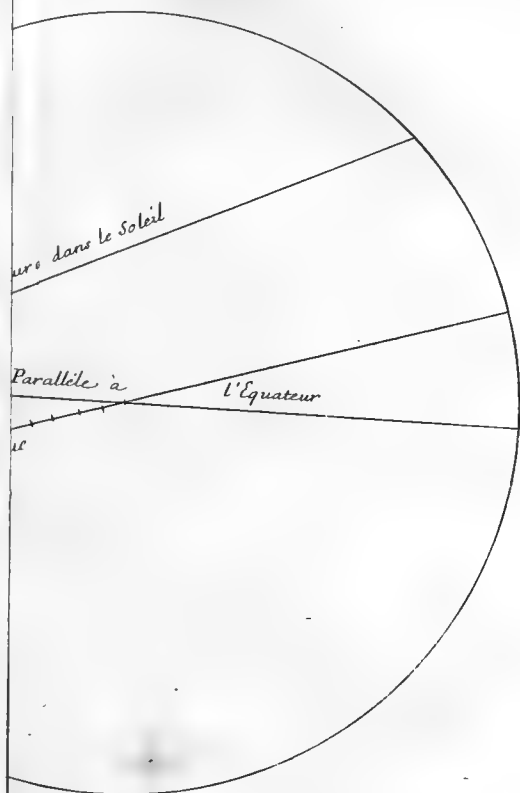
s'il étoit vû à la distance du soleil, que de 5 secondes; négligeant les tierces, au lieu que le diametre de la terre, vû du soleil, à la même distance, est de 20 secondes, qui est le double de sa parallaxe; la proportion du diametre de Mercure à celui de la terre est donc comme 5 secondes à 20 secondes, sa surface comme 1 à 16, & sa solidité comme 1 à 64; c'est-à-dire, que la grandeur de la planete de Mercure égale à peu-près, ou est même plus petite que la grandeur de la lune.

Nous avons aussi essayé de déterminer la parallaxe de Mercure, & nous avons trouvé, par les observations qui ont été faites le plus exactement, que le mouvement de cette planete étoit plus vite vers la fin que vers le commencement; ce qui s'accorde à la parallaxe qui abaisse les objets à mesure qu'ils s'approchent de l'horison: mais comme dans les dernières observations les vapeurs altéroient les bords du soleil, & empêchoient de le voir bien terminé, nous n'avons pas cru en pouvoir déduire aucune détermination exacte.

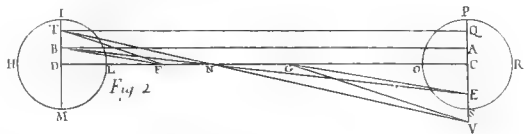
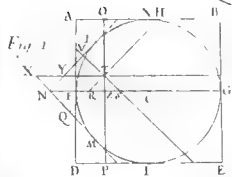
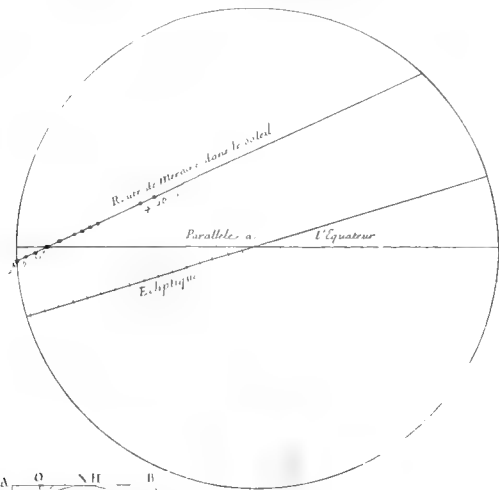
Outre les avantages que l'on peut retirer de cette observation pour la théorie de Mercure, on a encore celui de pouvoir s'en servir pour déterminer la longitude ou la différence des méridiens entre tous les lieux où son passage par le soleil aura été observé, de la même maniere qu'on le pratique dans les éclipses de lune & des satellites de Jupiter.

Ceux qui sont placés sur notre parallele vers l'Occident auront observé plus long-temps Mercure dans le soleil qu'à Paris, & on aura vû sa sortie du disque de même que son entrée dans les Indes occidentales.





Passage de Mercure dans le Soleil le 9. Novembre 1723



SUR LA RONDEUR QUE SEMBLENT
affecter certaines especes de pierres , & entr'autres
sur celle qu'affected les cailloux.

Par M. DE REAUMUR.

DIFFERENTES especes de pierres semblent déterminées par leur nature à prendre certaines figures; les crysiaux, les diamants, sont ordinairement formés avec un nombre constant de pans ou de facettes. Souvent ces facettes sont si polies, & jointes les unes avec les autres par des arrêtes si vives, qu'on a peine de croire qu'elles soient le simple ouvrage de la nature. D'autres pierres sont cubiques; d'autres sont des parallépipèdes, dont les côtés sont inclinés sur leur base; tels sont ces especes de talcs qu'on appelle *crysiaux d'Islande*. Les différentes especes de Gyps pourroient seules nous fournir plusieurs exemples de pierres qui ont constamment des figures très-particulières. Ces figures qu'affected certaines especes de pierres, comme celles qu'affected divers sels, & quantité de minéraux, sont au rang des phénomènes remarquables, & de ceux qui embarrassent les physiciens; on peut même être arrêté par des figures moins singulieres, au moins l'ai-je été par celles de certaines pierres qui n'ont de particulier qu'une sorte de rondeur, qu'on peut principalement observer dans les différentes especes de cailloux. J'ai donné un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720. sur leur nature & leur formation, où je me suis contenté de faire remarquer qu'ils sont ordinairement arrondis: mais je n'y ai point expliqué pourquoi ils le sont; je n'aurois pû alors avancer que des conjectures trop légères, qu'une explication qui n'eût pas été fondée sur des observations assez immédiates. Comme je crois en avoir fait de telles depuis, je tâcherai à présent de rendre raison de ce petit phénomène:

Mem. 1723.

M m

21 Juillet
1623.

peut-être ne paroîtra-t-il pas assez important, pour que j'eusse dû si peu ofer dans mon précédent Mémoire, ou pour que je dusse y revenir dans celui-ci. Après tout quand on ne donne que de simples conjectures, la physique y gagne rarement, & des explications claires & certaines des moindres phénomènes sont toujours des pas faits, qui souvent nous mettent en route pour aller plus loin; on verra même par la suite de ce Mémoire, que ce que je n'avois eu en vûe que par rapport aux cailloux, s'étend à un grand nombre d'autres especes de pierres.

La rondeur dont je veux parler, celle que les cailloux ont assez ordinairement, n'est pas une rondeur bien parfaite; on en trouve à la vérité de ronds comme des boules; d'autres ressemblent à des boules applaties; d'autres à des boules allongées; d'autres approchent plus de la figure cylindrique: mais on en rencontre d'une infinité d'autres figures qui ne laissent pas d'avoir l'espece de rondeur dont il s'agit actuellement; elle se réduit, comme je l'ai fait observer dans le Mémoire cité ci-dessus, à ce que ces pierres n'ont ordinairement aucun angle aigu, à ce que leurs angles sont abbatu comme le seroient ceux de toute pierre qui auroit roulé long-temps; un caillou aura quelquefois différentes branches, ou quantité de parties qui sortiront d'une tige commune, mais le contour de la coupe transversale de chacune de ces parties est toujours une courbe, on n'y apperçoit point de lignes droites.

Avant de chercher pourquoi cette sorte d'arrondissement est ordinaire aux cailloux & à certaines especes d'autres pierres, il nous faut reprendre quelques propositions de notre Mémoire sur la formation des cailloux. J'y ai défini le suc pierreux, le suc lapidifique. J'y ai dit qu'il n'étoit qu'une eau chargée d'un sable prodigieusement fin, d'un sable broyé à un point où l'art auroit peine à aller; que ce sable réduit ainsi en parties fines, étoit assez large pour se soutenir dans l'eau. Quand l'eau dépose quelque part cette matiere fine, que les parties déposées sont collées les unes contre les au-

tres, sans mélange de terre, de sable grossier, de cet amas de parties se forment des pierres crySTALLINES, telles que les crySTaux, ou d'autres pierres transparentes, comme celles qui pendent aux voûtes des grottes souterraines; aussi peut-on appeller cette même matiere, *matiere crySTALLINE*. Quand elle est déposée entre des grains de sable ou de gravier, qu'elle réunit en une masse, elle forme des grès. Quand elle est déposée entre des molécules de terre, elle forme des pierres communes, telles que nos pierres à bâtir. Enfin la combinaison des matieres, entre lesquelles est déposée cette matiere crySTALLINE, ce sable fin, peut varier les genres de pierres aussi prodigieusement qu'elles le sont. Mais lorsque ce suc pierreux, ce suc lapidifique, après avoir formé des pierres spongieuses, continue de les pénétrer, & y dépose de nouveau, il les change en des pierres d'un autre genre; il en fait des cailloux: desorte que les cailloux sont souvent des pierres petrifiées. Des terres pures & très-compactes, comme les glaises, peuvent immédiatement se changer en cailloux, si elles sont suffisamment abreuvées de suc crySTALLIN. Trois especes d'ouvrages de l'art m'ont paru propres à donner l'idée nette qu'on doit se faire des trois principaux genres de pierres, le verre, la poterie commune & la porcelaine. Les crySTaux ressemblent au verre; la poterie, aux pierres communes, & la porcelaine aux cailloux; je veux dire que comme ces trois différentes productions de l'art different par la quantité de matiere vitrifiée, de même nos trois genres de pierres different par la quantité de matiere crySTALLINE. C'est ce que j'ai tâché d'établir dans le Mémoire que je rapporte. Mais pour celui-ci, il faut sur-tout se souvenir que le suc pierreux produit des pierres de différente nature, selon qu'il est déposé entre des matieres de différentes qualités.

Cela supposé, ce qu'il s'agit d'examiner actuellement c'est si nos cailloux ont dès leur premiere formation la rondeur que nous leur voyons, ou s'ils l'ont acquise depuis qu'ils ont été formés. On rendroit commodément raison de leur figure, si on pouvoit avoir preuve qu'ils ont été tous roulés pendant

de longues suites de siècles comme le peuvent avoir été ceux qu'on rencontre sur les bords des rivières, ou sur les bords de la mer : mais quels que soient les bouleversemens qu'on sçait être arrivés à la terre, il n'est pas probable qu'ils aient pu suffire pour façonner tous nos cailloux. Quelque part qu'on en rencontre, quoique ce soit dans les plus profondes minieres, au milieu des bancs de pierre commune les plus épais, on les trouve toujours arrondis, au lieu qu'on trouve dans des roches bien moins épaisses les cristaux avec leurs angles aigus & vifs. Il faudroit donc qu'il ne se fût point formé de cailloux depuis ces grands bouleversemens, pendant lesquels ils auroient été assez roulés pour être arrondis, & que tous les cristaux eussent été formés depuis. Rien ne seroit avancé plus gratuitement, & il n'est rien de moins vraisemblable.

On est donc forcé de reconnoître que les cailloux, au moins en grande partie, ont eu leur rondeur dès leur première formation. On donneroit une cause assez probable de cette figure, si on pouvoit admettre qu'ils doivent leur origine au suc qui s'est réuni contre les voûtes des grottes souterraines. Les congélations pierreuses qui y sont suspendues, ont toutes une sorte de rondeur qui approche tantôt de celles des demi-boules, tantôt de celles des tuyaux d'orgue. Mais ces sortes de congélations prennent communément des figures plus allongées que ne sont celles des cailloux. Les couches dont elles sont composées se peuvent distinguer à la vûe simple, qui ne peut nous en faire voir de pareilles dans les cailloux. Quand la figure de ces congélations tient de la sphérique, elles ont ordinairement peu de diamètre, au lieu qu'on rencontre de gros cailloux faits en boule. Ces congélations sont souvent des tuyaux creux & vuides, ce qu'on n'observe point encore dans les cailloux. Enfin ce que nous avons établi sur la formation des cailloux s'accommoderoit mal avec cette explication ; alors ils seroient des cristaux, ils ne seroient point des cailloux. Le caillou n'est pas seulement de la matiere cristalline réunie, il est fait de la

matiere cryftalline qui a pénétré des pierres fpongieufes , ou qui a lié des molécules de terre compacte. D'ailleurs ou trouver les grottes , aux voûtes defquelles fe feroient formés ces lits prodigieux de cailloux qu'on rencontre difpofés les uns fur les autres dans les plus profondes carrieres, dans les mines de craie, dans les veines de fable? Et comment formeroit-on tant de lits étendus les uns fur les autres dans une même caverne? une feule voûte fuffiroit au plus à en faire un lit.

Si on y faisoit bien attention , je ne vois donc pas qu'on puiſſe fe dispenser de croire que les cailloux qui compoſent différens lits arrangés les uns fur les autres à de très-grandes profondeurs , n'aient été produits dans les places qu'ils occupent aujourd'hui , & avec les mêmes figures. J'avouerai cependant que ce n'eſt qu'après avoir bien cherché à combattre ce ſentiment que je m'y ſuis rendu. Mais une ſeule obſervation a levé toutes les difficultés que j'avois ſur la poſſibilité du fait , & me ſemble propre à prouver beaucoup plus que ſa poſſibilité.

Dès qu'au milieu même d'un banc de fable on trouve des maſſes de fable , qui ont plus de conſiſtance que le reſte , dont les grains ſont liés enſemble , qui toutes ont des figures arrondies comme les cailloux ; qu'on trouve même de ces maſſes de fable arrondies qui forment des lits au milieu de certains bancs de fable, comme les cailloux en forment dans d'autres , on ne ſera plus ſurpris que des cailloux aient pû avoir dès leur premiere origine des figures arrondies , ou au moins on ne regardera plus cette difficulté comme particulière aux cailloux. Qu'un ſuc pierreux acheve de lier ces maſſes de fable , qu'il les pétrifie, les voilà changées en pierres rondes. Qu'il ſ'y inſinue encore de nouveau ſuc , qu'il les pétrifie , pour ainſi dire , une ſeconde fois , les voilà changées en cailloux. Nous aurions donc alors des cailloux , avec la ſorte de rondeur qui leur eſt propre , formés au milieu de leur lit.

Il y a long-temps que j'ai obſervé de ces maſſes de fable, dont les grains commençoient à être liés enſemble , qui-

commençoient à prendre la solidité de la pierre. Mais un lit de sable qu'on a coupé depuis peu auprès de ma maison de Charenton, m'a donné occasion de voir une plus grande quantité de ces corps; je les nommerai des *marrons de sable*, comme les ouvriers appellent *marrons de glaïse*, les corps arrondis qu'ils rencontrent dans la glaïse. Ayant trouvé plusieurs de ces marrons dans le sable qui avoit été transporté, j'ai été en chercher dans le banc même d'où je sçavois qu'on tiroit ce sable. Là j'y en ai observé autant que j'ai voulu, de toutes formes, de toutes grandeurs, & pour ainsi dire de tout âge : mais tous avoient l'espece d'arondissement dont nous avons parlé jusqu'ici. Il y en avoit de ronds comme des boules, d'autres plus aplatis, d'autres oblongs, & d'autres de figures très-baroques, mais toujours ayant leurs angles abbatus.

Le banc de sable où je les ai rencontrés en si grande quantité, est un sable gras, c'est-à-dire, un sable mêlé avec de la terre; sa couleur est verdâtre; il est couvert d'un autre lit de sable beaucoup plus gros & plus sec, d'un sable avec lequel il n'y a point de terre mêlée, mais qui en récompense est rempli de cailloux de formes très-différentes, mais qui pourtant n'en avoient aucune à qui je n'en trouvasse de semblables dans les marrons de la veine du sable inférieur; en un mot, les marrons étoient aussi semblables aux cailloux du lit supérieur qu'il est possible de l'être.

Entre les marrons de sable, nous avons dit qu'il y en avoit de toutes sortes de grosseur. J'en ai observé de plus petits que des pois, d'autres plus gros que des œufs, & d'autres plus gros que la tête. Quelques-uns des plus petits ne sont encore qu'un sable assez mal lié, on les brise aisément. Si on en casse d'autres plus gros, on ne reconnoît la grainure & la couleur du sable que jusqu'à une certaine distance du centre, il semble ne former qu'une croûte. Celui de l'intérieur est caché par la matiere qui remplit la plus grande partie des intervalles que les grains laissent entre eux; en un mot, l'intérieur est pierre, & pierre d'une cou-

leur blanchâtre, & cela, parce que la couleur la plus ordinaire de la matiere crystalline est blanche. Enfin ayant observé un grand nombre de ces marrons, qui à l'extérieur ne sembloient qu'un amas de sable, j'en ai rencontré plusieurs dont l'intérieur étoit déjà converti en caillou.

Voilà des portions de sable dont les grains ont été liés ensemble, qui ont formé des marrons qui ne diffèrent du reste du sable que par plus de consistance; d'autres marrons sont devenus pierres intérieurement. Enfin l'intérieur de quelques autres a presque passé à l'état de caillou; tout cela sans doute, selon que plus de matiere pierreuse a été déposée dans les uns que dans les autres. Reste donc à expliquer pourquoi certaines portions de sable ont été réunies préférablement à tout le reste de la masse, & pourquoi ces portions ont communément une figure arrondie. Nous avons commencé par dire que cette matiere pierreuse, que cette matiere crystalline qui les a rassemblés, n'est qu'un sable fin au point de pouvoir se soutenir assez longtemps dans l'eau; concevons que l'eau qui a traversé une certaine épaisseur d'un banc de sable, est chargée de cette matiere, soit qu'elle l'ait prise dans les premières couches de ce banc, soit qu'elle l'ait apportée de plus loin. Plus l'eau sera chargée d'une grande quantité de cette matiere, plus elle sera prête à la laisser précipiter. Si elle la dépose également dans toute l'étendue d'un lit de sable, elle en liera en même temps tous les grains; & c'est ainsi que sont formés des bancs étendus & épais de pierres de grès. Mais dans notre cas, elle ne doit réunir que certaines portions du sable, & ce seront indubitablement celles où elle aura plus de facilité à déposer. Diverses circonstances y peuvent être favorables, qui toutes dépendent de ce principe général, que où l'eau aura moins de facilité à passer, & où elle séjournera davantage, là elle laissera plus de sédiment pierreux. L'eau traverse plus aisément une masse de sable qu'une masse de terre; la terre fait la fonction d'un filtre plus serré. De l'eau chargée de quelque matiere,

peut la conserver en passant au travers d'un tamis , & si on fait passer la même eau au travers d'un papier gris , elle laissera dessus la matiere qu'elle tenoit dissoute. Imaginons donc que certaines portions du sable de notre banc sont mêlées avec plus de terre que le reste , & il n'est guere possible que cela soit autrement ; les portions qui auront plus de terre , auront plus de disposition à arrêter la matiere pierreuse. La différente finesse du sable y peut aussi contribuer ; l'eau passera plus promptement , plus aisément au travers d'un banc de gravier , qu'au travers d'un banc de sable fin. Nous pouvons même concevoir un sable si fin , dont les grains laissent entre eux de si petits intervalles , que l'eau pour y passer soit obligée d'y passer seule. En un mot , certaines portions du lit de sable sont , par rapport aux autres , ce que le papier gris est par rapport au tamis.

Nous voyons donc pourquoi certaines portions de sable doivent être plutôt réunies que d'autres , former nos marrons , ou pour ainsi dire , des embrions de pierres & de cailloux. Nous ne pouvons plus être embarrassés que par leur rondeur : mais le principe que nous venons d'employer en fournit encore la raison ; l'eau dépose le plus où elle a le plus de peine à passer , & où elle séjourne davantage. Supposons que des grains de sable ont été liés , & qu'ils forment une espece de feuille , grande ou petite n'importe ; une espece de gâteau plat , tant par dessus que par dessous : bientôt par notre principe , ce gâteau va devenir convexe de l'un & de l'autre de ses côtés. L'eau , qui vient immédiatement au dessus de cette portion de sable , ou ne continuera pas sa route en ligne droite , ou la continuera plus difficilement que celle qui passe au travers du sable , dont les grains sont entièrement détachés. Je conçois même que la difficulté , le plus de résistance que cette eau trouve à passer au travers de notre sable lié , de notre marron commencé , sera cause qu'une partie de cette eau coulera sur sa surface , comme l'eau coule sur un corps solide ; elle descendra ensuite le long de ses bords extérieurs , & passera par dessous , où elle se joindra

joindra à celle qui a traversé notre marron. Par la résistance qu'une partie de cette eau a trouvée, par les détours qu'elle a suivis, il est visible qu'elle a plus séjourné sur cette masse de sable qu'elle n'eût fait si tous les grains eussent été détachés; par conséquent qu'elle y a déposé davantage. Mais les deux endroits où elle a séjourné le plus, sont environ le milieu de la surface supérieure & le milieu de la surface inférieure. C'est donc là où se doit précipiter le plus de sédiment; plus près des bords, il s'en doit moins précipiter: de sorte que si l'on fait attention aux rapports des quantités de sédiment qui est déposé, on verra que les surfaces supérieures & inférieures doivent, comme nous l'avons dit, prendre des figures convexes.

Si la matière, qui est ainsi déposée, restoit sans mélange, l'enveloppe de notre marron seroit de matière crySTALLINE; mais comme ce nouveau marron est environné de toutes parts de sable, la matière crySTALLINE lie ensemble de nouveaux grains, & cela dans la même proportion qu'elle se seroit elle-même accumulée. Cette mécanique simple est tout ce qu'il faut pour former des figures qui ayent l'espece de rondeur qu'ont nos cailloux & nos marrons; elle n'est pas propre à faire rien d'exactly rond, aussi ces corps ne le sont-ils pas. Il est aisé de déduire du même principe qu'ils n'auront pas d'angles aigus; si la première base en a eu, elle les perdra bientôt: l'eau qui coulera le long d'un angle aigu, coulera plus vite que celle qui coulera le long des deux côtés, dont la rencontre fait cet angle; elle y trouvera moins de parties contre lesquelles elle puisse frotter & s'attacher. Il est vrai qu'on rencontre des cailloux d'une rondeur assez régulière, de presque sphériques: mais si on fait attention combien leur nombre est petit, en comparaison de celui des pierres de cette espece qui ont d'autres figures, cette singularité n'aura plus rien de surprenant.

Tout le raisonnement que nous avons suivi jusqu'ici, conduit à penser que c'est surtout par-dessus & par-dessous que nos cailloux, nos marrons de sable doivent prendre de la

convexité ; je veux dire que ceux qui se trouvent minces , qui ont des formes de gâteaux peu renflés , ont dû être couchés horifontalement dans leur lit ; que de même ceux qui , quoique minces , font composés de différens branchages , ont été posés horifontalement. Mais comme notre raisonnement conduit à leur donner cette position , si on la leur trouve , il en est extrêmement fortifié : c'est ce qui m'a déterminé à fouiller dans les veines de sable où sont ces marrons , & à observer comment ils y étoient situés. Je les y trouvai dans la position où nous venons de conclurre qu'ils devoient être ; & cela si constamment , que j'ai été surpris de ne rencontrer point , ou presque point d'exception à cette regle ; quoique bien des circonstances y en eussent pû apporter.

On tirera comme une conséquence nécessaire de l'explication que nous venons de donner , que toutes les pierres formées de grains & les pierres qui ont eu pour premiere matiere une terre commune , doivent aussi avoir une figure arrondie. Les carrieres que l'on coupe journellement font des pierres trop grosses pour que nous puissions voir leur figure : mais les pierres de grès , les roches , s'accoutument parfaitement avec cette conséquence ; elles sont toutes arrondies à la maniere des cailloux. Qu'on prenne garde à celles qui s'élevent sur la surface de la terre , on leur trouvera une pareille figure. Les lits de terre ou de sable dans lesquels ces dernieres pierres ont été produites , ont été emportés par la suite des temps , elles restent au-dessus du terrain qui leur a servi de base , telles qu'elles ont été faites.

Avant de finir ce Memoire , reprenons encore une fois nos marrons de sable ; ils nous fournissent des observations propres à confirmer ce que nous avons dit ailleurs sur la production des cailloux en général , & sur quelques-unes de leurs singularités. Si on casse de ces marrons des plus gros , & surtout de ceux qui ont des figures de boules , ou de boules applaties , & en général de ceux qui sont gros & renflés , souvent on leur trouve au milieu une cavité , quelquefois assez considérable. Dans les uns cette cavité est remplie du

même sable que celui de l'écorce, du même sable précisé-
ment que celui du banc où sont ces marrons. Le sable ren-
fermé dans ces marrons ne suffiroit-il pas pour prouver ce
que nous avons tâché d'établir ailleurs ; que les cailloux, dans
le centre desquels on rencontre une craie ou une terre blan-
che, comme ceux de Breuil-pont, sont composés de cette
même craie ou terre qui a été pénétrée du suc crystillin jus-
qu'à un certain point, & par-là est devenue méconnoissable,
quoiqu'elle soit la base de la substance du caillou ?

On ne fera plus même surpris de ce que cette terre de-
vient méconnoissable, si on casse de nos marrons de tous
les âges. On en observera qui ne sont qu'un sable lié, où
tous les grains sont sensibles. On en trouvera d'autres où on
ne distinguera que peu de grains. A mesure que les grains
s'effacent, la couleur du sable qui est verdâtre disparoît,
& dans ceux où les intervalles des grains sont encore mieux
remplis, on ne retrouve plus qu'un léger œil verdâtre.
D'autres, devenus plus compactes, où plus de matiere cry-
stalline s'est introduite, ont une couleur plus blanche, la
couleur verdâtre ne s'y fait presque plus sentir. Dans d'au-
tres on ne la reconnoît plus, comme il arrive qu'on ne
reconnoît plus la couleur blanche de la craie dans les cail-
loux, dont elle a pourtant été la base.

Les milieux de nos marrons sont remplis de sable déta-
ché, quand la matiere crystilline a commencé par lier une
couche de sable qui en enveloppoit une masse. Mais quand
au milieu de la premiere croûte qui a été liée, il s'est trouvé
quelque creux, quelque crevasse dans le sable, cette ca-
vité est restée vuide en partie ; alors ses parois intérieures
sont souvent revêtues de crystaux. Où ils n'avoient point de
grains de sable à réunir, ils se sont réunis plusieurs ensen-
ble ; ils y paroissent avec leur transparence & leur blan-
cheur naturelle, & avec toutes leurs facettes. Quelquefois
cette matiere ne s'y est pas si bien crystallisée, alors la masse
est moins transparente, plus blanche, & pareille aux congel-
lations de quantité de grottes souterraines.

Outre que les cavités sont plus petites dans les plus petits marrons , c'est que souvent les petits marrons n'en ont point , il a été aisé au suc crystallin de pénétrer jusqu'au centre des petites masses ; aussi si on cherche de ces cavités , il faut casser les gros marrons.

Cette dernière remarque s'étend à toutes les especes de cailloux. Ceux qui sont en boule , comme ceux d'Orel & de Saint-Dié en Dauphiné , & ceux de Provence , &c. ont presque toujours des cavités. Enfin lorsque les cailloux en boule n'ont point de cavité , quoiqu'ils soient entièrement solides , on trouve souvent dans leur centre des marques de leur première origine. J'ai remarqué , par exemple , des grains de gravier mal réunis dans le centre des cailloux qui sont formés en boules assez régulières , & qu'on trouve auprès de l'endroit où sont nos marrons. J'en ai vu qui avoient de la rougeur à leur écorce , & qui probablement venoient d'un sable mêlé avec de la terre rouge.

Les matières minérales ressemblent aux pierres par plus d'un endroit. La production des unes & des autres dépend souvent d'une cause semblable. Une eau chargée de parties pierreuses , forme les pierres dans les endroits où elle laisse du sédiment ; une eau chargée de matières minérales , forme de même des minéraux. Les mines de différens métaux , au moins celles qui sont moins anciennes que le monde , doivent leur origine aux parties métalliques qui ont été déposées dans certaines matières. Je rappellerai à cette occasion des mines de fer dont j'ai parlé ailleurs , sans expliquer d'où leur venoit leur figure ; elles sont composées d'une infinité de grains déliés , mais assez arrondis. Ces grains sont mêlés avec une terre rouge. Qu'on fasse déposer dans une terre rouge & compacte une eau qui tient du fer dissous , & qu'on la fasse déposer en des endroits beaucoup plus voisins les uns des autres , que ceux où a déposé notre eau pierreuse , & on expliquera pourquoi la mine de fer s'est formée par petits grains , & tous très-arrondis.

OBSERVATION DE MERCURE *sur le disque apparent du soleil.*

Par M. MARALDI.

NOUS avons fait par un temps assez favorable le 9 de 22. Dec.
Novembre 1723, l'observation du passage de Mercure 1723.
par le disque apparent du soleil.

Comme suivant les calculs astronomiques cette planete devoit entrer sur le bord oriental du soleil vers les trois heures après-midi, pour voir plus précisément le commencement de cette entrée, & en faire la premiere découverte, on étoit attentif à observer directement le soleil avec une lunette de 16 pieds. Nous avons commencé de voir Mercure, lorsqu'une petite partie de son disque étoit entrée sur le bord du soleil, & nous avons continué de l'observer avec la même lunette jusqu'à ce qu'il soit entré entierement. Pour lors il a paru rond & fort bien terminé, sans aucune apparence de nébulosité autour de lui, laquelle pût donner sujet de croire qu'il y eût quelque atmosphere autour de ce globe. Il a paru de la même maniere rond & sans nébulosité pendant tout le temps qu'il a été visible, non-seulement avec une lunette de 16 pieds avec laquelle nous l'avons considéré plusieurs fois durant ce temps-là, mais aussi avec une autre lunette de 34 pieds qui auroit pû rendre cette atmosphere plus sensible, supposé qu'il y en eût eu autour de cet astre: mais on n'en a pû rien distinguer avec la lunette de 34 pieds: non plus qu'avec celle de 16 pieds.

Une apparence que j'apperçus proche de Mercure dans une conjonction semblable qui arriva le 3 Novembre de l'année 1697, m'a donné occasion de faire plusieurs fois, & avec de grandes lunettes, une attention particuliere autour de cet astre dans la conjonction de cette année.

En 1697, comme je regardois le soleil à son lever avec

N.n. iij

une lunette de 18 pieds, pour voir plus facilement Mercure, j'aperçus une espece de nébulosité vers une petite partie de son bord qui regardoit l'horison. Je n'observai pas longtemps cette apparence, ayant pris presque aussi-tôt une lunette de 3 pieds appliquée à un quart de cercle, pour déterminer la situation de Mercure sur le disque du soleil, en faisant passer ses bords & Mercure même par le fil horisontal & par le vertical qui sont à son foyer. Cependant je ne vis point cette apparence avec la même lunette de 3 pieds pendant tout le temps que je l'employai, ce qui arriva jusqu'à ce que Mercure fût près de sortir du bord du soleil. Alors ayant repris la lunette de 18 pieds, pour mesurer le temps que son disque employoit à sortir du bord du soleil, ce qui sert à déterminer le diametre apparent de Mercure; je ne vis plus proche du même disque aucune nébulosité; ce qui fit croire que ce que j'avois apperçu pouvoit être quelque apparence d'optique; d'autant plus qu'elle ne fut apperçûe que lorsque le soleil paroissoit dans un brouillard qui étoit proche de l'horison. Cependant feu M. Cassini ne laissa pas de donner part de cette apparence dans un Memoire qu'il communiqua à l'Académie sur la conjonction de Mercure, & qui n'a point encore été imprimé, afin que dans la suite on y fit attention; mais cette nébulosité n'ayant point été vûe dans la conjonction de cette année, on a lieu de croire que celle de 1697 n'a été qu'une apparence d'optique.

Dans l'observation de cette année, aussi-tôt que Mercure fut entierement entré sur le bord du soleil, vû par la lunette de 16 pieds, je l'observai avec une autre de 9, qui avoit à son foyer les fils qui se croisent à angles de 45 degres, & qui étoit montée sur une machine parallaxique, pour suivre plus commodément le soleil. On dirigeoit la lunette de sorte que son bord septentrional parcouroit un de ces fils, alors laissant la lunette immobile, on comptoit le temps que le bord occidental, Mercure & le bord oriental du soleil passoient par un fil perpendiculaire à celui qui étoit parcouru par le bord septentrional, & on comptoit en même-temps

à l'horloge les minutes & les secondes que Mercure passoit par les fils obliques , & qui sont inclinés de 45° à l'égard des autres.

La différence du temps entre le bord du soleil & Mercure par le fil perpendiculaire , donnoit la différence d'ascension droite entre l'un & l'autre ; & la différence du passage entre un des obliques & le perpendiculaire , donnoit l'argument de la déclinaison entre le bord septentrional du soleil & Mercure.

Nous avons fait plusieurs de ces observations durant tout le temps que Mercure a été visible , qui servent à déterminer le lieu où il s'est trouvé en différens points du disque apparent du soleil , à connoître la situation par rapport aux cercles de la sphere , à tracer la route apparente à l'égard des mêmes cercles , & l'angle que cette route faisoit avec le parallele à l'équinoxial , & avec l'écliptique. Par ces mêmes déterminations on a connu le temps de sa conjonction en ascension droite & en longitude avec le soleil , la situation qu'il avoit alors dans l'écliptique , le temps qu'il est arrivé au milieu de la course , & la distance qu'il y avoit alors entre le centre du soleil & Mercure.

Le temps de l'arrivée de Mercure au milieu de sa route étant comparé avec le temps de son entrée , fait connoître l'heure qu'il devoit sortir du bord du soleil. La latitude de Mercure au temps de sa conjonction étant comparée à la variation qui est arrivée à la même latitude durant le temps que Mercure a été visible ; sert à déterminer l'heure & la minute qu'il a passé par son nœud , & par conséquent à trouver dans l'écliptique le lieu de ce nœud , aux environs duquel arrivent ces conjonctions visibles. La distance des centres au milieu de l'éclipse , ou bien la latitude de Mercure au temps de sa conjonction , sert enfin à connoître l'angle que l'orbite de Mercure fait avec l'écliptique. Voilà les connoissances principales que l'on tire de ces observations , & que nous allons chercher par les observations & par les calculs que nous rapporterons ci-après.

Toutes ces recherches sont nécessaires pour perfectionner

la théorie du mouvement de cette planete, & pour prévoir dans la suite le temps que ces sortes de phénomènes doivent arriver.

Bien que toutes les tables ne donnent pas également bien ces observations, elles s'accordent cependant à représenter, à quelque chose près, cette conjonction qui est arrivée proche du nœud ascendant qui est dans le taureau : mais il n'en est pas de même de celles qui se rencontrent vers le nœud opposé qui est dans le scorpion. Une des raisons principales de cette diversité est que nous avons un plus grand nombre d'observations faites proche du lieu du Zodiaque où est arrivée celle de cette année, que dans le signe opposé.

Celle de Gassendi, faite en 1631, qui est la première de toutes celles qu'on ait jamais observées, arriva, le soleil étant dans le signe du Scorpion proche du nœud ascendant ; il en est de même des autres qui ont été faites par différens Astronomes en différentes années, depuis 1631, jusqu'à la dernière du mois de Novemb. mais proche de l'autre nœud, nous n'avons que celle de 1661 observée par M. Hevelius.

Il est vrai que quelques Historiens nous ont laissé la mémoire d'une apparence de tache observée dans le soleil, qu'ils ont cru être Mercure, lorsque ces deux astres étoient aux environs du nœud descendant. Telle est entre autres celle qui est rapportée par l'Auteur des Annales des François, observée au mois d'Avril de l'année 807, sous le regne de l'Empereur Charlemagne. Ce grand Prince, comme il paroît par les Lettres d'Alcuin & par le témoignage d'Eginard qui en a écrit la vie, sçavoit l'Astronomie, & il prenoit un grand plaisir à observer les mouvemens des Astres, ce qui anima les Astronomes de ce temps-là à faire quantité d'observations, parmi lesquelles est la tache observée dans le soleil au mois d'Avril, qu'ils croyoient être Mercure ; mais après qu'on a porté la théorie du mouvement de cette planete à une plus grande perfection qu'elle n'étoit dans le neuvième siècle, & après la découverte des taches du soleil, faite au commencement du siècle passé, un peu après l'invention

l'invention de la lunette, on a reconnu que l'apparence observée du temps de Charlemagne ne pouvoit pas être Mercurielle, mais une tache semblable à celles que l'on voit ordinairement dans le soleil; ainsi si ces astronomes n'ont pas eu l'avantage d'avoir fait la première observation de Mercure dans le soleil, comme ils croient, ils ont eu celui de la première découverte des taches du soleil, quoique imparfaite, à laquelle ils ne s'attendoient pas.

Ce n'est donc qu'après que la théorie du mouvement de Mercure a été portée à une plus grande perfection par Kepler, & après l'invention de la lunette, qu'on a pu faire des observations du passage de Mercure dans le soleil, parce que la théorie marque le temps auquel doivent arriver ces passages, ce qui fait qu'on est attentif à les observer, & les lunettes servent à faire voir Mercure dans cette situation, qui sans ce secours ne seroit point visible, à cause que son diamètre est trop petit pour être apperçu à la vue simple dans l'image du soleil faite par ses rayons qui passent par un petit trou dans une chambre obscure. Cette méthode est sans doute celle avec laquelle les astronomes du tems de Charlemagne ont observé la tache qui parut de ce temps-là; car nous avons remarqué plusieurs fois des taches qui étoient visibles de cette manière.

Quoique les règles du mouvement de Mercure aient été portées à une grande perfection depuis qu'on a observé les conjonctions visibles de cette planète, il y a lieu de croire qu'on les auroit perfectionnées encore davantage, si les observations que nous en avons, avoient pu être parfaites, & que les astronomes en eussent pu remarquer le commencement, le milieu & la fin. Mais de sept conjonctions qui ont été visibles, nous n'avons que celle qui a été observée par M. Halley à l'Isle de Sainte Heleine, qui ait toutes ces circonstances; encore ne fut-elle pas complète, parce qu'il ne put pas déterminer la distance du centre de Mercure à celui du soleil au milieu de l'éclipse, comme il auroit été nécessaire, à cause de la situation incommode où il falloit être pour voir le soleil, qui étoit fort élevé sur l'horison.

Mem. 1723.

O o

Dans toutes les autres conjonctions ; si on a observé le commencement, on n'a pas pû voir la fin ; ou si on a observé la fin , on n'a pas pû déterminer le commencement , soit par quelque accident particulier , soit parce que le soleil n'étoit pas sur l'horison pendant toutes ces phases.

Dans la dernière observation du passage du soleil par le disque du soleil , qui fut observée le 3 Novembre 1697 , par feu M. Cassini , & que j'observai aussi , on vit au lever du soleil , Mercure qui étoit fort avancé dans sa route , de sorte que depuis qu'on commença de le voir jusqu'à sa sortie du soleil il ne fut visible que pendant trois quarts d'heure , étant entré sur le bord oriental du soleil , & passé sa conjonction avant son lever , & lorsqu'il étoit au-dessous de l'horison , au lieu que dans le passage de cette année , nous avons vu son entrée sur le bord oriental , sans avoir pû observer sa conjonction & sa sortie , ces phases n'étant arrivées qu'après que le soleil & Mercure ont été au dessous de l'horison.

Pour trouver le temps auquel ces phases sont arrivées , & pour connoître les autres principes qui servent à établir les regles des mouvemens de Mercure qui ont été marquées ci-dessus , nous avons fait plusieurs observations , parmi lesquelles nous employerons celles qui sont plus éloignées entr'elles , & qui sont en même-temps les plus exactes.

La première de toutes est celle que nous avons faite à $2^h 55' 42''$; dans cet instant Mercure passa par un fil perpendiculaire à celui que parcouroit le bord septentrional ; à $2^h 55' 44''$, le bord oriental du soleil passa par le même fil , Mercure employa à passer $1' 11''$ entre le premier oblique & le perpendiculaire , & il employa un égal espace de temps à passer entre le perpendiculaire & le second oblique , ce qui est une marque de la précision de l'observation , outre que le bord septentrional parcouroit exactement le fil qui représente son parallele.

L'autre observation que nous employons est celle qui a été faite à $4^h 22' 9''$, & dans cet instant Mercure passa par le fil perpendiculaire ; le bord oriental du soleil passa par le

même fil à $4^h 22' 45''$; donc la différence du passage fut de $36''$ de temps , & la différence du passage de Mercure entre l'oblique & le perpendiculaire fut de $55'$ de temps , qui est l'argument de la déclinaison entre le bord septentrional du soleil & Mercure.

Nous avons fait d'autres observations après celle-ci : mais comme les bords du soleil étoient mal terminés, à cause des vapeurs de l'horison dont le soleil étoit proche , on se contentera de comparer les deux précédentes.

Puisque dans la premiere observation faite à $2^h 55' 42''$, Mercure a passé $2''$ de temps avant le bord oriental, & que le demi-diametre du soleil passoit en 68, il suit que Mercure passoit par un cercle horaire, $66''$ de tems après le centre du soleil.

J'emploie la seconde observation telle qu'elle a été faite , & je néglige une petite différence qui peut être causée par la réfraction , parce qu'elle ne monte qu'environ à une seconde de temps en déclinaison , & qu'elle est encore plus petite en ascension droite , ce qui est une précision que les observations peuvent donner difficilement.

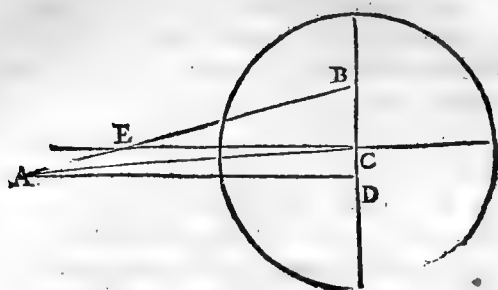
Puisque donc dans la seconde observation , Mercure passoit par un cercle horaire 36 secondes avant le bord oriental du soleil , il en résulte que Mercure passoit 32 secondes après le centre du soleil ; donc entre la premiere observation faite à $2^h 55' 24''$, & la seconde faite à $4^h 22' 9''$, il y a eu un intervalle de $1^h 26' 27''$, pendant lequel la variation du passage de Mercure a été de 34 secondes de temps. Dans cette proportion , la différence de 32 secondes qu'il y avoit au temps de la seconde observation entre le passage du centre du soleil & de Mercure , demande $1^h 21' 20''$, ce qui étant ajouté à l'heure de la seconde observation faite à $4^h 22' 9''$, donne $5^h 43' 29''$, qui est le temps que Mercure est arrivé en conjonction en ascension droite avec le soleil.

Il s'agit présentement de sçavoir la différence de déclinaison de Mercure à l'égard du centre du soleil au temps de cette conjonction. Dans la premiere observation , la différence de l'inaison entre le bord septentrional du soleil &

Mercure a été trouvée de $1^{\circ} 11''$ de temps dans le parallèle du soleil ; puisque le demi-diamètre du soleil passoit par un cercle horaire en 68 secondes , il suit que dans la première observation Mercure étoit plus méridional que le centre du soleil de $3''$ de temps. Dans la seconde observation , par un semblable raisonnement , on trouve la différence de déclinaison entre le centre du soleil & Mercure de 13 secondes vers le septentrion ; donc la somme de ces deux différences , qui est $16''$, est le mouvement de Mercure en déclinaison dans l'espace de $1^{\text{h}} 26' 27''$: mais depuis la dernière observation , jusqu'au temps de la conjonction , le mouvement de Mercure en déclinaison dans la même proportion , auroit été de 15 secondes , qui étant ajoutées à $13''$, déclinaison de Mercure au temps de la dernière observation , donne $28''$ de déclinaison de Mercure à l'égard du centre du soleil vers le septentrion au temps de sa conjonction en ascension droite.

Pour trouver présentement l'angle BEC que la route apparente de Mercure fait à l'égard du parallèle qui passe par le centre du soleil , on le cherche par la variation d'ascension droite , comparée avec la variation de déclinaison qui est arrivée en même temps à Mercure , en faisant comme $34''$, variation d'ascension droite , à $16''$ variation de déclinaison , ainsi le rayon est à la tangente de $25^{\circ} 12'$.

Par le moyen de cet angle & de la déclinaison CB de Mercure au temps de la conjonction , on trouve la distance des centres de $25''$, & la différence d'ascension droite entre la conjonction & le milieu de l'éclipse de $10'' \frac{1}{2}$, auxquelles en raison de $34''$ en $1^{\text{h}} 26' 27''$ convient $27' 0''$ de temps , qu'il faut ôter de l'heure de la conjonction trouvée à $5^{\text{h}} 43' 29''$, & on aura $5^{\text{h}} 16' 29''$, temps que Mercure est arrivé au milieu de sa course. Si de cette heure on en ôte le temps que le centre de Mercure est entré dans le soleil , qui a été à $2^{\text{h}} 50' 35''$, on a la demi-demeure de Mercure dans le soleil de $2^{\text{h}} 25' 54''$, qui étant ajoutée à l'heure du milieu de l'éclipse trouvée ci-dessus , donne le temps que Mercure est sorti du soleil à $7^{\text{h}} 42'$.



Pour connoître l'angle BAC que la route de Mercure fait avec l'écliptique, nous avons calculé, par le moyen du lieu du soleil, l'angle ECA que le parallèle qui passe par le centre du soleil fait avec l'écliptique. Cet angle est de $16^{\circ} 38'$, lequel étant ôté de l'angle que la trace de Mercure fait avec ce parallèle de $25^{\circ} 12'$, on a l'angle BAC que la trace apparente de Mercure fait avec l'écliptique de $8^{\circ} 34'$. Par le moyen de BC & de l'angle ABC trouvé par le lieu du soleil, on aura BA , AC , & AD qui est 163 parties, dont le demi-diametre est 68; à ces 163 parties en raison de 34 parties que Mercure a faites en $1^h 27' 62''$, il est dû $6^h 54' 28''$, qui est le temps que Mercure a employé à passer entre son arrivée au nœud en A , & sa conjonction avec le soleil; ce temps étant ôté de l'heure de la conjonction en ascension droite, que nous avons trouvée à $5^h 43' 29''$, on aura le tems que Mercure a passé par son nœud le 8 Novembre à $10^h 49'$ du matin.

Ces 163 parties réduites à un grand cercle, & converties en degrés, donnent $39'$, qui est la distance en ascension droite, vûe de la terre, que le nœud de Mercure avoit au temps de la conjonction, cette distance étant réduite à l'écliptique AC , donne $41'$.

Il faut réduire cet arc, vû de la terre, à celui qui seroit vû du soleil par la proportion des distances de Mercure au soleil & de Mercure à la terre, qu'il faut emprunter de la théorie de ces deux planetes; nous la supposons comme 465;

294 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
à 1000, ainsi l'arc de la distance de Mercure à son nœud, vû de la terre de $41'$, étant réduite au soleil, sera d'un degré $28'$. Depuis le temps de l'arrivée de Mercure au nœud jusqu'au temps de sa conjonction avec le soleil, le mouvement du soleil a été de $14' 20''$, qui étant ajouté à l'arc de la distance de Mercure au nœud, vû du soleil, donnera l'angle ou l'arc de la distance du soleil au nœud de Mercure, vû du soleil, de $1^{\circ} 45' 0''$; cet arc étant ôté du lieu du soleil au temps de sa conjonction qui est au signe du scorpion $16^{\circ} 49' 0''$, on aura le lieu du nœud ascendant de Mercure au $15^{\circ} 4'$ du Taureau.

On a trouvé ci-dessus la distance des centres de Mercure au soleil au temps du milieu de l'éclipse, de 25 parties, dont le demi-diametre est 68. Ces 25 parties converties en minutes de degré, & réduites à un grand cercle, donnent 6 minutes moins une seconde. Ces 6 minutes réduites à l'apparence qu'elles feroient du soleil, par la proportion des distances trouvées ci-dessus, donnent $12' 52''$.

Par le moyen de cet arc & par celui de la distance de Mercure au nœud, vû du soleil, trouvé ci-dessus de $1^{\circ} 45' 0''$, on connoît l'angle de la véritable inclinaison de l'orbite de Mercure à l'égard de l'écliptique de $7^{\circ} 0'$.

Nous avons calculé la longitude & la latitude de Mercure au temps des deux observations précédentes, & par ce moyen on a trouvé l'heure de la conjonction de Mercure en longitude à $5^h 24'$, sa latitude septentrionale de $6' 6''$, le soleil étant au $16^{\circ} 48'$ du Scorpion : le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite de Mercure avec l'écliptique, sont les mêmes qui résultent du premier calcul.

Nous avons reçu des observations de Mercure dans le soleil, faites à Genes par M. le Sénateur Saluago, à Bologne par M. Manfredi, & à Padouë par M. Poleni. A Bologne, Mercure étoit entré entièrement à $3^h 27' 45''$. A Paris, il parut tout entré à $2^h 51' 48''$; donc la différence des méridiens est $35' 57''$, comme elle résulte par les éclipses du premier satellite de Jupiter. M^r Poleni a observé Mercure, en

recevant l'image du soleil de 10 pouces , formée par une lunette de 10 pieds , & il a marqué l'entrée totale à $3^h 29' 54''$ à Padoue ; à Paris elle a été à $2^h 51' 48''$, la différence des méridiens sera $38' 6''$.

M E M O I R E

S U R

LES BAROMETRES LUMINEUX.

Par M. D U F A Y.

LA lumière que rendent naturellement quelques Barometres , est une découverte dûe au hasard , & que l'art dans la suite a tâché de perfectionner. L'an 1675 , M. Picard transportant son barometre dans un lieu obscur , s'aperçut de quelque lumière qui paroissoit dans l'espace vuide qui est au-dessus de Mercure ; il remarqua de plus , qu'en le secoüant fortement , il en rendoit davantage , & qu'elle ne paroissoit qu'à la descente du Mercure. Les Actes de Leipfick & les autres Journaux firent mention de cette découverte , & exhorterent le public à travailler à la recherche de la cause d'un phénomène si singulier. On tenta en vain la même expérience sur plusieurs barometres , à peine s'en trouva-t-il deux ou trois qui rendissent quelques foibles éclats de lumière , de façon que cette recherche fut comme abandonnée , jusques en 1700 que M. Bernoulli ayant lû , comme il le rapporte , ce fait dans un petit traité des barometres & notiomètres ou hygrometres , résolut de suivre cette découverte , & fit sur cela plusieurs expériences , desquelles il ne tira pas grande utilité : mais enfin il parvint à trouver une pratique sûre pour les rendre lumineux , ce qu'il détaille dans une lettre adressée à M. Varignon , & inserée dans les Mémoires de l'Academie de l'année 1700. Voici en peu de mots quel étoit son principe. Il avoit remarqué que le Mercure , en passant par l'air ,

contractoit une pellicule livide qui s'attachoit à la surface supérieure de la colonne dans le barometre, & qui selon lui nuisoit extrêmement à l'émanation de la matiere du premier élément qui devoit sortir du Mercure pour remplir une partie du vuide du tuyau, & il avoit imaginé, pour remédier à cet inconvénient, plusieurs moyens très-ingénieux de charger les barometres sans que le Mercure traversât l'air. Il fit part à l'Academie de toute la suite de cette découverte: mais comme l'Academie voulut être instruite par elle-même, on y fit les mêmes opérations avec toutes les circonstances que demandoit M. Bernoulli, & on reconnut que les barometres construits de cette façon, n'étoient pas toujours lumineux, que ceux même qui l'étoient, ne répondoient pas à l'effet qu'on en attendoit; ainsi on ne put pas approuver entièrement les observations de M. Bernoulli. Il répondit par une seconde lettre aux difficultés qu'on lui avoit faites, & soutint toujours son opinion; il l'appuya même par la nouvelle découverte qu'il fit d'un autre phosphore qui se faisoit, en mettant du mercure très-pur dans une phiole nette & fort seche, & pompant ensuite l'air le plus exactement qu'il étoit possible. Cette expérience ne réussit pas d'abord aussi parfaitement qu'à M. Bernoulli, mais elle a été confirmée depuis par une infinité d'épreuves qu'on en a faites.

En 1706 M. Dutal Medecin, fit insérer dans les *Nouvelles de la Republique des lettres*, un Mémoire dans lequel il confirme la réussite des opérations de M. Bernoulli, & surtout celle du mercure dans la phiole vuide d'air grossier; & il croit que l'Academie ne les avoit pas faites avec assez d'exactitude.

En 1708 M. Hauksbée, dans les *Mémoires de la Societé Royale de Londres*, après avoir décrit un phosphore construit avec un globe vuide d'air qu'il faisoit tourner rapidement sur son centre, & qui par ce moyen rendoit beaucoup de lumiere, lorsqu'on en approchoit la main, croit que la lumiere des barometres n'est causée que par la friction du mercure contre les parois intérieures du tube vuide d'air grossier.

En

En 1710, M. Hartfoeker, dans un Livre intitulé *Eclairciffemens sur les conjectures physiques*, écrivit contre les expériences & le système de M. Bernoulli, niant la vérité des faits, & combattant les raisons qu'il en apporte, sans en donner d'autre lui-même que la pureté du mercure & la netteté du tuyau, ce qui ne suffit pas, comme les expériences journalières le démontrent.

En 1715, Jean Frideric Weidler fit imprimer une Dissertation sur la même matière, dans laquelle il combat le sentiment de M. Bernoulli, disant que la pellicule que contracte le mercure en passant par l'air, ne nuit en rien à la lumière, qu'il croit ne venir d'autre chose que de la répercussion des rayons de la matière lumineuse qui, quoique dans l'obscurité, conservent leur même tension & leur même effort.

En 1716, Michel Heusinger donna une Dissertation qui a pour titre, *De nœticulâ mercuriali* : il rapporte qu'ayant chargé un baromètre si exactement, qu'en l'inclinant, on n'appercevoit en haut aucune bulle d'air, il s'étoit trouvé fort lumineux; mais que cependant ce vuide exact n'étoit pas absolument nécessaire, puisque quelques autres baromètres, dans lesquels on remarquoit sensiblement un peu d'air, ne laissoient pas d'être lumineux, quoiqu'à la vérité ils le fussent moins que ceux qui étoient absolument vidés d'air grossier, ce que plusieurs habiles gens ont regardé comme très-difficile, & que Boyle assure n'avoir jamais pu exécuter parfaitement. Il remarque aussi que les bulles d'air qui se sont rencontrées à diverses hauteurs dans la colonne de mercure, ont jetté quelques éclats de lumière: il ajoute que l'extrême pureté du mercure n'est pas nécessaire, puisqu'ayant fait un amalgame de 23 parties de mercure & de 5 de plomb, le baromètre qu'il en construisit fut lumineux: il finit la première partie par les précautions nécessaires pour rendre lumineux le mercure contenu dans une phiole vuide d'air. Dans la seconde, il rend raison de ces phénomènes; il établit d'abord que les parties du mercure sont extraordinairement divisibles & de figure sphérique, & que dans les interstices

que laissent entr'eux ces petits globes, est contenue une grande quantité de matiere subtile qui s'exprime, pour ainsi dire, & sort du mercure lorsqu'on l'agite, ce qui produit la lumiere que nous voyons; & en même-temps il réfute le sentiment de Weidler sur la répercussion des rayons de matiere subtile, & continue l'explication des phénomènes qu'il a décrits, disant que si le mercure n'est ordinairement lumineux que lorsqu'il descend, c'est qu'alors il abandonne la matiere lumineuse qui étoit contenue dans ses pores, au lieu qu'en remontant, il la suit, & en absorbe une partie, & chasse l'autre par les pores du verre avant qu'elle ait pû faire son effet: enfin il demande que le mercure soit purgé autant qu'il sera possible d'air grossier, & particulièrement de toute humidité, qu'il dit être un obstacle insurmontable à la lumiere.

En 1717. M. de Mairan, dans une dissertation sur les phosphores, qui remporta le prix à l'Académie Royale de Bordeaux, attribue cette lumiere au soufre du mercure qui est en mouvement, & dit qu'elle seroit beaucoup plus vive, s'il ne restoit dans le vuide des barometres les plus exactement chargés & dans les phioles dont on a pompé l'air, une matiere différente de l'air commun & de la matiere subtile qui arrête le mouvement de ce soufre & la lumiere qui en résulte; ce qui arrive sur-tout lorsque le mercure monte, au lieu que quand il descend, il y a une partie du tuyau la plus proche de la surface du mercure qui reste, au moins pour un moment, libre de cette matiere qui ne peut pas suivre le mercure avec assez de rapidité, & qui par ce moyen donne lieu à son soufre de se développer.

Voilà en substance quelle est l'opinion des Auteurs qui ont traité cette matiere; j'en ai omis plusieurs qui n'en ont dit que quelques mots en passant, & je vais rapporter les faits que j'ai éprouvés, après avoir appris d'un vitrier Allemand la maniere de rendre à coup sûr les barometres lumineux; ce que je lui ai vû faire, & que j'ai expérimenté depuis moi-même de plusieurs manieres.

Il prit un tube d'environ 32 pouces de long & d'une ligne

de diametre intérieur, il y passa un fil de fer, à l'un des bouts duquel étoit un peu de coton pour essuyer le tuyau en dedans; ensuite il boucha à sa lampe une des extrémités du tuyau; après qu'il fut refroidi, il y introduisit de nouveau un fil de fer sans coton, & y versa avec un entonnoir de verre jusqu'au tiers de sa hauteur du mercure commun qui n'avoit point eu d'autre préparation que de le passer par un cornet de papier dont on laisse le trou le plus petit qu'il est possible, ce qui purifie parfaitement bien le mercure de toute sa crasse qui reste dans le cornet de papier. Il fit allumer ensuite quelques charbons dans un réchaud, & tenant le barometre incliné, il en approcha d'abord le bout fermé du tuyau d'un peu loin, & petit à petit vint à le poser sur les charbons. Le mercure commença à frémir & à bouillonner, ou plutôt l'air qui y étoit contenu vint à se raréfier & à former des petites bulles qui sortoient très-facilement, parce qu'il tournoit continuellement le tuyau, & remuoit le fil de fer, l'enfonçant & le retirant alternativement jusqu'à ce qu'il ne vînt plus de bulles d'air; alors il avançoit le tuyau sur le réchaud, & chauffoit ainsi successivement & petit à petit toutes les parties du tuyau jusqu'où il y avoit du Mercure, après quoi il le laissa refroidir, & remit encore du mercure jusqu'au second tiers de la hauteur du tuyau, & s'y prit de la même maniere pour le chauffer, & en faire sortir tout l'air. Le tuyau étant froid, il acheva de le remplir, & ne fit point chauffer ce dernier tiers, m'assurant que cela étoit inutile. Il ajusta ensuite au bout du tube une boîte de bois blanc, qu'il ferma avec de la cire d'Espagne, & ayant mis le barometre dans sa situation naturelle, nous le portâmes dans un lieu obscur où il nous parut extrêmement lumineux, de façon qu'à chaque fois qu'en le balançant je faisois descendre le mercure, tout l'espace vuide qui étoit en haut paroissoit une colonne de lumiere, qui cependant étoit plus vive vers sa base, c'est-à-dire, à l'endroit où elle touchoit immédiatement le mercure. J'ai fait depuis plusieurs fois la même expérience, & elle m'a toujours également bien réussi,

En balançant un jour trop fortement, & même obliquement un de ces barometres, il y entra quelques bulles d'air qui interrompirent la continuité de la colonne de mercure, & qui me parurent lumineuses, quoique foiblement, en comparaison de la lumiere qui se faisoit dans le vuide. Ayant fait monter une de ces bulles d'air jusques dans la capacité supérieure du tuyau, je remarquai qu'elle en avoit diminué la lumiere, de façon qu'elle n'en étoit cependant pas moins vive, mais moins étendue, disparoissant & reparoissant une ou deux fois dans une seule descente de mercure.

J'ai construit des tubes qui avoient dans l'espace qui devoit rester vuide, deux ou trois boules l'une sur l'autre en forme d'olives, ce qui a fait rendre à ces barometres plus de lumiere; car elle occupoit toute la capacité intérieure des olives.

Il arrive aussi que la lumiere est beaucoup plus grande dans un tuyau d'un grand diametre que dans un moindre, quoiqu'en effet elle soit aussi vive dans le plus petit: mais la quantité n'en est pas si considérable.

Ayant fait sortir par le moyen d'un fil de fer la bulle d'air qui étoit montée au haut d'un barometre lumineux, il n'a point repris son premier éclat, mais est resté avec la lumiere entrecoupée qu'il donnoit lorsque la bulle d'air y étoit.

J'ai rempli d'eau la boule d'en bas d'un barometre, ce qui n'a apporté aucun changement à la lumiere, ni même lorsque j'en ai fait monter le long de la colonne de mercure: mais si-tôt que l'eau est parvenue dans le vuide au-dessus du mercure, le barometre a cessé pour toujours de rendre de la lumiere. Il est arrivé la même chose, lorsque j'ai laissé monter dans le haut du barometre une quantité d'air un peu considérable; car le barometre a cessé entièrement d'être lumineux, & même n'a point recouvré sa lumiere, lorsque j'en ai fait sortir exactement tout l'air.

Pour construire ces sortes de barometres, je prenois un tube tout droit, fermé par un de ses bouts, & qui avoit à l'autre bout une boule comme les barometres simples ordinaires, -

& lorsque je les avois emplis de mercure en les chauffant, comme je viens de le dire, & avec le fil de fer, je courbois le tuyau proche de la boule pour redresser le barometre, & le mettre dans sa situation ordinaire : mais d'une douzaine que j'ai essayé de construire de cette sorte, je n'ai réussi qu'à deux, les autres s'étant tous brisés, lorsque je les ai chauffés pour les courber; & cela m'est toujours arrivé, quelques précautions que j'aie prises pour les échauffer insensiblement; ce qui vient sans doute de ce qu'agitant le fil de fer dans l'intérieur du tuyau, on le raye nécessairement en plusieurs endroits, ce qui le fait casser suivant ces especes de fêlures; ainsi j'ai changé de méthode, & j'ai fait toutes ces expériences avec des tubes droits que j'ajustois sur des boîtes de bois, ou que je plongeois dans un vase rempli de mercure.

J'ai fait chauffer dans un creuset du mercure jusqu'à ce qu'il commençât à fumer; & ayant chauffé séparément le tube sur des charbons, j'y ai versé promptement le mercure, & j'en ai fait sortir tout l'air en le frappant doucement, & y remuant un fil de fer; je l'ai renversé ensuite dans un vase plein de mercure, & l'ai porté dans l'obscurité: mais quoique je l'aye agité assez fortement, il n'a fait aucune lumière.

J'ai pris un matras de verre blanc, bien sec, & j'y ai versé du mercure que j'avois fait chauffer jusqu'à ce qu'il commençât à fumer; j'ai soutenu le matras sur les charbons ardents, & j'en ai pompé l'air avec la machine pneumatique. Ayant ensuite fondu le col du matras, je l'ai laissé refroidir; & l'ayant porté dans l'obscurité, il est arrivé le même effet qu'aux phosphores communs de cette espece; c'est-à-dire, qu'agitant & secoüant le mercure, il a paru en dedans de la bouteille beaucoup de lumière, à peu-près comme celle de la flamme, & assez vive: mais cela n'a pas mieux fait que ceux qui se font à l'ordinaire, & dont la découverte est dûe à M. Bernoulli.

J'ai voulu voir s'il n'arriveroit aucune différence dans l'effet, en faisant chauffer plus ou moins le barometre, & pour cela j'ai pris deux tubes de même longueur, & autant.

que je l'ai pû, de même diametre, & je les ai préparés tous deux, en ne faisant chauffer l'un que légèrement, c'est-à-dire, jusqu'à ce que les premières bulles d'air fussent sorties, & j'ai tenu l'autre beaucoup plus long-temps sur les charbons, & même jusqu'à un bouillonnement violent du mercure qui arrive lorsque l'on souffle sur les charbons pour en augmenter l'ardeur, & s'apaise si tôt qu'on éloigne le tube du feu. Je puis même ajouter qu'il n'y a rien à craindre pour l'opération, en poussant le feu jusques-là, puisqu'il ne m'en est jamais arrivé d'accident. J'ai mis en expérience l'un & l'autre de ces barometres : mais je n'ai remarqué aucune différence sensible entre la lumière de l'un & celle de l'autre ; ce qui fait voir qu'il est comme impossible de ne pas réussir dans cette expérience puisqu'il n'y a pas plus d'inconvénient à donner beaucoup de chaleur qu'à n'en donner que médiocrement. On pourroit peut-être, par plusieurs épreuves réitérées, s'assurer d'un juste milieu qui réussiroit plus parfaitement que ces deux extrémités, ce qui même est vrai-semblable ; car dans le nombre de ces barometres, il s'en trouve qui sont considérablement plus lumineux les uns que les autres, ce qui peut venir de ce qu'ils ont été chauffés plus également ou plus approchant de ce juste milieu qui rend leur effet plus considérable & plus parfait.

J'ai tenté plusieurs autres expériences qu'il est inutile de décrire ici, & je n'ai rien trouvé qui approchât de l'effet de la préparation que je viens de rapporter.

Après avoir examiné les sentimens de ceux qui ont écrit sur cette matiere, & les opérations que j'ai recommencées plusieurs fois, je crois devoir ajouter les raisons qu'il me semble qu'on pourroit apporter pour l'explication des faits que je viens d'avancer, & qui sont d'une exécution si facile, que chacun les peut éprouver sur le champ.

Premierement, je n'ai pas remarqué que le changement de température de l'air, non plus que la durée du temps depuis la construction des barometres, causât aucune différence dans leur effet, comme l'a pensé M. Heusinger : mais au

contraire il m'a paru que leur lumiere étoit toujours la même ; ce qui me fait juger , après M. Leibnitz , que cette lumiere ne se perd ni ne diminue point tant que le barometre reste en son entier.

C'est donc dans le mercure qu'il faut chercher la cause de cette lumiere , & sur-tout dans la préparation que nous venons de rapporter , puisque les barometres construits de cette sorte sont toujours lumineux , & que les autres le sont rarement.

On pourroit croire que chauffant ainsi le mercure , il s'introduit dans ses pores des corpuscules ignées qui font l'effet que nous voyons : mais il se présente deux difficultés à ce sentiment. La premiere est que les corpuscules ignées s'épuiseroient à la fin ; & que si dans un an un barometre ne perdoit pas toute sa lumiere , du moins elle seroit considérablement affoiblie , ce qui est contraire à l'expérience. La seconde difficulté est que chauffant le mercure avant que de le mettre dans le tuyau , il devroit s'empreindre de même de corpuscules ignées , ce qui par conséquent feroit le même effet ; mais nous venons de voir que cela n'arrive pas , & que les barometres construits de cette façon ne sont pas lumineux.

Voici donc une explication qui me semble plus naturelle & plus conforme aux expériences que je viens de rapporter. Je suppose qu'il y a dans le mercure , de même que dans tous les autres fluides , beaucoup d'air grossier & de matière subtile. Quant à cette derniere , on ne doute pas qu'elle ne coule abondamment dans tous les corps ; & pour l'air grossier , on en voit très-distinctement sortir les bulles , lorsqu'on prépare les barometres , ainsi que je viens de l'enseigner. Ce qu'il y a de surprenant , c'est qu'il faut que cet air grossier soit remplacé dans le mercure , & voici l'expérience qui m'en a convaincu. J'ai pris un tube long d'un pied & de deux lignes de diametre , j'y ai marqué extérieurement des divisions avec de l'émail ; & l'ayant bouché par un de ses bouts , j'y ai mis du mercure jusqu'à la hauteur de huit pouces , je l'ai bien chauffé ensuite , ce qui en a fait sortir beaucoup de bulles

d'air. Le tuyau étant encore chaud, j'ai trouvé que la colonne de mercure étoit allongée, & qu'il s'étoit dilaté, & étoit monté quelques lignes au-dessus des huit pouces que j'avois marqués. A mesure que le tuyau s'est refroidi, le mercure est redescendu, & est resté précisément à la marque où il étoit avant de le chauffer; ce qui m'a fait juger qu'il falloit que l'air eût été remplacé, ou que les espaces qu'il occupoit dans le mercure fussent demeurés vuides. On voit aussi par cette observation, que si on pouvoit s'assurer d'un degré de chaleur fixe, on pourroit en même-temps connoître la plus grande dilatation du mercure. Je conclus donc de ces expériences que l'air contenu entre les parties du mercure commun, enveloppe, pour ainsi dire, & retient la matiere subtile qui y est renfermée, & ainsi l'empêche de sortir du mercure, quoiqu'il soit fortement comprimé; ce qui lui arrive lorsqu'on agite un barometre, & sur-tout lorsque la colonne descend, parce qu'alors le mercure souleve avec effort l'air qui pèse sur la surface de celui qui est contenu dans la boule; ainsi ce devoit être dans ce moment de pression violente que la matiere subtile sortiroit, si elle ne trouvoit dans l'air grossier qui l'environne, un obstacle invincible: mais si en échauffant le mercure on a diminué la quantité de l'air grossier qui y est renfermé, quand même on ne l'auroit pas ôté entierement, il arrive que la matiere subtile trouvant moins d'empêchement, sort avec violence, & fait paroître la lumiere que nous voyons; ce qui doit encore plutôt arriver, si en chauffant le mercure on a augmenté la quantité de matiere subtile, comme la dernière expérience semble le démontrer.

On expliquera facilement par ce moyen, pourquoi un barometre que l'on a construit, en chauffant séparément le mercure & le tuyau n'est point lumineux, parce que versant ce mercure purgé d'air dans le tube, il passe, pour ainsi dire goutte à goutte dans l'air grossier qui rentre promptement dans les pores de ce mercure, d'où l'on venoit de le chasser. De même lorsqu'il est monté de l'air dans le haut
d'un

d'un barometre lumineux, il perd beaucoup de sa lumiere, parce qu'une partie de cet air entre dans la colonne de mercure, & s'oppose à l'émanation de la lumiere. Enfin si cet air est en plus grande quantité, l'obstacle qu'il apporte devient insurmontable, & le barometre cesse d'être lumineux; & quoiqu'on fasse dans la suite sortir tout l'air qu'on peut appercevoir, celui qui est contenu dans le mercure reste & suffit pour arrêter pour toujours la lumiere du barometre.

J'expliquerai de la même maniere les autres phénomènes dépendans de ceux-là, comme la lumiere des bulles d'air qui se rencontrent dans la colonne de mercure; ce qui arrive, parce que la matiere subtile coulant librement dans toute la colonne, passe dans le moment de la pression, de la partie inférieure à la partie supérieure, & par conséquent traverse la bulle d'air qui les sépare; ainsi lorsque cette bulle n'est pas longue à parcourir, cette matiere subtile n'est point assez absorbée d'air pour ne point paroître lumineuse: mais la lumiere en est très-foible, parce que l'air contenu dans ces bulles, en étouffe une partie, ou du moins l'empêche de paroître à nos yeux.

Il reste maintenant à expliquer pourquoi cette lumiere cesse, lorsque le mercure remonte, & pourquoi elle subsiste tant que le barometre reste en son entier. Ces deux effets ont le même principe; car il est clair que lorsque la colonne de mercure remonte, elle présente à la colonne de matiere lumineuse des pores disposés à la recevoir, & qui en sont vuides, puisqu'elle vient d'en sortir par la pression du mercure; ainsi chaque fois que la matiere subtile en a été exprimée par la descente de la colonne, elle y rentre par l'ascension de la même colonne, & par conséquent il ne s'en perd rien, rien ne la dissipe, & elle doit rester dans le mercure tant que le barometre restera dans son état ordinaire, c'est-à-dire, tant qu'il sera parfaitement vuide d'air grossier.

Il s'ensuit de ces observations, que les barometres lumineux, indépendamment de leur singularité, sont fort au-dessus des autres pour l'usage, puisqu'étant parfaitement vuides

306 MEMOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
d'air grossier, ils sont exempts du défaut commun à tous les autres, qui est que contenant toujours, quelque soin qu'on y prenne, une petite quantité d'air, ils agissent comme Thermometres, & varient nécessairement par le chaud & le froid, ce qui n'arrive point aux barometres lumineux, & par conséquent les rend préférables à toutes les autres especes de barometres.

O B S E R V A T I O N
DU PASSAGE DE MERCURE
SUR LE SOLEIL;

Faites à Paris dans l'Observatoire Royal, le 9 Novembre 1723, au soir.

Par M. DELISLE le cadet.

22. Dec.
1723.

ETANT averti par le calcul de M. Halley, par les Ephémérides de M. Manfredi, & par mon calcul particulier, que Mercure devoit paroître sur le soleil le 9 Novembre au soir, une heure & demie environ avant le coucher du Soleil, je me suis préparé à observer ce passage avec toute l'exactitude dont j'étois capable. J'ai fait cette observation avec mes freres, & quelques autres personnes intelligentes, & j'y ai été principalement aidé par mon frere de la Croyere, qui est exercé depuis du temps aux observations astronomiques.

Comme le lieu où je fais mes observations ordinaires à Paris n'a pas l'horison libre au sud-ouëst, j'ai fait transporter à l'Observatoire Royal une partie de mes instrumens; sçavoir, un grand quart de cercle de fer & de cuivre de 3 pieds & demi de rayon, une pendule à secondes, une lunette de 20 pieds, & une de 13 garnie d'un micrometre. J'ai mis

ces instrumens dans la tour occidentale de l'appartement inférieur, d'où je pouvois suivre le soleil jusqu'à l'horison, ou au moins jusqu'à la hauteur de 45 minutes, qui est la hauteur apparente du terrain à l'endroit où le soleil devoit se coucher ce jour-là.

La pendule que j'ai fait porter à l'Observatoire, y a été mise en-mouvement plusieurs jours avant l'observation: mais le Ciel toujours couvert, ne m'a permis de faire aucune observation pour la régler au soleil, jusqu'au 9 au matin, où les nuées s'étant dissipées vers les 9 heures, j'ai pu observer plusieurs hauteurs du soleil, qui, comparées avec les mêmes hauteurs que j'ai prises le lendemain au matin, m'ont fait connoître le mouvement journalier de ma pendule dans l'intervalle de temps qui comprenoit celui de l'observation de Mercure.

Je n'ai pas jugé à propos de prendre le même jour 9 Novembre au soir, les hauteurs du soleil correspondantes à celles que j'avois observée le matin, pour en conclurre le midi vrai ce jour-là; car quoique ces hauteurs auroient dû finir avant le temps que les calculs marquoient l'entrée de Mercure dans le soleil, j'ai cependant appréhendé que le ciel ne devançât la prédiction; c'est pourquoi j'ai remis au lendemain à prendre les hauteurs correspondantes matin & soir pour avoir le midi vrai; heureusement j'en ai eu toute la commodité que je pouvois souhaiter, le ciel ayant été découvert le 10, matin & soir.

J'ai fait plus, car ayant fini de bonne heure le 10 au soir de prendre toutes les hauteurs qui m'étoient nécessaires pour avoir la véritable heure de ma pendule, & voyant le soleil encore élevé de 15 à 16 degrés sur l'horison, & le ciel assez disposé à laisser voir le soleil jusqu'à son coucher, je n'ai pas voulu manquer cette occasion, qui pouvoit servir à déterminer les réfractions à l'endroit où Mercure avoit été observé la veille, afin que si j'eusse voulu employer ces réfractions, j'eusse pu le faire par des observations immédiates.

Je ne me suis pas contenté de faire les observations dont je viens de parler, pour connoître exactement l'état de ma

pendule. Je l'ai encore comparée soir & matin avec une ancienne pendule de Thuret, dont M. Cassini se sert depuis long-temps, & qui est dans la tour occidentale à l'appartement supérieur. J'ai trouvé par cette comparaison que ces deux pendules s'étoient suivies très-exactement pendant tout le temps pendant lequel j'ai eu besoin de supposer que ma pendule allât également : c'est pourquoi on ne doit avoir aucun doute sur le temps de mon observation, d'autant plus que j'ai observé les hauteurs du soleil avec le grand quart de cercle dont je viens de parler, qui donne beaucoup de précision dans ces sortes d'observations.

Le quart de cercle dont je me suis servi, est fait à la manière de celui de M. le Chevalier de Louville, qu'il a décrit dans les Mémoires de l'Académie 1714. p. 65, c'est-à-dire, qu'outre la division ordinaire par transversales, il y a encore une division par points de 10 en 10 minutes. Il y a aussi à la lunette fixe de ce quart de cercle un micrometre, par le moyen duquel je fais mouvoir un fil horizontalement & parallèlement au fil horizontal fixe. Ce fil horizontal mobile me sert à prendre des différences des hauteurs sans remuer le quart de cercle. Dans toutes les observations que j'ai faites avec cet instrument pour le passage de Mercure dans le soleil, ces deux fils horizontaux étoient distans l'un de l'autre d'un tour de vis, ce que j'avois fait à dessein de multiplier mes observations.

Observations de l'entrée de Mercure dans le soleil.

Dans l'appréhension que l'entrée de Mercure n'arrivât plutôt qu'elle n'avoit été prédite, j'ai commencé peu de temps après midi à regarder attentivement le soleil à l'endroit où Mercure devoit paroître, & cela avec ma lunette de 20 pieds, pendant que mon frere de la Croyere le regardoit avec celle de 13, & qu'une autre personne qui a une fort bonne vue, le regardoit avec la lunette de mon quart de cercle, qui est excellente, & qui a 3 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur. J'ai commencé le premier à appercevoir Mercure, mordant un peu le bord du

soleil ; c'étoit à $2^h 50' 28''$ du temps vrai. Mon frere & cette autre personne étant avertis de cette entrée de Mercure, l'ont apperçûe en même-temps avec leurs lunettes.

Je me suis ensuite appliqué à observer l'entrée du centre de Mercure sur le disque du soleil, qui m'a paru se faire à $2^h 51' 0''$ de temps vrai : mon frere en a jugé de même avec sa lunette de 13 pieds. Enfin à $2^h 51' 39''$ nous avons jugé, mon frere & moi, l'entrée totale de Mercure dans le soleil.

Après que j'ai eu fait ces observations, je me suis attaché à mon quart de cercle, avec lequel je m'étois proposé de suivre le soleil jusqu'à son coucher. Je l'avois placé pour cela de maniere que sans en remuer le pied, je pouvois suivre le soleil jusqu'à l'horison. J'avois choisi mon quart de cercle préféablement à tout autre instrument, pour éviter (ainsi que je l'expliquerai ci-après) l'effet des refractions, en observant les différences de passages de Mercure & des bords du soleil par le fil vertical & par l'horifontal. Il'y avoit dans ma lunette deux fils placés horifontalement, qui étoient distans l'un de l'autre d'un tour de vis qui répond à $2' 32''$, ce que j'avois fait à dessein de multiplier les observations des différences du passage de Mercure & du soleil par un même fil horifontal.

Pour mieux ménager mon temps, & faire le plus d'observations qu'il m'étoit possible, pendant le peu de temps que le soleil devoit rester sur l'horison, je m'étois proposé de ne comparer Mercure qu'avec le bord septentrional ou supérieur du soleil & avec son bord oriental, qui étoient les deux bords qui devoient suivre de plus près le passage de Mercure par chaque fil horifontal & par le vertical. Pour la même raison de l'épargne du temps, je ne me suis point assujetti à observer ces différences de passage de Mercure & du soleil à de certaines hauteurs marquées comme de degré en degré ; je n'en ai même point du tout marqué la hauteur, parce que ce n'auroit pû être que la hauteur apparente altérée par la réfraction, & que je m'étois proposé de n'employer que les hauteurs vraies calculées pour le temps de chaque observation.

310 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
(comme je le dirai ci-après) & non pas conclues des hauteurs apparentes corrigées par la réfraction. J'ai seulement eu attention que dans les observations que je faisois avec mon quart de cercle, il fût toujours exactement vertical.

Pour abrégér, j'ai mis en Table toute la suite de mes observations avec les résultats que j'en ai déduits par un calcul exact, suivant la méthode que j'expliquerai ci-après.

J'ai séparé d'un trait chaque suite d'observations, pendant lesquelles l'instrument n'a point été remué.

J'ai commencé ces observations le plutôt que j'ai pû, après l'entrée de Mercure dans le soleil. Pour en pouvoir conclurre plus sûrement sa situation au moment de son entrée, j'ai continué d'observer de la même manière jusqu'au coucher du soleil, afin d'avoir un plus grand nombre de points de la route de Mercure, pour en pouvoir déterminer la direction avec plus de précision. Quelques nuées qui sont survenues, m'ont fait manquer plusieurs observations: mais j'en ai encore pû faire assez, tant vers le commencement de l'apparition de Mercure, que vers la fin du temps qu'il a été visible, pour pouvoir déterminer assez précisément sa route dans le soleil, comme on verra ci-après.

Mon frere a aussi observé séparément pendant tout le temps que Mercure a été visible, une grande quantité de passages de cette planète & des bords du soleil par les fils du micrometre appliqué à la lunette de 13 pieds.

Observations & résultats déduits par le calcul.

Temps vrai.	Différence de longi- tude de Mercure & du Soleil.	Latitude de Mercure septentrio- nale.	
2 ^h 55' 26" } Mercure à l'horifontal.			
55 49 } Mercure au vertical . . .	15' 17"	3' 36"	A.
56 14 } le Soleil au vertical.			
56 23 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
56 53 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
57 15 } le Soleil à l'horifontal.			
58 28 } Mercure à l'horifontal.			
58 50 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
59 52 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
3 0 14 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
0 33 } Mercure au vertical . . .	14 57	3 42	B.
0 44 $\frac{1}{2}$ } le Soleil au vertical.			
9 33 } Mercure à l'horifontal.			
9 55 $\frac{1}{4}$ } Mercure au vertical . . .	14 10	3 46	C.
10 12 } le Soleil au vertical.			
10 28 } le Soleil à l'horifontal.			
10 53 } le Soleil à l'horifontal.			
11 14 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
15 24 $\frac{1}{2}$ } Mercure à l'horifontal.			
15 46 } Mercure au vertical . . .	13 23	3 55	D.
16 2 } le Soleil au vertical.			
16 22 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
16 41 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
17 2 } le Soleil à l'horifontal.			
32 19 $\frac{1}{2}$ } Mercure à l'horifontal.			
32 40 $\frac{1}{2}$ } Mercure au vertical . . .	12 2	4 2	E.
32 57 $\frac{1}{2}$ } le Soleil au vertical.			
33 26 } le Soleil à l'horifontal.			
33 31 } le Soleil à l'horifontal.			
33 52 } le Soleil à l'horifontal.			

Temps vrai.		Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrio- nale.	
3 ⁿ 38' 41"	Mercure à l'horifontal.			
39 13 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	11' 12"	4' 14"	F.
39 47	le Soleil au vertical.			
39 50 $\frac{1}{2}$	le Soleil à l'horifontal.			
43 35 $\frac{1}{2}$	} Mercure à l'horifontal.			
43 55				
44 29 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	10 49	4 18	G.
44 44	} le Soleil à l'horifontal.			
45 4				
45 5 $\frac{1}{2}$	le Soleil au vertical.			
47 32	} Mercure à l'horifontal.			
47 52				
48 33	Mercure au vertical . . .	10 17	4 23	H.
48 40	} le Soleil à l'horifontal.			
48 59 $\frac{1}{2}$				
49 12	le Soleil au vertical.			
51 34 $\frac{1}{2}$	} Mercure à l'horifontal.			
51 54				
52 21 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	9 57	4 28	I.
52 41 $\frac{1}{2}$	} le Soleil à l'horifontal.			
53 1 $\frac{1}{2}$				
53 2 $\frac{3}{4}$	le Soleil au vertical.			
54 27	Mercure à l'horifontal.			
55 13	Mercure au vertical . . .	9 41	4 30	K.
55 33 $\frac{1}{2}$	le Soleil à l'horifontal.			
55 56	le Soleil au vertical.			
57 1 $\frac{1}{2}$	} Mercure à l'horifontal.			
57 20 $\frac{1}{2}$				
58 5 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	9 19	4 34	L.
58 8 $\frac{1}{2}$	} le Soleil à l'horifontal.			
58 26 $\frac{1}{2}$				
58 50 $\frac{1}{2}$	le Soleil au vertical.			

Temps vrai.		Différence de longi- tude de Mercure & du Soleil.	Latitude de Mercure septentrio- nale.	
3 ^h 59' 29"	} Mercure à l'horifontal.	9' 8"	4' 34"	<i>M.</i>
59 51 $\frac{1}{2}$				
4 0 30	Mercure au vertical . . .			
0 39	} le Soleil à l'horifontal.			
0 57 $\frac{1}{2}$				
1 16 $\frac{1}{4}$	le Soleil au vertical.			
1 52	} Mercure à l'horifontal.	8 54	4 36	<i>N.</i>
2 11				
2 58	le Soleil à l'horifontal.			
3 3 $\frac{1}{4}$	Mercure au vertical . . .			
3 17 $\frac{1}{4}$	le Soleil à l'horifontal.			
3 51	le Soleil au vertical.			
4 46	} Mercure à l'horifontal.	8 34	4 37	<i>O.</i>
5 5				
5 25	Mercure au vertical . . .			
5 52	} le Soleil à l'horifontal.			
6 11				
6 14 $\frac{1}{2}$	le Soleil au vertical.			
8 30	Mercure à l'horifontal.	8 11	4 41	<i>P.</i>
9 3	Mercure au vertical . . .			
9 36	le Soleil à l'horifontal.			
9 55	le Soleil au vertical.			
14 4 $\frac{3}{4}$	} Mercure à l'horifontal.	7 46	4 43	<i>Q.</i>
14 22 $\frac{1}{2}$				
14 53 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .			
15 9 $\frac{1}{2}$	} le Soleil à l'horifontal.			
15 28				
15 48 $\frac{1}{4}$	le Soleil au vertical.			

Mem. 1723.

Rr

Temps vrai.		Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrio- nale.	
4 ^h 16' 18 $\frac{1}{4}$	} Mercure à l'horifontal.			
16 37 $\frac{1}{2}$	} le Soleil à l'horifontal.			
17 23	Mercure au vertical . . .	7' 35"	4' 45"	R.
17 33	le Soleil à l'horifontal.			
17 42 $\frac{1}{2}$	le Soleil au vertical.			
18 29				
19 42 $\frac{1}{2}$	} Mercure à l'horifontal.			
20 1	} le Soleil à l'horifontal.			
20 28	Mercure au vertical . . .	7 15	4 47	S.
20 48	} le Soleil à l'horifontal.			
21 6	} le Soleil au vertical.			
21 26				
22 2 $\frac{3}{4}$	} Mercure à l'horifontal.			
22 22	} le Soleil à l'horifontal.			
22 28 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	6 57	4 51	T.
23 8	} le Soleil à l'horifontal.			
23 26 $\frac{1}{2}$	} le Soleil au vertical.			
23 28 $\frac{1}{4}$				
24 3	} Mercure à l'horifontal.			
24 22 $\frac{1}{4}$	} le Soleil à l'horifontal.			
24 32 $\frac{3}{4}$	Mercure au vertical . . .	6 41	4 54	V.
25 8	} le Soleil à l'horifontal.			
25 27 $\frac{1}{2}$	} le Soleil au vertical.			
25 34 $\frac{1}{4}$				
26 5	} Mercure à l'horifontal.			
26 23	} le Soleil à l'horifontal.			
26 46 $\frac{1}{2}$	Mercure au vertical . . .	6 38	4 54	X.
27 9	} le Soleil à l'horifontal.			
27 28 $\frac{1}{2}$	} le Soleil au vertical.			
27 48 $\frac{1}{2}$				

Temps vrai.	Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrio- nale.	
4 ^h 28' 18'' } Mercure à l'horifontal.			
28 37 $\frac{1}{2}$ } Mercure au vertical . . .	6' 29''	4' 57''	Y.
28 37 } le Soleil à l'horifontal.			
29 22 } le Soleil à l'horifontal.			
29 41 $\frac{1}{2}$ } le Soleil au vertical.			
30 0 } le Soleil au vertical.			
30 35 } Mercure à l'horifontal.			
30 54 } Mercure au vertical . . .	6 10	4 59	Z.
31 18 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
31 38 $\frac{1}{2}$ } le Soleil à l'horifontal.			
31 58 $\frac{1}{2}$ } le Soleil au vertical.			
32 23 $\frac{1}{2}$ } le Soleil au vertical.			

Méthode dont on s'est servi pour conclurre la longitude & la latitude de Mercure.

Comme je m'étois proposé de suivre le soleil jusqu'à l'horifon, où les réfractions & leurs différences sont les plus grandes, & que je souhaitois pouvoir conclurre de mes dernières observations les plus proches de l'horifon, la véritable situation de Mercure sur le soleil, aussi précisément que par les premières, afin d'avoir une plus grande portion de la route de Mercure dans le soleil; je me suis trouvé obligé ou d'employer les réfractions, ou de les éviter. J'ai préféré ce dernier parti, en observant les différences du passage de Mercure & des bords du soleil par les fils horifontal & vertical, comme il a déjà été pratiqué dans le dernier passage de Mercure dans le soleil, où d'abord que le soleil eut paru vers son lever, & que M. Maraldi y eut reconnu Mercure avec une lunette de 18 pieds, il y dirigea aussi-tôt la lunette d'un quart de cercle de 3 pieds de rayon pour déterminer la situation de Mercure par son passage, & ceux des bords du soleil par le fil horifontal & le fil vertical.

R r ij

Feu M. Cassini, dans le calcul qu'il a fait de l'observation de M. Maraldi, s'est servi du passage de tout le disque du soleil, tant par le fil vertical que par l'horisontal; d'où il a conclu par le rapport des intervalles du temps de ces deux passages, l'angle du cercle de déclinaison avec le vertical: mais comme pour l'épargne du temps, je me suis proposé de n'observer qu'un seul bord du soleil, tant au fil vertical qu'à l'horisontal, je me suis trouvé obligé de m'y prendre d'une autre manière, pour conclure de mes observations la situation véritable de Mercure à l'égard du soleil.

Pour cela j'ai considéré que par le moment connu du passage du bord supérieur du soleil par un fil horisontal dans une situation quelconque, je pouvois connoître par le calcul la véritable hauteur de ce bord, & par conséquent la situation de ce fil; & cela, en calculant à l'ordinaire la hauteur vraie du centre du soleil qui convenoit à l'heure donnée, & à la déclinaison du soleil tirée des Tables, & ajoutant à cette hauteur le demi-diametre apparent du soleil.

Cette hauteur véritable du bord supérieur du soleil est aussi celle de Mercure au moment de son passage par ce même fil, supposé que le soleil & Mercure ayant une même hauteur apparente, ayent aussi une même hauteur vraie. Il n'y a que la différence de réfraction ou de parallaxe qui puissent empêcher le soleil & Mercure d'avoir une même hauteur vraie, lorsqu'ils ont une même hauteur apparente.

Pour ce qui est de la différence de réfractions, il ne peut y en avoir que par un changement subit arrivé dans l'air pendant l'intervalle des deux passages, comme il arrive assez souvent au lever du soleil, lorsque l'on recherche sa réfraction, car on la trouve presque toujours un peu différente aux passages de ses deux bords, quoiqu'à une même hauteur apparente: mais cet effet n'arrive que fort près de l'horison, & seulement au lever du soleil, ainsi que je l'ai vérifié par un grand nombre de réfractions que j'ai calculées des deux bords du soleil que j'avois observés l'un après l'autre à une même hauteur apparente, où j'ai toujours trouvé sensiblement la

même réfraction. C'est pourquoi il n'y a aucune difficulté à supposer que le soleil & Mercure, passant l'un après l'autre par une même hauteur apparente, aient chacun au moment de leur passage, une même hauteur vraie, quant à la réfraction.

Pour ce qui est de la parallaxe, il n'en est pas de même, puisque l'on sçait que deux astres inégalement distans de la terre, ayant une même hauteur apparente, ont une différente hauteur vraie, & que leur différence de hauteur vraie est égale à la différence de leurs parallaxes, dont l'astre le plus près de la terre a une plus grande hauteur vraie que le plus éloigné. Quoique la différence des parallaxes horisontales de Mercure & du soleil ne soit que de 3'', suivant M. de la Hire, je n'ai pas laissé d'y avoir égard. J'ai augmenté de cette petite quantité les hauteurs vraies du bord supérieur du soleil, pour avoir plus exactement la véritable hauteur de Mercure au moment qu'il a passé par le fil horisontal par lequel avoit passé ce bord du soleil.

Ayant de cette manière la hauteur véritable de Mercure au moment de son passage par le fil horisontal, il m'a encore été facile d'avoir dans ce même moment sa différence de hauteur véritable avec le centre du soleil; car il ne m'a fallu que calculer pour le temps de chacun des passages de Mercure par le fil horisontal, la hauteur vraie du centre du soleil, & la comparer avec la hauteur de Mercure déterminée précédemment.

En faisant tous ces calculs, j'ai pû avoir pendant 1^h 40' qu'ont duré toutes mes observations, 52 fois la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du soleil pour autant de différens momens dont le temps vrai m'étoit connu. Dans cette grande quantité de déterminations, il m'a été facile d'examiner la variation de Mercure dans le vertical à l'égard du centre du soleil; & comme cette variation n'a pas été jusqu'à une minute seulement pendant un si long-temps, j'ai pû aisément reconnoître les observations qui ne se suivoient pas bien, & marquer, sans me tromper de beaucoup, la différence de hauteur vraie entre Mercure & le centre

du soleil à tout autre moment qu'à ceux auxquels je l'avois observé immédiatement, pourvu que ces instans ne fussent pas fort éloignés, & fussent compris entre ceux que j'avois observés.

Après avoir déterminé, comme je viens de dire, la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du soleil à chacun des passages de Mercure par le fil horizontal, je me suis proposé de déterminer l'azimut de Mercure à chacun des passages de cette planete par le fil vertical. Il ne m'a fallu pour cela que connoître la situation de ce fil vertical, ce que j'ai cherché par le moment connu du passage du bord oriental du soleil par ce même fil, en calculant pour cet instant l'azimut AZS du centre du soleil compté depuis le méridien, d'où j'ai ensuite conclu quel doit être l'azimut AZC de son bord oriental, lequel devoit être aussi l'azimut de Mercure au moment de son passage par ce même fil vertical.

Fig. 1.

J'ai imaginé pour cela le vertical ZC , touchant en C le bord oriental du Soleil, en sorte que le demi-diametre apparent du soleil SC , mené par le point d'attouchement, fût perpendiculaire à ce vertical; connoissant donc dans le triangle ZSC rectangle en C , la distance ZS du soleil au zénit, & le demi-diametre SC du soleil, il m'a été facile d'en conclurre l'angle SZC , différence des azimuts du centre & du bord oriental du soleil; & par conséquent ayant l'azimut AZS du centre du soleil, j'ai eu aussi l'azimut AZC de son bord oriental, qui est, comme j'ai dit, l'azimut de Mercure au moment qu'il a passé par le fil vertical de mon quart de cercle.

Par ces calculs j'ai eu 26 fois l'azimut de Mercure pour autant de différens momens qui m'étoient connus. J'aurois bien souhaité que ces momens pour lesquels je connoissois l'azimut de Mercure, eussent été les mêmes que ceux pour lesquels j'avois déterminé précédemment la différence de hauteur véritable entre cette planete & le centre du soleil; il n'auroit fallu pour cela que faire passer Mercure dans l'intersection du fil vertical avec l'horizontal: mais cela ne me

paroïssoit pas aisé; c'est pourquoi j'ai mieux aimé mettre quelque intervalle de temps entre les passages de Mercure par ces différens fils, autant qu'il m'en falloit pour pouvoir marquer exactement le moment de son arrivée à chaque fil, & j'ai crû qu'ayant multiplié, comme j'ai fait, les observations des différences de hauteur, j'en pouvois conclurre par proportion la différence de hauteur à tout autre moment, aussi sûrement que je l'avois observé immédiatement.

J'ai donc cherché la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du soleil qui convenoit à chacun des 26 momens auxquels je connoissois l'azimut de Mercure, & il ne m'en a pas fallu davantage pour calculer la longitude & la latitude de Mercure pour chacun de ces 26 momens, en supposant la longitude du soleil, & le reste pris des Tables de M. de la Hire.

Soit PZA le méridien, P le pole septentrional, Z le zénit, S le centre du soleil à chacun des passages de Mercure par le fil vertical; soit ZS la distance véritable du soleil au zénit, calculée pour le temps connu de ce passage; soit aussi PS la distance du soleil au pole septentrional prise des Tables astronomiques pour ce même temps. Par la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du soleil, on connoît encore la distance véritable ZM de Mercure au zénit; & comme on a déterminé, ainsi que j'ai dit ci-devant, son azimut AZM , tout le triangle PZM se trouve déterminé; d'où l'on en peut conclurre l'angle en P , & la distance PM de Mercure au pole; ce qui donne sa déclinaison QM .

Comparant à présent cet angle au pole ZPM avec l'angle ZPS qui est connu par le temps du passage de Mercure par le fil vertical, la différence des deux MPs est pour le moment proposé la différence d'ascension droite du soleil & de Mercure; c'est pourquoi connoissant l'ascension droite BR du soleil, prise des Tables astronomiques, l'ascension droite BQ de Mercure sera aussi connue, & par conséquent ayant son ascension droite & sa déclinaison, on en peut conclurre sa longitude BL réduite à l'Écliptique & sa latitude ML .

Voilà de quelle maniere j'ai déterminé la longitude & la latitude de Mercure à chacun des 26 passages de cette planete par le fil vertical de mon quart de cercle ; j'ai ensuite comparé chacune de ces longitudes de Mercure avec celle du soleil au même moment pour en avoir la différence SL , & c'est suivant ces différences de longitude & les latitudes de Mercure que j'ai marqué la situation de cette planete dans la figure 2, aux points marqués par les mêmes lettres que celles qui sont dans les Tables.

fig. 2. On voit par la ligne droite que j'ai tracée, qui passe par la plus grande partie de ces points, & qui ne s'éloigne pas de beaucoup des autres ; on voit, dis-je, par-là de quelle maniere mes observations s'accordent pour ce qui est de la direction de la route de Mercure. Dans les observations qui s'éloignent le plus de la route tracée dans ma figure, l'erreur n'est au plus que du demi-diametre apparent de Mercure qui n'est que de 3 ou 4 secondes ; ce qui ne paroîtra pas bien considérable, si l'on fait réflexion que cette plus grande erreur n'est qu'égalée à l'espace qu'occupe dans le ciel les filets de mon quart de cercle, qui sont composés à l'ordinaire d'un simple fil de vers à soie, & que d'un autre côté ces positions de Mercure n'ont été déterminées que par le temps des différences de passage, où l'on sçait qu'une minute de grand cercle de la grandeur qu'elle est marquée au bas de la figure, passe en 4 secondes de temps.

Il faut ici remarquer que quoi que j'aie employé dans mes calculs bien des élémens tirés des Tables astronomiques, comme la déclinaison du soleil, son ascension droite, la hauteur du pole, &c. & que j'aie supposé tous ces élémens exactement connus ; cependant quand ils ne seroient pas tout-à-fait tels que je les ai supposés, il n'en arriveroit aucune erreur sensible dans la situation de Mercure à l'égard du soleil : & cela, parce qu'il n'y a que les différences du mouvement du soleil en déclinaison ou en ascension droite qui puissent causer de l'erreur. Or quand les Tables de M. de la Hire, ou toutes les autres dont j'aurois pû me servir, ne marqueroient pas

pas exactement la déclinaison & l'ascension droite du soleil &c. elles en marquent au moins exactement les différences, & c'est tout ce dont on a besoin. De même si la hauteur du pôle de l'observatoire, que j'ai supposé avec M. de la Hire de $48^{\circ} 50' 0''$, n'étoit pas précisément telle, les hauteurs vraies & les azimuts que j'ai calculés, seroient à la vérité affectés de la même erreur : mais cela ne produiroit rien de sensible dans la situation de Mercure à l'égard du soleil, parce qu'ayant employé dans tous les calculs la même hauteur du pôle, il en doit résulter sensiblement les mêmes différences que si je m'étois servi d'une autre hauteur du pôle un peu différente de celle-là, & que je l'eusse employé de même dans tous les calculs. C'est pourquoi on doit être assuré d'avoir par ces calculs le mouvement apparent de Mercure à l'égard du soleil, autant exactement qu'il se peut conclure de mes observations, sans que le défaut des Tables y ait pû nuire. Je peux aussi assurer que les calculs sont exacts, ayant été faits chacun deux fois séparément par moi & par mon frere, qui est fort exercé dans le calcul.

*Du mouvement apparent de Mercure à l'égard
du Soleil.*

La route de Mercure conclue de ses différences de longitude & de ses latitudes calculées, comme j'ai dit ci-devant, est la route de son mouvement composé à l'égard du soleil supposé fixe. Il faut décomposer ce mouvement pour en conclure le mouvement apparent de Mercure sur son orbite propre, vû de la terre ; après quoi il faut encore considérer ce mouvement comme il est vû du soleil, qui est le centre du mouvement des planetes principales : mais sans qu'il soit nécessaire de faire cette décomposition, on peut déterminer toutes les circonstances du passage observé, en n'employant que le mouvement apparent de Mercure au soleil, vû de la terre, tel que les observations le donnent immédiatement ; c'est par où je vais commencer, après quoi je considererai ce mouvement, tel qu'il a dû être, vû du Soleil, pour en con-

322 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
clure le lieu du nœud de Mercure, & l'inclinaison véritable de son orbite sur l'écliptique.

Fig. 8

Pour déterminer par mes observations toutes les circonstances de ce passage, que l'on n'a pû avoir immédiatement, comme sont le temps de la conjonction, la latitude apparente de Mercure dans ce temps-là, la durée de l'éclipse, &c. pour faire toutes ces déterminations, je suppose la route apparente de Mercure, déterminée par mes calculs, prolongée de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'écliptique en *H* & en *D*, le cercle de latitude qui passe par le centre *E* du Soleil, en sorte que *ED* représentera la latitude apparente de Mercure au moment de sa conjonction, & *EH* fera la distance apparente du nœud de Mercure au centre du Soleil au moment de la conjonction.

Si l'on regarde le triangle *EDH* comme un triangle rectiligne rectangle en *E*, ce que l'on peut supposer sans erreur sensible dans un si petit espace, il ne faudra que deux observations de la différence de longitude & de latitude de Mercure pour déterminer tout ce triangle : mais plus ces observations seront distantes l'une de l'autre, & plus exactement elles le pourront déterminer. Si l'on choisit, par exemple, les deux observations extrêmes *A*, *Z*, & que l'on imagine de chacun de ces points les perpendiculaires *AG*, *ZF*, sur l'écliptique, qui représenteront les latitudes observées, & les parallèles *AB*, *ZC*, qui seront égales aux différences de longitude *GF*, *FE*, il ne faudra que faire cette analogie *AB* ($9' 7''$). *BZ* ($1' 23''$) :: *CZ* ($6' 10''$) *CD*. ($0' 56''$). Ce quatrième terme étant ajouté à la latitude *FZ* ou *CE* de Mercure au point *Z* ($4' 59''$) on aura *ED* ($5' 55''$) pour la latitude de Mercure au moment de sa conjonction par les deux observations proposées *A*, *Z*. C'est de cette manière que par les cinq dernières observations *Z*, *Y*, *X*, *V*, *T*, comparées avec la première & la troisième *A*, *C*, j'ai trouvé la latitude de *DE* de Mercure au moment de sa conjonction, de toutes ces différentes manières.

<i>A, Z.</i>	5'	55''	<i>C, Z.</i>	5'	55''.
<i>Y.</i>	5	57	<i>Y.</i>	5	57.
<i>X.</i>	5	54	<i>X.</i>	5	54.
<i>V.</i>	5	55	<i>V.</i>	5	55.
<i>T.</i>	5	54	<i>T.</i>	5	54.

Entre lesquelles prenant un milieu, il paroît que la latitude de Mercure, vûe de la terre au moment de sa conjonction, a dû être fort approchante de 5' 55'' septentrionale.

Pour avoir présentement la distance *EH* par les deux observations *A, Z*, on fera cette analogie *BZ* (1' 23''). *BA* (9' 7'') :: *AG* (3' 36''). *GH* (23' 44'') qui étant ajouté à *EG* (15' 17'') il en résultera la distance demandée *EH* de (39' 1''). Voici ce que donnent les autres observations employées ci-devant.

<i>A, Z.</i>	39'	1''	<i>C, Z.</i>	38'	56''.
<i>Y.</i>	37	45	<i>Y.</i>	38	37.
<i>X.</i>	39	14	<i>X.</i>	39	12.
<i>V.</i>	39	6	<i>V.</i>	39	2.
<i>T.</i>	39	17	<i>T.</i>	39	16.

En prenant un milieu entre ces dix déterminations, on voit que la distance apparente du nœud ascendant de Mercure au centre du soleil, moment de la conjonction, n'est que d'environ 39', ou peu de secondes au de-là.

On peut encore employer les mêmes observations à rechercher l'inclinaison apparente *DHE* de l'orbite de Mercure sur l'écliptique. Pour les observations *A, Z*, l'on fera *AB* (9' 7''). *BZ* (1' 23'') :: *S, T*, tangente de l'angle cherché *ZAB* ou *DHE* que l'on trouve de 8° 38'. Voici ce que donnent les autres observations.

<i>A, Z.</i>	8°	38'	<i>C, Z.</i>	8°	39'.
<i>Y.</i>	8	43	<i>Y.</i>	8	45.
<i>X.</i>	8	33	<i>X.</i>	8	33.
<i>V.</i>	8	36	<i>V.</i>	8	37.
<i>T.</i>	8	32	<i>T.</i>	8	32.

Le milieu entre ces dix différentes déterminations est 8 degrés 37 minutes.

Pour déterminer présentement la vitesse du mouvement apparent de Mercure sur son orbite, & le temps de la conjonction, j'y employerai l'observation de l'entrée du centre de Mercure, que j'ai déterminé à $2^h 51' 0''$, & je comparerai cette observation avec les cinq dernières observations *Z, Y, X, V, T*, qui en sont le plus éloignées.

Supposant tout le triangle *EDH*, déterminé de chacune des dix manières que l'on vient de rapporter, si l'on imagine présentement que du point *E*, comme centre & pour rayon *EK*, l'on ait décrit le cercle qui représente le disque apparent du Soleil, le point de section *K* de sa circonférence avec l'orbite *DH* de Mercure représentera le point de l'entrée de Mercure, & suivant les élémens déterminés précédemment, il ne sera pas difficile de connoître la valeur de l'arc *DK* de l'orbite de Mercure entre son entrée & le temps de la conjonction; car dans chacune des dix différentes déterminations que l'on a rapportées ci-devant, l'on a marqué la latitude *DE* de Mercure au moment de sa conjonction, & l'angle *DHE*, dont *EDH* est le complément, & enfin le demi-diametre apparent du soleil *EK* est constant; c'est pourquoi le triangle *EDK* est tout déterminé, ayant ses deux côtés *ED, EK*, de connus, & l'angle en *D*, & ainsi l'on pourra connoître le troisieme côté *DK*. Je suppose le demi-diametre apparent du soleil *EK* de $16' 15''$, &c. En resolvant le triangle *EDK* pour chacune des dix terminations faites ci-devant, j'ai trouvé la valeur de *DK* comme il suit.

<i>A, Z.</i>	$16' 3''$	<i>C, Z.</i>	$16' 3''$.
<i>Y.</i>	$16' 3''$	<i>Y.</i>	$16' 3''$.
<i>X.</i>	$16' 3''$	<i>X.</i>	$16' 3''$.
<i>V.</i>	$16' 3''$	<i>V.</i>	$16' 3''$.
<i>T.</i>	$16' 2''$	<i>T.</i>	$16' 3''$.

Pour sçavoir présentement combien de temps Mercure a employé à parcourir cet arc *DK* de son orbite, il m'a fallu

déterminer sa situation sur son orbite pour un autre temps connu, le plus éloigné que je pouvois avoir du moment de son entrée, comme par exemple dans l'observation *Z*, où Mercure ne s'étoit trouvé qu'une heure & 40 minutes après son entrée. Joignant *EZ*, le triangle *ECZ* étant rectangle en *C*, & ayant ses deux côtés de l'angle droit connus $CE = FZ$ ($4' 59''$). CZ ($6' 10''$) l'on en peut conclure l'angle *CEZ*; c'est pourquoi dans le triangle *EDZ*, on connoit les deux angles en *E* & en *D*, & le côté compris *ED*, d'où l'on tire la valeur de *DZ* ($6' 14''$) lequel étant ôté de *DK* ($16' 3''$) il reste *ZK* ($9' 49''$) qui a été parcouru en $1^h 40' 18''$. En raison de quoi on trouve que *DZ* aura été parcouru en $1^h 3' 42''$. C'est pourquoi si l'on ajoute ce temps à celui de l'observation *Z*, qui est $4^h 13' 18''$, la somme $5^h 35' 0''$, sera le temps vrai de la conjonction, déterminé par cette observation *Z*, comparée avec l'observation de l'entrée, en supposant l'orbite déterminée par les deux observations *A*, *Z*.

Les autres observations *Y*, *X*, *V*, *T*, employées de la même manière, tant avec l'observation *A* qu'avec l'observation *C*, m'ont donné le moment de la conjonction comme il suit.

<i>A</i> , <i>Z</i> .	$5^h 35' 0''$	<i>C</i> , <i>Z</i> .	$5^h 34' 59''$
<i>Y</i> .	$5 39 12$	<i>Y</i> .	$5 38 50$
<i>X</i> .	$5 35 38$	<i>X</i> .	$5 35 37$
<i>V</i> .	$5 32 45$	<i>V</i> .	$5 32 43$
<i>T</i> .	$5 33 59$	<i>T</i> .	$5 33 50$

Si l'on prend un milieu entre ces dix différentes déterminations, l'on aura le temps vrai de la conjonction vraie de Mercure avec le soleil à $5^h 35'$ environ; & comparant ce temps avec celui de son entrée, observée immédiatement à $2^h 51'$, Mercure aura employé $2^h 44'$ à parcourir l'arc *DK* de son orbite, que l'on a déterminé ci-devant de $16' 3''$; de plus si l'on abaisse du point *E* la perpendiculaire *EI* sur l'orbite de Mercure, elle y déterminera au point *I* le milieu du passage de Mercure sur le soleil, & *EI* sera la plus proche

distance des centres du soleil & de Mercure que l'on trouve de $5' 51''$, en supposant la latitude ED de Mercure dans sa conjonction de $5' 55''$, & l'angle IDE de $81^{\circ} 23'$, complément de l'angle DHE $8^{\circ} 37'$. On trouve aussi par la résolution du même triangle EDI , la valeur de DI de $53''$ que Mercure a dû parcourir en $11' 24''$, à raison de DK ($16' 3''$) qu'il a parcouru en $2^h 44'$. C'est pourquoi le temps de la conjonction ayant été marqué ci-devant à $5^h 35'$, le milieu de l'éclipse aura dû se faire à $5^h 23' \frac{1}{2}$ environ, & la demeure entiere du centre de Mercure dans le soleil, aura dû être d'environ $5^h 5'$.

Comme Mercure n'a pû être observé à Paris que pendant une heure trois quarts, ce qui n'est que le tiers du temps qu'il devoit rester dans le soleil, il est bien difficile d'estimer par cette petite partie, quelle a dû être toute la durée de son éclipse, & principalement parce que l'on n'a pû marquer jusqu'où il s'étoit avancé dans le soleil que par sa situation déterminée vers la fin de son apparition au coucher du soleil; ou sans parler de la difficulté qu'il y avoit de l'observer alors à cause des réfractions, on ne peut gueres déterminer sa différence de longitude à l'égard du centre du soleil, sans employer la mesure du temps dans laquelle une seconde d'erreur en produit 15 dans la longitude, & Mercure employe plus de 3 minutes à parcourir ces 15 secondes de sa longitude; d'où il suit qu'il ne seroit pas fort difficile qu'il y eût quelques minutes d'erreur dans le temps de la conjonction déterminée de cette maniere. Ce qui doit faire aussi varier de presque autant le milieu de l'éclipse, & l'erreur doit être doublée dans la durée entiere de l'éclipse. Cependant malgré toutes ces difficultés, je crois avoir fort approché de la véritable durée de l'éclipse, & de ce qui s'ensuit. J'en ai la confirmation par le passage de 1677, dont M. Halley étant dans l'Isle de Sainte-Heleine, a observé immédiatement & fort exactement toute la durée. Il a trouvé la demeure entiere du centre de Mercure dans le soleil de $5^h 14' 20''$. Il suit aussi des observations de M. Gallet à Avignon, que dans ce

passage de 1677, la latitude de Mercure a été de $4' 40''$. D'où je conclus la plus ptoche distance des centres de $4' 37''$, que j'ai trouvée dans ce dernier passage-ci, de $5' 51''$. Sur ces deux plus proches distances des centres; & sur le demi-diametre apparent du soleil, qui étoit le même dans ces deux passages ($16' 15''$) on trouve la moitié de la route de Mercure dans le soleil, dans le passage de 1677 de $15' 35''$, & dans ce passage-ci, de $15' 10''$. D'où il suit qu'à raison de $2^h 37' 10''$, que Mercure a employées à décrire la moitié de sa route en 1677, la demi-durée de ce dernier passage-ci auroit dû être de $2^h 32' 56''$, & par conséquent la durée entière de $5^h 5' 52''$, ce qui ne differe pas d'une minute entière de ce que j'ai estimé par mes seules observations; d'où j'ai lieu de croire que les autres élémens que l'on n'a pû observer immédiatement, comme le temps de la conjonction & le milieu de l'éclipse, doivent aussi être fort approchans de ce que j'ai conclu ci-devant.

L'on peut encore, en supposant le triangle *DKE*, déterminé comme on a dit ci-devant, en conclure le demi-diametre apparent de Mercure, en employant l'intervalle de temps écoulé entre l'entrée du centre de Mercure sur le disque du soleil & son entrée totale: cet intervalle a été marqué ci-devant de $39''$. Supposons qu'au moment de l'entrée totale le centre de Mercure ait été au point *N*, si l'on mene par ce point le demi-diametre *ENL*; *NL* sera égale au demi-diametre apparent de Mercure, ainsi la différence de *EK* & de *EN* sera le demi-diametre apparent de Mercure. Comme *NK* est le chemin que le centre de Mercure a parcouru sur son orbite pendant $39''$, il est aisé de trouver la grandeur de cet arc *NK* à raison de tout l'arc *DK* ($16' 3''$) que l'on a dit ci-devant avoir été parcouru en $2^h 44'$. Suivant ce rapport, on trouve *NK* de $3'' \frac{82}{100}$. Maintenant dans le triangle *DEK*, dans lequel je suppose l'arc *DK* de $16' 3''$, *EK* de $16' 15''$, & l'angle *EDK* de $81^{\circ} 23' 0''$, on en peut conclure l'angle *DEK*, & par conséquent l'angle *DKE*; ainsi le triangle *NEK* est déterminé, ayant ses deux côtés *EK*, *NK*,

328 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 & l'angle compris connus ; d'où l'on calcule NE de $16' 11''$
 $\frac{44}{100}$, lequel étant ôté de EK ou EL de $16' 15''$, il reste NL
 $3'' \frac{56}{100}$ pour le demi-diametre apparent de Mercure ; ce qui
 donne le diametre apparent de Mercure de $7'' \frac{1}{8}$ environ.

Du mouvement vrai de Mercure, vû du soleil.

Ayant déterminé, comme on a vû ci-devant, la différence de longitude du soleil & de Mercure, réduite à l'écliptique, vûe de la terre, il a été aisé d'en conclure de quelle maniere cette différence de longitude auroit dû paroître du soleil, en supposant le rapport connu des distances de Mercure au soleil & à la terre. Dans le calcul que j'ai donné de cette éclipse avant l'observation, j'ai marqué que les distances de Mercure au soleil & à la terre étoient dans le rapport de ces deux nombres 31333, 67646 par les tables de M. de la Hire. Suivant ce rapport, une petite distance vûe de la terre, prise dans l'orbe de Mercure, qui seroit, par exemple, égale au demi-diametre apparent du soleil, qui est de $16' 15''$; cette même distance, vûe du soleil, y paroîtra sous un angle de $35' 5''$. D'autres petits angles, vûs de la terre, pris de même sur l'orbe de Mercure, lorsqu'ils n'excéderont pas un demi-degré, étant vûs du soleil, seront augmentés sensiblement dans le même rapport. C'est sur ce rapport de $16' 15''$ à $35' 5''$, que j'ai converti toutes les différences de longitude entre Mercure & le soleil, vûes de la terre, & les latitudes de Mercure.

Soit le plan de l'écliptique représenté par le plan de la Fig. 4. sur lequel soit S le soleil, T la terre, M le lieu de Mercure réduit à l'écliptique, STM la différence de longitude du soleil & de Mercure réduite à l'écliptique, & vûe de la terre, ainsi qu'elle a été déterminée par les observations, comme par exemple par l'observation A qui l'a donné de $15' 17''$. En faisant cette analogie, $16' 15''$. $35' 5''$:: $15' 17''$. $33' 0''$, ce quatrieme terme est la différence TSM de longitude de la terre & de Mercure réduite à l'écliptique, vûe du soleil ; c'est pourquoi si l'on ôte cette différence TSM de la longitude \varnothing , T de la terre, qui dans ce moment est de

de $16^{\circ} 39' 58'' 8$, le reste $16^{\circ} 6' 58'' 8$ fera la longitude héliocentrique de Mercure réduite à l'écliptique. Dans cette même observation *A*, j'ai trouvé la latitude de Mercure, vûe de la terre, de $3' 36''$ septentrionale, qui étant vûe du soleil, devient de $7' 46''$ septentrionale. Voilà de quelle manière j'ai conclu de mes observations le vrai lieu de Mercure, vû du soleil, & sa vraie latitude, ainsi que je l'ai marqué dans cette Table.

Differ. des longit. vraies de Mercure & de la terre, vûes du soleil. <i>M S T</i> <i>M. S.</i>	Longit. vraies de la terre, vûes du soleil. γ <i>D. M. S.</i>			Long. vr. de Merc. vûes du soleil, réduites à l'éclipt. γ <i>D. M. S.</i>			Latit. vraies de Mercure, vûes du soleil septentr. <i>M. S.</i>	
<i>A.</i> 33 0	16	39	58	16	6	58	7	46
<i>B.</i> 32 17	40	10		7	53		7	59
<i>C.</i> 30 35	40	34		9	59		8	8
<i>D.</i> 28 54	40	49		11	55		8	27
<i>E.</i> 25 59	41	32		15	33		8	42
<i>F.</i> 24 11	41	48		17	37		9	8
<i>G.</i> 23 21	42	0		18	39		9	17
<i>H.</i> 22 12	42	11		19	59		9	28
<i>I.</i> 21 27	42	21		20	54		9	39
<i>K.</i> 20 54	42	27		21	33		9	43
<i>L.</i> 20 7	42	35		12	28		9	52
<i>M.</i> 19 43	42	41		22	58		9	52
<i>N.</i> 19 13	42	47		23	34		9	56
<i>O.</i> 18 30	42	52		24	22		9	58
<i>P.</i> 17 40	43	1		25	21		10	7
<i>Q.</i> 16 46	43	17		26	31		10	11
<i>R.</i> 16 22	43	24		27	2		10	15
<i>S.</i> 15 39	43	31		27	52		10	20
<i>T.</i> 15 0	43	36		28	36		10	28
<i>V.</i> 14 26	43	41		29	15		10	35
<i>X.</i> 14 19	43	47		29	28		10	35
<i>Y.</i> 14 0	43	53		29	53		10	41
<i>Z.</i> 13 19	43	59		30	40		10	46

La route de Mercure déterminée par ces positions, est la

Mem. 1723,

T t

330 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 véritable route sur son orbite propre, ainsi le point où elle coupe l'écliptique est le vrai lieu de ce nœud, & l'angle avec lequel cette route coupe l'écliptique, mesure l'inclinaison véritable de l'orbite de Mercure sur l'écliptique. Pour déterminer ces deux élémens, j'ai comparé deux à deux les mêmes observations dont j'ai déjà fait usage ci-devant. J'ai supposé ici, de même que ci-devant, que dans un si petit intervalle que celui qui a été observé, & même jusqu'au nœud, la latitude & la distance au nœud croissent également; ce que l'on peut supposer sans erreur sensible, ainsi que l'on s'en convaincra par l'inspection d'une Table des latitudes de Mercure; calculée pour chaque degré de distance de Mercure à son nœud, où l'on verra que pendant les trois ou quatre premiers degrés, les latitudes croissent également sans une différence d'une seule seconde. Voici donc, suivant cette supposition, comment j'ai déterminé le nœud de Mercure. Entre les observations *A, Z*, le mouvement de Mercure en longitude a été de $23^{\circ} 42''$, & en latitude de $3' 0''$; & la latitude de Mercure dans la première observation *A*, étoit de $7' 46''$. Si l'on fait cette analogie, $3' 0'' : 23' 42'' :: 7' 46'' : 1^{\circ} 1' 22''$, ce quatrième terme étant soustrait de la longitude de Mercure, qui, dans la première observation *A*, étoit de $16^{\circ} 6' 58'' 8$, il reste $15^{\circ} 5' 36'' 8$ pour le lieu du nœud ascendant de Mercure. Les autres observations comparées de la même manière, ont donné le lieu de ce nœud comme il suit.

<i>A, Z.</i>	$15^{\circ} 5' 36'' 8$	<i>C, Z.</i>	$15^{\circ} 6' 6''$
<i>Y.</i>	$15 \ 5 \ 57$	<i>Y.</i>	$15 \ 6 \ 31$
<i>X.</i>	$15 \ 4 \ 56$	<i>X.</i>	$15 \ 5 \ 18$
<i>V.</i>	$15 \ 5 \ 31$	<i>V.</i>	$15 \ 6 \ 1$
<i>T.</i>	$15 \ 4 \ 44$	<i>T.</i>	$15 \ 5 \ 5$

Il paroît par cet examen, que le nœud ascendant de Mercure n'est à présent qu'un peu au-delà du 15^{me} degré du \varnothing . Le milieu entre les dix déterminations que je viens de faire, qui s'accordent assez bien entr'elles, met ce nœud au $15^{\circ} 5\frac{1}{2}'$ du \varnothing .

Pour avoir l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, j'ai comparé de même le mouvement vrai de cette planète en longitude avec son mouvement en latitude entre les observations les plus éloignées, prises deux à deux. En faisant, par exemple, pour les deux observations extrêmes *A*, *Z*, comme le mouvement en longitude $23' 42''$ est au mouvement en latitude $3' 0''$, ainsi le *S*, *T*. est à la tangente de l'inclinaison véritable de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, qui se trouve par ces deux observations de $7^{\circ} 13'$. Les autres observations ont donné cette inclinaison comme il suit.

<i>A</i> , <i>Z</i> . $7^{\circ} 13'$	<i>C</i> , <i>Z</i> . $7^{\circ} 15'$
<i>Y</i> . $7^{\circ} 15'$	<i>Y</i> . $7^{\circ} 18'$
<i>X</i> . $7^{\circ} 8'$	<i>X</i> . $7^{\circ} 10'$
<i>V</i> . $7^{\circ} 12'$	<i>V</i> . $7^{\circ} 15'$
<i>T</i> . $7^{\circ} 7'$	<i>T</i> . $7^{\circ} 9'$

Le milieu entre ces dix différentes déterminations est 7° degrés 12 minutes.

J'ai aussi recherché quelle étoit dans cette conjonction la vitesse du mouvement horaire vrai de Mercure en longitude, réduite à l'écliptique ; & cela, en comparant les différences de longitude avec les intervalles de temps répondans, d'où j'ai tiré par proportion le mouvement horaire ; entre les observations extrêmes *A*, *Z*, par exemple, il s'est écoulé $1^h 35' 4''$, & le mouvement vrai de Mercure en longitude a été pendant ce temps-là de $23' 42''$, à raison de quoi le mouvement horaire en résulte de $14' 52''$. Les autres observations employées déjà ci-devant, donnent ce mouvement comme il suit.

<i>A</i> , <i>Z</i> . $14' 58''$	<i>C</i> , <i>Z</i> . $15' 18''$
<i>Y</i> . $14' 50''$	<i>Y</i> . $15' 10''$
<i>X</i> . $14' 55''$	<i>X</i> . $15' 16''$
<i>V</i> . $15' 8''$	<i>V</i> . $15' 33''$
<i>T</i> . $15' 3''$	<i>T</i> . $15' 27''$

Le milieu entre ces dix déterminations est $15' 10''$, précisément
T t ij

332 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
fément de la même grandeur que M. Halley le donne dans
ses Éléments du calcul de ces sortes d'éclipses. Par les Tables
de M. de la Hire, ce mouvement horaire vrai de Mercure
en longitude, réduit à l'écliptique, est de $15' 17''$.

Réflexions sur les déterminations précédentes.

Dans les éléments que j'ai été obligé d'emprunter des Tables astronomiques, je me suis entièrement conformé à celles de M. de la Hire, ainsi que je l'ai dit ci-devant. Il m'a été indifférent, comme je l'ai aussi dit, de me servir de ces Tables ou d'autres, pour en déduire la situation apparente de Mercure au soleil : mais comme mon but a été de conclure de mes observations la véritable situation de Mercure à l'égard du soleil, c'est-à-dire, celle qui seroit vûe du centre de la terre, j'ai été obligé d'employer la parallaxe horisontale du soleil que M. de la Hire ne fait que de $6''$, quoiqu'elle soit plus vraisemblablement de 10 ou 12 secondes. L'erreur que cela a pu causer, n'est tout au plus que de 2 ou 3 secondes, dont les latitudes vraies de Mercure doivent être augmentées ; d'où il suit que la latitude de cette planète, au moment de sa conjonction, que j'ai déterminée de $7' 55''$ septentrionale, doit plutôt être prise de $7' 57''$. Par la même raison, les latitudes vûes du soleil, doivent être augmentées de 4 à 5 secondes, & le nœud ascendant de Mercure doit être d'environ une demi-minute moins avancé. Ce nœud sera donc, suivant ce qui a été ci-devant, au $15^d 5' 8''$, en supposant la longitude du soleil, telle qu'elle se calcule des Tables de M. de la Hire. Si l'on employoit d'autres Tables du soleil, il pourroit en résulter une différente situation du nœud de Mercure. Il y a une autre correction à faire dans quelques-unes des déterminations que j'ai rapportées ci-devant, ce qui vient d'avoir employé le moment observé de l'entrée du centre de Mercure sur le soleil, quoiqu'il puisse arriver par l'effet des parallaxes, que le centre de Mercure ne paroisse pas du centre de la terre entrer sur le soleil au moment que l'on l'y observe entrer de dessus la surface de la terre : la différence en

doit être d'autant plus grande, toutes autres choses pareilles, que Mercure est plus près de l'horison. J'ai cherché dans la situation de Mercure & du soleil à l'égard de l'horison au moment de l'entrée observée, ce qui devoit arriver par l'effet des parallaxes, & j'ai trouvé qu'en supposant, avec M. de la Hire, la parallaxe horisontale du soleil de $6''$, le centre de Mercure, vû du centre de la terre, avoit dû paroître entrer sur le soleil $12''$ plutôt qu'il n'y a été observé à Paris : mais si l'on fait la parallaxe horisontale du soleil du $10''$, il faudra retrancher $20''$ du temps de l'entrée observée du centre de Mercure sur le soleil, pour avoir le moment que cette entrée auroit paru se faire du centre de la terre. Ce moment de l'entrée du centre de Mercure sur le soleil, ainsi corrigé, doit donner le temps de la conjonction de 10 ou 12 secondes, plus avancé qu'il n'a été déterminé ci-devant : mais il est inutile d'avoir égard à une si petite différence, par la difficulté que l'on a fait voir ci-devant, qu'il y avoit à déterminer exactement jusqu'où Mercure s'étoit avancé dans les dernières observations. C'est pourquoi on peut toujours s'en tenir au temps de la conjonction que l'on a déterminé ci-devant vers $5^h 35'$. L'on peut cependant, à cause de ce même effet des parallaxes, augmenter, si l'on veut d'une minute, la demeure entière du centre de Mercure dans le soleil, la faisant de $5^h 6'$, ce qui la rendra fort approchante de ce qu'elle auroit dû paroître, vûe du centre de la terre.

Les élémens ainsi réduits à l'apparence vûe du centre de la terre, sont comme ils doivent être, pour être comparés avec ceux qui se déduisent des Tables de Mercure; c'est pour faciliter cette comparaison, que je suis entré dans une si grande discussion de l'effet des réfractions & des parallaxes. J'ai aussi crû qu'il étoit avantageux pour ce dessein, d'avoir fait un aussi grand nombre que j'ai fait d'observations de la situation de Mercure sur le soleil, & de les avoir toutes rapportées, afin de mieux faire reconnoître par leur quantité leur degré de précision, & jusqu'à quel point de certitude on peut être assuré des élémens que j'ai déduits de ces observa-

334 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
tions; ce que je dis, afin que s'il se trouve quelque différence entre mes déterminations & celles des autres Astronomes, on prenne garde si les autres Astronomes sont entrés dans une pareille discussion des effets des parallaxes & des réfractions, & enfin s'ils ont rapporté un assez grand nombre d'observations, pour que l'on puisse reconnoître par la quantité le degré de précision avec lequel elles ont été faites; car quel jugement peut-on porter des observations qui ne sont pas en plus grand nombre qu'il n'en faut pour déterminer ce que l'on se propose de connoître ?

Maniere de corriger par les réfractions, les différences d'ascension droite & de déclinaison de Mercure & du soleil, observées par les méthodes ordinaires, lorsque les différences de réfraction sont sensibles.

J'ai fait voir ci-devant de quelle maniere j'ai déterminé, indépendamment des réfractions, la situation de Mercure sur le soleil. Si l'on souhaitoit comparer mes positions avec celles des autres Astronomes, conclues des différences d'ascension droite & de déclinaison, déterminées à l'ordinaire par les différences de passage de Mercure & du soleil à des fils obliques & perpendiculaires au mouvement diurne de ces planetes, il faudroit avant de comparer ces observations avec les miennes, corriger par les réfractions les observations des autres Astronomes, si ces observations ont été faites assez près de l'horison, pour que les différences de réfraction aient pû altérer sensiblement les différences d'ascension droite & de déclinaison observée.

L'on sçait que lorsque les différences des réfractions sont sensibles dans l'espace d'un demi-degré qu'occupe le soleil, son diametre vertical paroît plus court que le diametre horizontal, & qu'alors tout le disque du soleil prend la figure d'une ellipse, dont le grand axe est parallele à l'horison, & le petit axe lui est perpendiculaire. La différence de ces deux axes est d'autant plus grande, ou l'ellipse du soleil est d'autant

plus allongée, que la différence des réfractions des deux extrémités de son diamètre vertical est plus sensible.

Par la Table des réfractions, calculée pour chaque degré de hauteur, on peut estimer de combien doit être l'accourcissement du diamètre vertical du soleil, à telle hauteur que ce soit.

M. Picard faisoit plus, il observoit immédiatement avec son micrometre, l'accourcissement du diamètre vertical du soleil.

Voici quelques-unes de ses observations, faites au mois de Novembre de l'année 1666, qui peuvent faire juger à peu-près de l'accourcissement du diamètre vertical du soleil, dans la saison où se fait le passage de Mercure dans le soleil au nœud ascendant.

Hauteurs apparentes du centre du soleil. Degrés.	Le 21				22	
	matin.		soir.		matin.	
	M.	S.	M.	S.	M.	S.
1 $\frac{1}{4}$	3	39
3	1	46
4	1	20
5	0	51	0	50
6	0	46
7	0	30
8	0	26	0	28
9	0	22
10	0	19
11	0	16
12	0	13
13	0	9
14	0	6
15	0	3
16
17	0	0

Si l'on suppose que les différences de réfraction croissent

également, comme on le peut supposer sans erreur sensible dans un petit espace, tel que le demi-diametre apparent du soleil, sur-tout lorsque cet astre est élevé de plus de deux ou trois degrés; dans cette supposition, toutes les parties du soleil, prises perpendiculairement à l'horison, doivent être accourcies proportionnellement; ainsi le disque du soleil pourra être pris pour une ellipse ordinaire, sur laquelle ayant déterminé par observation la distance apparente de Mercure au grand axe de cette ellipse, il faudra augmenter cette distance dans le rapport de l'accourcissement de tout le diametre vertical pour avoir la véritable distance. Cette correction dans la distance verticale en doit produire nécessairement une autre dans la différence de déclinaison & d'ascension, à cause de l'inclinaison du parallele & du cercle horaire sur le grand axe de l'ellipse. Voici ma méthode pour calculer la quantité de cette correction, tant dans le vertical que dans le parallele & le cercle horaire.

Fig. 5. Je suppose que l'on connoisse le diametre horisontal DC du soleil, & qu'il soit divisé en autant de parties égales qu'il emploie de secondes de temps à passer par le méridien. C'est de ces parties égales dont je me servirai pour mesurer les différences d'ascension droite & de déclinaison tant apparente que véritable.

Soit donc M , le lieu apparent de Mercure dans le disque du soleil, IT un des fils de la lunette que l'on a disposé suivant le parallele apparent du bord septentrional du soleil. Soit aussi PO le fil perpendiculaire par lequel on ait observé la différence de passage de Mercure & du bord oriental du soleil. Soit PT cette différence connue en parties, dont on connoît le demi-diametre DC du soleil. Soit aussi PM , la différence apparente de déclinaison de Mercure & du bord septentrional du soleil, déterminée dans les mêmes parties par les différences de passage de Mercure par les obliques & le fil perpendiculaire. En achevant le quadrilatere rectangle $PTQM$, le point M représentera la situation apparente de Mercure sur le disque du soleil au moment du passage de
Mercure

Meroure par le fil perpendiculaire. Soit dans ce même temps TK , qui touche le bord oriental du soleil, & qui soit perpendiculaire à IT ; je suppose que dans le temps de l'observation on connoisse l'inclinaison apparente du parallele IT sur le diametre horisontal CD ; ce qui se peut connoître par le calcul de l'angle que fait au temps de l'observation le parallele du soleil avec le vertical, où l'on doit aussi avoir égard à l'inégalité des réfractions, par laquelle la route apparente par la réfraction n'est point parallele à la véritable route. Je suppose aussi que l'on connoisse le rapport des deux axes de l'ellipse du soleil; ce que l'on pourra connoître à peu-près, ou par la table des réfractions, ou par les observations que j'ai rapportées ci-devant de M. Picard, de l'accroissement du diametre vertical du soleil à différens degrés de hauteur sur l'horison.

Cela supposé, soient A, B , les foyers de l'ellipse par lesquels soient menées les lignes FBG, FAH , paralleles aux lignes IT, TK , le quadrilatere $FITK$ est tout déterminé; car par l'inclinaison connue du grand axe CD sur IT ou sur sa parallele FG , on peut sçavoir le rapport des trois côtés du triangle ABF rectangle en F , & par le rapport connu des deux axes de l'ellipse, on connoît la distance des foyers; donc tout le triangle ABF est connu. De plus, comme FG est perpendiculaire à la tangente TK , si l'on fait AG égal au grand axe CD ; BG sera partagé en deux parties égales au point K , & ainsi l'on pourra connoître BK & $FK=IT$; car dans le triangle AIG , rectangle en F , on connoît AF & l'hypoténuse $AG=CD$, d'où l'on peut connoître le troisieme côté FG , dont ôtant FB , il restera BG , dont la moitié BK étant ajoutée à FB , donnera $FK=IT$. Par la même raison, puisque FH est perpendiculaire sur la tangente IT , si l'on fait BH égal au grand axe CD , AH sera partagé en deux également au point I , & l'on pourra connoître AI , & $FI=TK$.

Que l'on imagine présentement par le lieu apparent M de Mercure des perpendiculaires MN, MO , sur les lignes

FI, FK, ces perpendiculaires ne seront que les prolongemens des côtez *MQ, MP*, du quadrilatere *MPTQ*, que l'on a dit ci-devant être connu en parties du diametre *CD* par les différences apparentes d'ascension droite & de déclinaison entre Mercure & le bord du soleil. Ainsi connoissant *BK & OK = MO = PT*, on connoitra leur différence *BO*, & connoissant *TK = PO & TQ = PM*, on connoitra *QK = MO*, & partant tout le triangle *BO M* rectangle en *O*, ayant ses deux côtés de l'angle droit connus, sera déterminé; d'où l'on pourra conclurre l'hypoténuse *BM*.

De la même maniere on pourra connoître dans le triangle *ANM*, rectangle en *N*, l'hypoténuse *AM*. C'est pourquoy considérant présentement le triangle *ABM*, on s'apercevra qu'il est tout déterminé, ayant ses trois côtés connus. Si l'on imagine donc du point *M* la perpendiculaire *ML* sur *AB*, l'on pourra connoître la grandeur de cette perpendiculaire & la distance *EL*, à laquelle cette perpendiculaire passe du centre de l'ellipse.

Cette perpendiculaire *ML* mesure la différence apparente de hauteur de Mercure & du centre du soleil. Pour avoir la véritable différence, il faut prolonger cette perpendiculaire *LM* comme en *S*, en prenant *LS* à *LM* dans le rapport du grand axe au petit axe de l'ellipse.

Ayant déterminé de cette maniere le vrai lieu *S* de Mercure à l'égard du centre *E* du soleil, si l'on imagine par ce centre du soleil le cercle horaire *REV*, faisant avec le diametre horisontal *CD* du soleil, l'angle *REB* de l'inclinaison véritable du cercle horaire avec le diametre horisontal du soleil, & que du point *S* l'on abbaïsse sur ce cercle horaire la perpendiculaire *SV*, cette perpendiculaire mesurera la différence véritable d'ascension droite de Mercure & du soleil, & la distance *EV* de cette perpendiculaire au centre du soleil, sera la différence véritable de déclinaison de Mercure & du centre du soleil.

Pour déterminer ces deux élémens, je suppose *SL* prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre en *R* le cercle de déclinaison.

ER, le triangle *ELR* rectangle en *L*, ayant le côté *EL* connu, & l'angle en *E* est tout déterminé; c'est pourquoi ajoutant *RL* à *LS*, on connoîtra *RS* hypoténuse du triangle *RVS* qui est encore semblable au triangle *ERL*; donc *SV* & *RV* se pourront connoître, & si de *RV* on en ôte *RE*, restera *EV*.

J'ai fait, suivant cette méthode, le calcul de la seconde observation, dont M. Maraldi s'est servi pour déterminer la route de Mercure, & j'ai trouvé, en supposant l'accourcissement du diamètre vertical de $1'50''$, tel à peu-près qu'il se conclut des observations de M. Picard pour la situation du soleil dans l'observation de M. Maraldi; j'ai trouvé, dis-je, par ce calcul, la latitude de Mercure de $4'53''$, & sa différence de longitude au centre du soleil de $6'28''$, au lieu que sans avoir égard à la réfraction, j'avois conclu de la même observation la latitude de Mercure de $5'10''$, & sa différence de longitude au centre du soleil de $6'28''$. Dans la pénultième de mes observations, que j'ai nommée *Y*, j'ai calculé, à une seconde près, la même différence de longitude de mercure & du soleil que je trouve ici dans l'observation de M. Maraldi, & j'ai trouvé la latitude de $4'57''$; d'où l'on voit que Mercure qui, par l'observation de M. Maraldi, sans égard aux réfractions, se trouvoit de 13 secondes au-dessus de la position que je lui ai donnée, se trouve au-dessous de $4''$ seulement, lorsque l'on a égard aux réfractions, & que l'on en fait le calcul de la manière que je viens d'expliquer; ce qui fait voir la nécessité qu'il y a d'employer les réfractions dans l'usage de ces observations, si l'on veut en conclure la situation de Mercure sur le soleil avec toute la précision que la peut donner l'observation.

Il y a un peu plus de difficulté à déterminer l'effet des réfractions dans des observations semblables à celles qu'a rapporté M. Cassini. Voici comment je m'y suis pris. Soit *MX* le fil que parcourt Mercure, dont je suppose que l'on connoisse l'inclinaison sur le diamètre horizontal *CD* du soleil. Cette inclinaison connue détermine la situation de trois

Fig. 6.

Vu ij

tangentes, que je suppose menées à l'ellipse qui représente le disque du soleil. L'une de ces tangentes QO est perpendiculaire à MX , & elle représente le fil perpendiculaire par lequel on a observé la différence apparente d'ascension droite de Mercure & du bord oriental du soleil ; les deux autres tangentes LF , FK , sont inclinées sur celle-ci de 45° , & elles représentent les fils obliques par lesquels on a observé le passage du bord oriental du soleil pour en conclurre la différence apparente de déclinaison entre Mercure & le centre du soleil. Cette différence apparente de déclinaison est mesurée par la perpendiculaire FX , abaissée du point F sur la route apparente MX de Mercure, ce point F étant l'intersection des deux tangentes LI , FK : car si l'on imagine la tangente IF & la route apparente MX de Mercure, prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en Z , & que par ce point l'on imagine YZ perpendiculaire à LI , cette ligne YZ représentera le fil oblique qui quitte le bord oriental du soleil, avant d'avoir passé par l'autre fil oblique IZ ; c'est pourquoi l'intervalle de temps entre ces deux attemchemens doit être marqué par la partie de la route de Mercure ou du centre du soleil, comprise entre les deux parallèles FK , ZY . Or XZ ou son égale FX est égale à la moitié de cette route : donc cette ligne FX doit mesurer la différence apparente de déclinaison entre Mercure & le centre du soleil. Cette ligne FX est donc connue en parties du diamètre horizontal CD du soleil.

Soit M le lieu apparent de Mercure, & EN la route apparente du centre du soleil qui est parallèle à la route MX de Mercure. Que cette route EN du centre du soleil soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la perpendiculaire FX & en Q la tangente OQ . Soit aussi abaissée sur cette route deux autres perpendiculaires, l'une BR du foyer B , & l'autre MS du lieu apparent M de Mercure. La partie SQ de la route du centre du soleil est encore connue en parties du diamètre horizontal CD , cette portion SQ étant la différence apparente d'ascension droite de Mercure & du bord

oriental du soleil. Voici selon toute cette construction de quelle maniere on peut déterminer la différence véritable d'ascension droite & de déclinaison de Mercure & du centre du soleil.

Soient par le foyer B , menées les trois lignes BH , BP , BG , perpendiculaires aux trois tangentes IF , OQ , IK . Soit décrit de l'autre foyer A comme centre, & de l'intervalle CD pour rayon, un cercle qui coupe ces trois perpendiculaires aux points H , P , G ; & par ces points de section, soient imaginées les lignes AH , AP , AG , il se formera trois triangles ABH , APB , AEG , qui auront un côté commun AB qui est connu par le rapport des axes de l'ellipse. Ces triangles auront encore chacun un côté connu; sçavoir, AH , AP , AG , dont chacun est égal à CD . On connoît aussi dans chacun des trois triangles susdits, l'angle fait en B , puisque l'on connoît l'inclinaison BEN de la route apparente du soleil sur le diametre horizontal CD , & l'inclinaison des fils sur celui que parcourt Mercure. On peut donc dans chacun des trois triangles susdits, déterminer le troisieme côté BH , BP , BG , dont par conséquent les moitiés BI , BO , BK , seront connues.

Par la construction précédente, le quadrilatere $BIKF$, est rectangle; c'est pourquoi imaginant la diagonale BF , on en peut connoître la grandeur, puisque l'on connoît les deux côtés de l'angle droit BK & KF , $= BI$. On peut aussi par la résolution du triangle BKF , sçavoir la grandeur de l'angle KBF , qui ajouté à l'angle ABG , donnera l'angle ABF . C'est pourquoi si l'on imagine le point F joint avec le centre du soleil par la droite EF , tout le triangle EBF sera déterminé, ayant ses deux côtés EB , BF connus, & l'angle compris. On pourra donc connoître le troisieme côté, & l'angle BEF , qui étant ôté de l'angle BEN , il restera l'angle FEN connu. Ainsi dans le triangle FEN , rectangle en N , connoissant l'hypoténuse FE , & l'angle oblique FEN , on en pourra conclurre les deux autres côtés FN , EN .

Que l'on considere présentement le triangle BER , rectan-

gle en R , dans lequel on connoît les angles & l'hypoténuse BE , on en pourra conclurre ER , qui étant ajouté à $RQ = BO$, il viendra EQ , dont ôtant SQ , restera ES . Si de FX l'on ôte FN , connue ci-devant, restera $NX = MS$; c'est pourquoi dans le triangle EMS , rectangle en S , connoissant les deux côtés de l'angle droit, on pourra connoître le reste.

L'angle MES ajouté à l'angle SEL , il viendra l'angle MEL ; c'est pourquoi si ML est perpendiculaire sur CD , tout le triangle MEL rectangle en L sera déterminé, son hypoténuse EM & ses angles étant connus. On en pourra donc conclurre les deux autres côtés ML , EL ; ML représente la différence apparente de hauteur de Mercure & du centre du soleil, qu'il faut augmenter comme en LT dans le rapport du grand axe au petit axe. Que l'on joigne le vrai lieu T de Mercure avec le centre du soleil par la droite ET , il faudra résoudre le triangle ETL rectangle en L , dans lequel on connoît les deux côtés de l'angle droit; d'où l'on en conclurra l'hypoténuse ET & l'angle TEL , dont ôtant l'angle LES , que je suppose à présent égal à l'angle de l'inclinaison véritable du parallèle du centre du soleil sur son diamètre horizontal, il restera l'angle TES ; c'est pourquoi si l'on imagine du point T la perpendiculaire TV abaissée sur la route véritable du centre du soleil, le triangle ETV rectangle en V sera tout déterminé, ayant son hypoténuse ET connue aussi-bien que ses angles; c'est pourquoi l'on en pourra conclurre les deux autres côtés qui mesurent les différences véritables d'ascension droite & de déclinaison de Mercure & du centre du soleil.

Ayant fait, suivant cette méthode, le calcul de la troisième observation qu'a rapporté M. Cassini, j'ai trouvé la différence de longitude de Mercure & du centre du soleil de $6' 42''$, & la latitude de Mercure de $4' 54''$, ce qui tombe exactement avec mon observation V , dans laquelle j'ai déterminé précisément la même latitude de Mercure, & la différence de longitude, seulement d'une seconde plus petite. M. Cassini, sans égard à la réfraction, avoit déterminé dans cette

Septentrion

Suivant Monsieur Halley

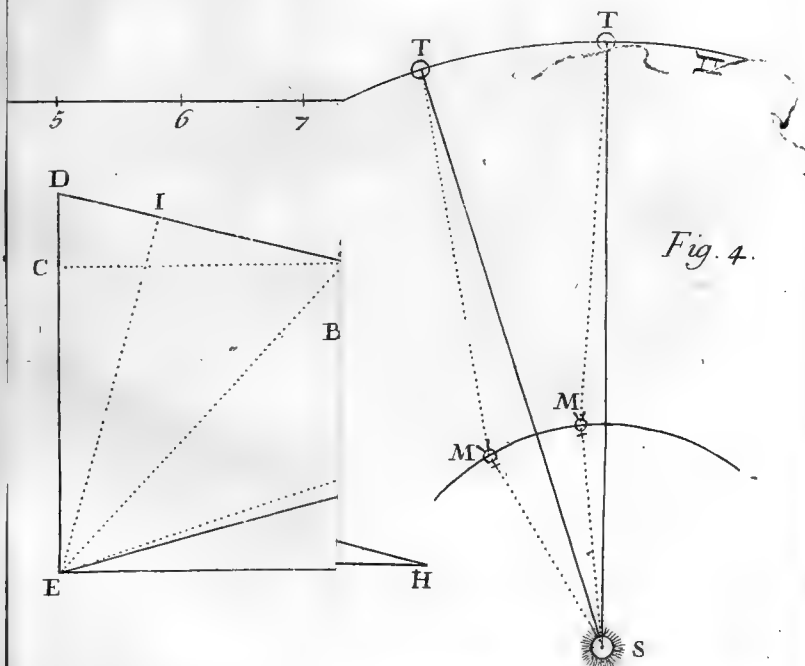
Observations 2 Y X V T S

Route de Mercure

ant les tables de Monsieur C

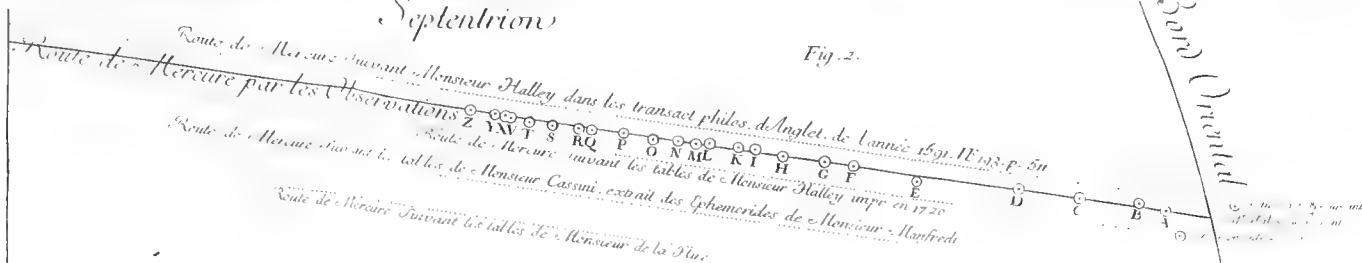
ation de ☿ Suivant
ley au moment
Mercure Suivant les tables de ☿ observée.

Situation de ☿ Suivant les Ephemerides
de M^r Manfredi au moment de
son entrée observée.



Septentrion

Fig. 2.



l'usage de \odot suivant le
table de \odot de la Place au
moment de l'observation.

et \odot le \odot suivant le
table de \odot de la Place au
moment de l'observation.

(Bar) Horizontal
du Soleil.

Centre
du Soleil

Ecliptique

Minutes d'un grand Cercle.

Fig. 1

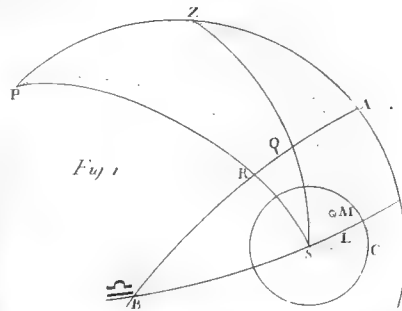


Fig. 3

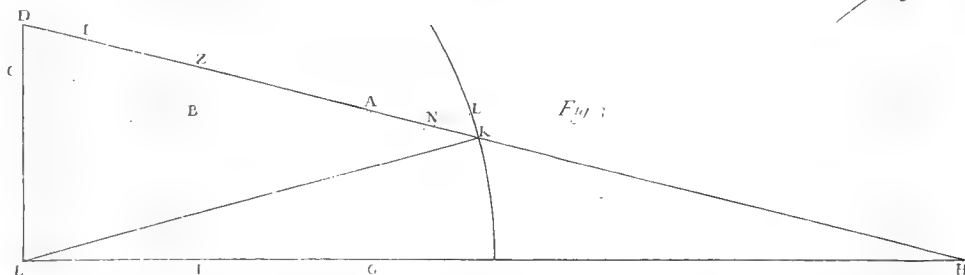
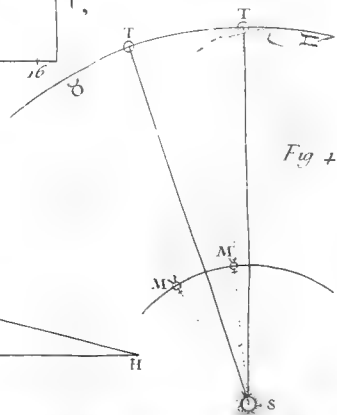
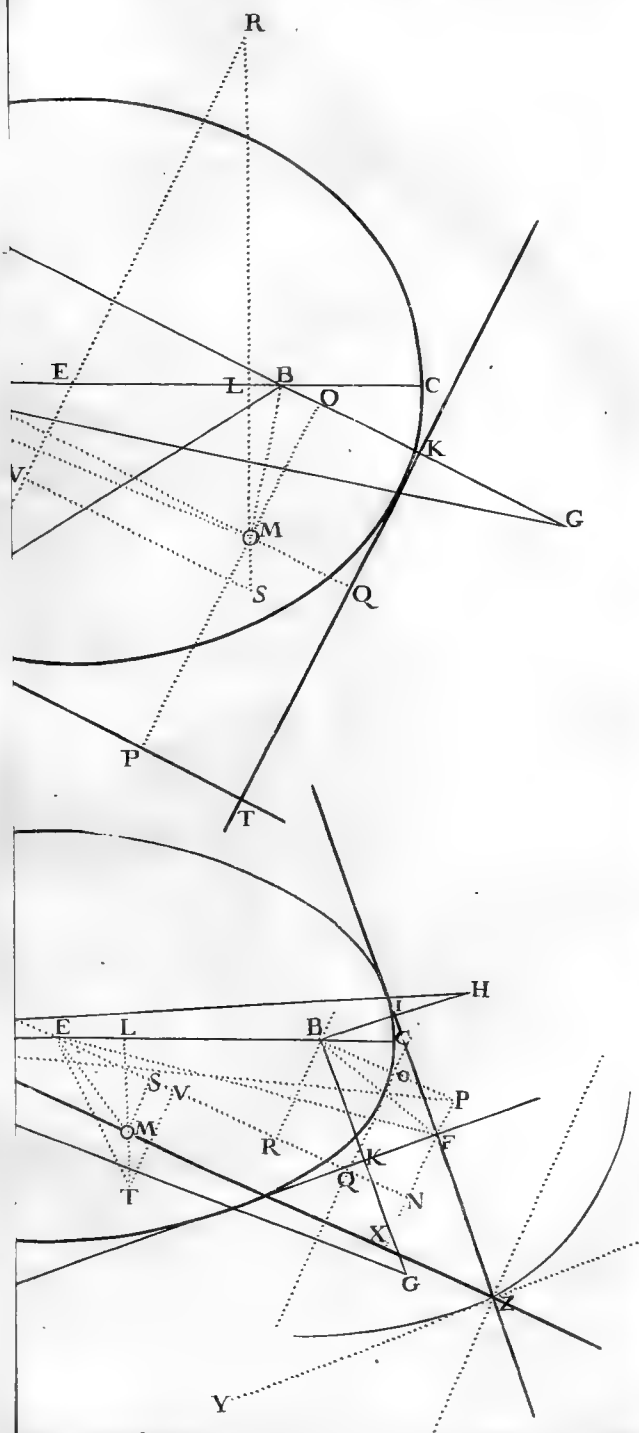


Fig. 4





observation sensiblement la même différence de longitude, mais la latitude de 20'' plus grande.

Puisque par les calculs que je viens de rapporter des dernières observations de M^{rs}. Cassini & Maraldi, j'ai fait voir que les latitudes de Mercure étoient considérablement altérées par les réfractions; & puisque ces latitudes étant corrigées par les réfractions, se sont trouvées sensiblement égales à celles que j'ai conclues de mes observations, où j'ai évité les réfractions, il y a toute apparence que les autres observations exactes de Mercure corrigées, de la même manière, quand il y aura lieu, pourront s'accorder avec les miennes, sur-tout si l'on a aussi égard à l'effet des parallaxes comme j'ai eu soin d'y prendre garde.

S U I T E.

DES RECHERCHES

PHYSICO - MATHÉMATIQUES

SUR

LA RÉFLEXION DES CORPS.

Par M. DE MAIRAN.

JE me suis aperçu à la lecture de la première partie de ces Recherches*, où j'ai traité de la *Réflexion des corps contre un plan inébranlable*, que mes auditeurs se sont quelquefois portés d'eux-mêmes à l'application que j'en devois faire ici à un plan mobile ou pénétrable, ou, ce qui revient au même selon moi, à la réfraction. J'ose tirer de-là une conséquence favorable à mes principes, & qui me dispensera d'entrer dans un aussi grand détail que j'avois cru d'abord devoir le faire, pour montrer l'accord de ce que j'ai établi dans cette première Partie, avec tout ce que j'ai à dire dans la seconde. Je me contenterai donc souvent d'indiquer l'ap-

21 Dec.
1723.

* Année
1722. p. 6.

344 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
plication que je fais de l'une à l'autre, par la seule citation
des articles de la première, en supposant toujours qu'on
l'ait devant soi, avec les figures qui l'accompagnent, &
dont je ne ferai point difficulté de me servir, comme si ce
que je vais écrire suivoit immédiatement dans le même vo-
lume. Je serai par-là plus en état de donner une juste éten-
due aux endroits les plus importants, ou les plus curieux.

S E C O N D E P A R T I E.

De la réflexion des corps pousés contre un
plan mobile.

Des corps sans ressort.

Fig. 1. XXXV. Soit une sphere S (Fig. 1.) dont le centre est
 C , parfaitement dure & inflexible, qui vienne frapper per-
pendiculairement un plan AL , que je suppose faire partie de
la surface d'un corps en repos aussi parfaitement dur & in-
flexible, & dont la masse a un rapport fini avec la sphere S .

Ce cas, qui est celui de l'Article I. ne fait plus aucune
difficulté; il n'y aura point de réflexion, & tout le monde
sait que les deux corps iront ensemble après le choc, com-
me ne faisant plus qu'une seule masse, & avec une vitesse
commune, égale à la quantité de force du corps en mouve-
ment avant le choc, divisée par la somme des deux masses.

*On suppose ici, & nous le supposerons toujours dans ce Me-
moire, que la sphere S rencontre le plan AL , en un point X , tel
qu'ayant abaissé du centre C , sur ce plan, la perpendiculaire CX ,
prolongée au-delà du point de rencontre & de contact X , elle
passe par le centre de gravité du solide auquel appartient la surface
 AL plane ou courbe.*

Fig. 2. XXXVI. Soit maintenant (Fig. 2.) la sphere S pousée
obliquement contre le plan AL , avec toutes les circon-
stances décrites, ou supposées dans l'article II. excepté que le
plan AL , en repos dans l'instant du choc, ainsi que nous le
supposerons toujours, n'est pourtant pas inébranlable, mais
mobile, & qu'il appartient à la surface d'un corps dont la
masse

masse a un rapport fini avec S , comme aussi nous le supposons toujours dans la suite.

Il est évident par les Articles I. & II. & par le précédent, qu'il n'y aura encore ici aucune réflexion.

Mais je dis de plus, 1°. *Que la sphere S continuera de se mouvoir après le choc, sur le plan AL , de X vers A , en le rasant, c'est-à-dire, avec une pression infiniment petite ou nulle.*

2°. *Que sa vitesse, par rapport au point X du plan, de X vers A , sera égale à CZ , & sa vitesse absolue après le choc, moyenne entre la vitesse CZ , & la vitesse absolue CY avant le choc, & plus grande que la vitesse imprimée au plan.*

3°. *Qu'elle suivra une direction moyenne entre CZ & CY , & d'autant plus oblique au plan AL , que la masse du corps de la surface duquel il fait partie, est plus grande.*

4°. Enfin, qu'étant parvenue à l'extrémité A , elle continuera de se mouvoir avec la même vitesse, & sur la même direction; tandis que le plan AL continuera son chemin sur la direction CX , & avec la vitesse qui lui a été imprimée par le choc, moindre que celle de la sphere après le choc.

Car 1°. il est clair par l'Art. II. & parce que le plan ne fait aucun obstacle au mouvement de la sphere, en tant qu'elle va de C vers Z , qu'elle continuera de se mouvoir en ce sens, après le choc, de même qu'avant le choc. Et puisqu'il n'y a rien de successif dans le choc des corps supposés infiniment durs & inflexibles, & que la communication de leurs mouvemens est instantanée, la sphere communiquera d'abord au corps AL , toute la vitesse qu'elle doit jamais lui communiquer, & elle conservera de même dans l'instant du choc toute celle qu'elle doit avoir dans la suite, & rien de plus. La sphere S , & le plan AL , iront donc après le choc d'une vitesse égale vers CX , qui est la direction selon laquelle se fait le choc, & selon laquelle se feroit la pression, s'il y en pouvoit avoir. Mais deux corps qui vont d'une vitesse égale vers un même côté, ne sçauroient agir l'un sur l'autre par aucune pression. Donc la sphere S coulera le long du plan AL , ou le rasera, sans y faire aucune pression.

Mem. 1723.

X. x

2°. Il vient d'être remarqué que la vitesse de la sphere, selon la direction parallele au plan, ne sçauroit changer; par conséquent elle sera mesurée par CZ , après le choc comme avant le choc. Mais sa vitesse absolue après le choc, qui résulte de la précédente, & de celle qu'elle a vers CX , doit être plus petite qu'avant le choc; puisque la composante CX a diminué; & d'autant plus diminué, que le corps AL a plus de masse. Donc au lieu qu'avant le choc la vitesse absolue étoit CY (Fig. 14.) composée de CZ & de CX , elle sera après le choc, par exemple, Cy composée de la même CZ , & de $Cx = CX = xX$. Il n'est pas moins évident que cette vitesse absolue surpassera la vitesse communiquée au plan par le choc de la sphere; puisque celle-ci, devenue la même dans les deux corps, n'est que composante de l'absolue de la sphere, & supposée $= Cx$, côté du rectangle $CxyZ$, dont Cy est la diagonale. Donc, &c.

Fig. 14.

3°. Ce qui vient d'être dit, prouve suffisamment que la direction Cy de la sphere ou de son centre après le choc, se doit trouver placée entre CZ & CY , au-dessus de CY , par rapport au plan AL , & devenir par conséquent plus oblique à ce plan que ne l'étoit CY , & d'autant plus que la masse du corps auquel appartient AL , est plus grande.

4°. Enfin puisque la pression est nulle, & que la sphere S se meut de C vers Z , par rapport au plan AL , il est évident que quand elle sera parvenue à l'extrémité A de ce plan, & qu'elle le quittera, elle continuera de se mouvoir avec la même vitesse, & selon la même direction qu'auparavant. Puisque la présence du plan sans pression, ou son absence, sont à cet égard la même chose. Il n'est pas moins clair que le corps auquel appartient le plan AL , continuera son chemin sur la direction CX , & avec la vitesse commune en ce sens, laquelle on a supposée égale à Cx ; car on sçait que le choc oblique n'agit que selon la perpendiculaire menée par le point de la surface choquée. Donc, &c. *Qui est tout ce qu'il falloit prouver, qui arrive à une sphere infiniment dure & inflexible, poussée obliquement contre la surface plane d'un corps mobile de même nature.*

Des corps à ressort.

XXXVII. Nous supposons dans cette seconde partie les principes d'expérience énoncés dans les demandes de la première, *Article III.*

De la réflexion directe.

XXXVIII. Il suffit de se rappeler sur ce sujet, ce qui a été dit, *Art. IV.* sur la sphere à ressort, poussée perpendiculairement contre un plan inébranlable, avec l'explication de la seconde demande, *Art. III. p. 12.* & d'y ajouter seulement les circonstances, & les loix de mouvement particulieres au choc des corps à ressort, dont les masses ont un rapport fini entre elles. J'adopte ces loix telles qu'on les trouve expliquées dans l'Histoire, & dans les Memoires de l'Académie de l'année 1706, & je les suppose suffisamment connues de mes Lecteurs.

Mais il ne sera peut-être pas hors de propos de faire voir ici, dans un plus grand détail, comment on peut résoudre par mes principes une question qui a été quelquefois agitée dans nos Assemblées, & qui ne fait qu'un cas particulier de la réflexion directe d'une sphere à ressort poussée contre un plan mobile. Sçavoir, comment une boule à ressort venant à rencontrer une autre boule qui lui est égale & en repos, lui communique toute sa vitesse, & demeure elle-même en repos ? Le fait n'est pas revoqué en doute ; la formule des vitesses restantes, & communiquées entre les corps à ressort qui se choquent, le donne, & l'expérience n'y est pas contraire. Mais on demande comment se fait cette permutation de repos & de mouvement après le choc, pendant la durée du bandement ou du débandement du ressort ? Les deux spheres marchent-elles d'abord ensemble ? & si elles marchent ensemble, où est la résistance nécessaire à bander le ressort, & à produire le partage qui se fait de son action, ou de sa force sur les corps choquans ?

Je réponds conformément à la théorie de l'Article IV. &

à l'explication de la seconde demande, *Art. III.* dont je suppose qu'on fasse la lecture en cet endroit. 1°. Que la boule en repos résiste d'abord à celle qui vient la choquer, & donne le temps au ressort de se bander avec toute la force de la choquante, comme si la première étoit tout-à-fait inébranlable, ou à une quantité infiniment petite près. 2°. Que dans l'instant où finit la compression & où commence la restitution du ressort, les deux boules sont dans le cas des corps infiniment durs, & tendent ou commencent à aller d'une vitesse commune, égale à la quantité de mouvement divisée par la somme des masses ; ce qui donne ici $\frac{1}{2}$ de la vitesse de la choquante. 3°. Que le ressort venant à se débander avec toute sa force, il la distribue également de part & d'autre, parce que les deux masses sont égales. Mais la choquée qui avoit $\frac{1}{2}$ de vitesse en avant, reçoit encore $\frac{1}{2}$ de vitesse vers le même côté : donc elle ira avec 1 de vitesse : & la choquante qui avoit de même $\frac{1}{2}$ de vitesse, & dans le même sens, reçoit $\frac{1}{2}$ de vitesse vers le côté opposé, dont sa moitié de vitesse en avant sera détruite, & la boule demeurera en repos, ainsi que le donne la formule.

Car si l'on fait attention aux circonstances que je viens de décrire, & à la liaison qu'elles ont entr'elles, & avec le fait qu'il s'agit d'expliquer, on verra qu'il est impossible, selon les principes de mouvement les plus reconnus, qu'il y en ait aucune qui manque, sans que le fait ne cesse d'être tel qu'on le suppose. Par exemple, il est impossible, dans toute autre hypothèse de tendances, de vitesses, ou de repos des deux boules à l'instant de l'explosion de leur ressort, & de la distribution égale de sa force sur deux masses égales, il est impossible, dis-je, qu'il se fasse un échange parfait de repos & de mouvement. Il est impossible que la quantité des vitesses distribuées de part & d'autre soit telle, si le ressort n'a été bandé avec toute la force de la boule en mouvement avant le choc ; comme réciproquement il est impossible que ce bandement soit arrivé sans une compression, & conséquemment sans une résistance égale à cette force.

Il ne reste donc qu'à trouver d'où vient la résistance de la

Boule en repos dans l'instant du choc , & pendant la durée peut-être insensible , quoique finie , de sa compression ? Mais on sçait que les corps ne sçauroient être tirés de leur repos qu'en un certain temps , & avec une certaine force , qui suppose de leur part une résistance à être mûs. Quelle que soit la cause de cette résistance , ce n'est pas ici le lieu de la chercher ; elle existe , & j'ose dire que sans elle les loix de la communication des mouvemens par le choc des corps à raison de leurs masses , seroient intelligibles. L'air ambiant résiste aussi , & d'autant plus que le mouvement imprimé par le choc est plus subit , il faut donc concevoir que le ressort des deux boules est bandé avant que la masse totale de celle qui étoit en repos ait cédé au mouvement de celle qui vient la frapper. L'expérience d'un bâton soutenu par ses extrémités sur deux verres , & rompu par le coup qu'on donne soudainement sur son milieu , est un exemple sensible de ce que je viens de dire. On y peut ajouter , s'il est nécessaire , celui qui est rapporté par M. Mariote , dans son *Traité de la Percussion* , prop. 27. Il est moins connu , mais encore plus décisif sur le phénomène dont il s'agit.

A l'égard du choc même de deux boules , dont l'une vient heurter l'autre qui est en repos ; quelque soin que j'aye vu apporter , ou que j'aie apporté moi-même à l'exécuter , par le moyen des machines destinées à ces sortes d'expériences , je n'ai jamais vu cet arrêt parfait de la boule choquante , & l'on n'en doit pas être surpris , puisque , selon ce que nous venons de remarquer ci-dessus , il faudroit , pour rendre l'expérience absolument conforme au calcul , que la compression & l'explosion du ressort se fissent dans un instant indivisible , ce qui n'arrive pas assurément. (*Dem. 2. Art. III.*) Or dans le temps qui y est employé , les deux boules sont dans le cas du choc des corps mous , qui iroient avec une vitesse commune , dont il doit rester quelque chose à la boule choquante après le choc. Mais il est vrai que ce temps est si court , & le mouvement qui en résulte si peu sensible , qu'on peut dire que l'expérience confirme parfaitement la spécu-

Fig. 15.

lation sur cette matiere, du moins aux yeux de ceux qui sçavent qu'on ne doit rien attendre d'absolument juste dans l'exécution mécanique de ces sortes de phénomènes. Un moyen cependant d'ôter à la boule choquante C , (*Fig. 15.*) tout mouvement sensible après le choc, c'est d'interposer plusieurs autres boules égales A, B, D, E , &c. qui se touchent en ligne droite, entr'elle & la boule à choquer Q . On sçait qu'il n'y a que cette dernière qui doive se mouvoir par le choc de la première C , contre la boule A ; & que toutes les intermédiaires A, B, D, E , &c. peuvent être regardées comme un ressort placé entre les deux boules, C, Q . Mais ce ressort ayant une masse qui doit être mue par la boule C , & d'autant plus grande, que les boules A, B , &c. sont en plus grand nombre, il est clair que l'instant de la vitesse commune où les deux boules C, Q , sont dans le cas des corps sans ressort, produira une vitesse d'autant plus petite sur le total, & il en restera d'autant moins à la boule C après le choc. Or comme elle est peu sensible, lorsque la boule C choque immédiatement la boule Q , elle ne le fera point du tout s'il y a cinq à six autres boules A, B, D , &c. entre deux. On peut imaginer de même dans les cas du choc immédiat des boules C, Q , un ressort intermédiaire, ou, si l'on veut, un duvet léger, flexible & élastique, qui constitue les parties extérieures des boules, à l'entour d'une espece de noyau infiniment dur placé à leur centre; & par ce moyen on concevra aisément que les deux boules ne sçauroient agir sensiblement l'une sur l'autre par le choc, que dans l'instant, presque indivisible de la dernière compression de ce duvet, où elles se trouvent dans le cas des corps inflexibles.

Dans la suite de ce Memoire je ferai abstraction du ressort, du corps choque ou du plan, comme j'ai fait dans la premiere partie, & par les mêmes raisons. Je ne dirai rien aussi du chemin que prend ce plan, & de ce qu'il devient après la rencontre de la sphere, cela étant désormais tout-à-fait inutile à mon sujet.

De la Réflexion oblique.

XXXIX. Nous appliquerons à la réflexion oblique contre

un plan mobile, tout ce qui a été dit de la réflexion oblique contre un plan inébranlable, *Art. V. VI. VIII. IX. &c.* en imaginant seulement que le ressort de la sphere (*Fig. 4.*) ne se bande pas avec toute la force x , analogue au côté CX du triangle CXY . Ce triangle représentera toujours par son hypoténuse Cy le mouvement total (y) de la sphere E , & par ses deux autres côtés XY , CX , les mouvements, parallèle (z) & perpendiculaire (x) au plan AL , qui sont censés composer le total avant le choc, & le décomposer après le choc. Car la compression du ressort est proportionnelle à la résistance, & à la réaction du corps choqué. Or la résistance infinie, & le plan inébranlable ne sçauroient produire qu'une compression $= x = CX$. Donc la résistance finie & le plan mobile produiront une compression moindre que x avant le choc, & égale, par exemple à $x - p$; p représentant (*Art. IV.*) la vitesse ou la force communiquée au plan par le choc, & perdue par la sphere, selon la direction CX , perpendiculaire à ce plan. Et parce que la restitution du ressort est encore proportionnelle à sa compression, & à la résistance actuelle qu'il rencontre en se rétablissant, il est clair que la force de l'explosion sera moindre que x , & égale de même à $x - p$, dans le cas du rétablissement parfait. Ce qui revient à la supposition du plan inébranlable supprimé dans des instans donnés d'une compression ou d'une restitution actuellement croissantes, & par conséquent incomplètes, comme il a été expliqué *Art. IV. & XI.* & qui représente parfaitement ce qui doit arriver au ressort de la sphere E , lorsqu'elle vient heurter un plan AL , qui fait partie de la surface d'un corps fini.

XL. Corol. 17. D'où il suit, 1°. Que depuis le premier instant de la compression jusqu'au commencement de la restitution du ressort, la sphere E , ou, ce qui est ici la même chose, son centre C , tendra successivement à s'échapper par toutes les directions intermédiaires possibles, Cy , CM , &c. toujours plus inclinées au plan.

2°. Que depuis le premier instant de la restitution du ressort jusqu'à la fin, la sphere tendra successivement à s'éloigner du plan.

352. MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
par toutes les directions intermédiaires possibles Cz, CN, &c.
toujours moins inclinées au plan : ainsi qu'il a été démontré du
plan immobile & inébranlable dans les Articles V. & VI.

A l'égard de l'égalité constante des angles de réflexion & d'incidence, (*Art. VII.*) on voit bien qu'elle ne peut plus avoir lieu, puisqu'elle dépend absolument de l'égalité de rapport des forces composante & composée de la sphere, avant & après le choc, & qu'ici la force x est diminuée d'une quantité finie p , en conséquence de la mobilité du plan, & de la masse finie du corps choqué, de la surface duquel il fait partie, tandis que la parallele z demeure la même. Cette égalité ne sçauroit donc s'y trouver qu'accidentellement, par le mouvement de la sphere autour de son propre centre, & selon la théorie des Articles XXI. XXII. &c. Mais c'est un cas particulier dont il n'est pas question présentement.

Le lieu géométrique (*Art. VIII. Fig. 5.*) de tous les rapports des puissances y, x, z , avec leurs changemens, pendant la compression & la restitution du ressort, mettra sous les yeux ce que nous venons de dire ici des tendances successives de la sphere, & de l'inégalité des angles d'incidence & de réflexion, en y appliquant ce que renferme l'hypothese du plan mobile.

XLI. Les formules qui ont été trouvées *Art. XI. XII. & XIII.* étant générales pour toutes les valeurs possibles des forces ou vitesses, x, z , diminuées ou augmentées d'une quantité arbitraire p ou r , par rapport à ce qu'elles étoient avant le choc, & pour tous les cas possibles de la suppression du plan, dans un instant quelconque pendant l'action du ressort, elles conviendront encore à l'hypothese du plan mobile, ou la renfermeront comme un cas particulier de la réflexion : car nous avons vû que cette hypothese s'explique parfaitement, par la supposition du plan ôté subitement, dans un instant quelconque de la compression, ou de la restitution du ressort. Ainsi les corollaires 2. & 7. (*Articles X. & XV.*) dont l'un est comme la base & le principe de ces formules, & l'autre comme le précis de
toutes

toutes les vérités qu'on en peut déduire, doivent être rappelés, & appliqués à la théorie présente.

Usage des formules, par rapport à la puissance x.

XLII. Soient les trois formules générales, telles que les donne l'article XIII.

$$\Sigma = \frac{S \times 1 \pm r \times y}{1 \sqrt{yy \pm 2px + pp \pm 2rz + rr}}$$

$$pp \pm 2xp + 1 - \frac{SS}{\Sigma\Sigma} + \frac{2SSr}{\Sigma\Sigma z} - \frac{SSrr}{\Sigma\Sigma zz} \times yy = 0.$$

$$\begin{array}{r} \pm 2rz \\ - rr \end{array}$$

$$rr \pm 2zr + \frac{11yy \times \Sigma\Sigma - SS}{\Sigma\Sigma 11 - SSyy} = 0$$

$$+ \frac{\Sigma\Sigma 11 \times pp \pm 2xp}{\Sigma\Sigma 11 - SSyy}.$$

Comme je ne vais examiner d'abord que les cas de la variation de la force ou vitesse x , par l'augmentation ou la diminution qui lui survient de la quantité p , en supposant que la vitesse parallele au plan demeure constante, la troisieme de ces formules, $rr \pm 2zr$, &c. devient inutile, & les deux premieres se changent en

$$\Sigma = \frac{Sy}{\sqrt{yy \pm 2px + pp}},$$

$$pp \pm 2xp + yy \times 1 - \frac{SS}{\Sigma\Sigma} = 0.$$

Mem. 1723.

Yy

Où, mettant à la place de y , sa valeur $\sqrt{xx + zz}$.

$$\Sigma = \frac{S\sqrt{xx + zz}}{\sqrt{xx + zz} \pm 2px + pp + zz},$$

$$pp \pm 2xp + xx + zz \times 1 - \frac{SS}{\Sigma \Sigma} = 0.$$

XLIII. Soit dans la fig. 4. qui a servi à trouver ces deux formules, imaginé un plan idéal, IL , qui passe par le centre de la sphere dans l'instant du choc, qui soit parallele au plan réel ou physique, AL , & qui demeure immobile, tandis que celui-ci, ou plutôt le solide de la surface duquel il fait partie, est chassé de la place AL , par le choc, & continue de se mouvoir sur la direction CX . Car il n'est question ici que du chemin qui suit le centre, C , de la sphere. On la peut même imaginer toute réunie à ce centre, & supposer qu'il ne reste de son volume que la trace d'un de ses grands cercles TRX , pour servir de commune mesure aux sinus des angles qui font entr'elles, & avec le plan, les différentes tendances qu'elle peut acquérir par le choc : ainsi qu'on le voit représenté dans la figure 16.

XLIV. Si l'on cherche maintenant quelles doivent être ces tendances par les différentes valeurs qu'on peut assigner à la quantité p de la premiere formule, on trouvera,

1°. Que $p = 0$, donne $\Sigma = S$.

Fig. 16. 2°. Que $p = \pm x$, ($+x$ lorsque p est positive dans la formule, & $-x$, lorsqu'elle est négative) donne (pour $p = +x$) $\Sigma. S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{4xx + zz}$ où $\Sigma < S$. & (pour $p = -x$) $\Sigma. S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{zz} :: y.z :: CY. XY$, où $\Sigma > S$, & égal au sinus total, Cu , ou CR .

3°. Que $p = \pm 2x$ donne (pour $p = +2x$) $\Sigma. S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{9xx + zz}$. où $\Sigma < S$. & (pour $p = -2x$) $\Sigma = S$.

4°. Que $p = \pm \frac{n}{m} x$, la fraction $\frac{n}{m}$ étant tantôt plus

petite, tantôt plus grande que l'unité, donne divers rapports entre le sinus Σ , & S , selon deux hypothèses : sçavoir dans la première, où l'on supposera $m > n$, (pour $p = + \frac{n}{m} x$)

$$\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times 1 + \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} + zz}$$

ou $\Sigma < S$: mais > 0 , & pour $p = - \frac{n}{m} x$)

$$\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times 1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} + zz},$$

ou $\Sigma > S$, mais plus petit que le sinus total Cu , parce que la grandeur finie $\frac{2n}{m} > \frac{nn}{mm}$, par *hyp.* & par conséquent $1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} < 1$, & > 0 .

Dans la seconde hypothèse ; sçavoir, $\frac{n}{m} > 1$ (& dans le cas de $p = + \frac{n}{m} x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} .$

$$\sqrt{xx \times 1 + \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} + zz} . \text{ ou } \Sigma < S :$$

mais > 0 , tant que la quantité $\frac{n}{m}$ demeurera finie ; car pour rendre $\Sigma = 0$, il faudroit $p = \infty$. Enfin (dans le cas de $p = - \frac{n}{m} x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} .$

$$\sqrt{xx \times 1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} + zz} . \text{ ou } \Sigma > S > DG < DC$$

sinus total.

COROLLAIRES.

XLV. *Corol.* 18. Les deux valeurs, de $p = 0$, & $p = - 2x$, donnent également $\Sigma = S$; mais en sens contraire, par rapport au dessus, ou au dessous du plan IL .

Car $p = 0$, ou $x \pm 0 = x$, suppose que le plan mobile tient à un corps infiniment petit, ou dont la masse est 0, qui ne résiste point du tout au choc de la sphere, & qui ne lui fait rien perdre de son mouvement. C'est pourquoi après avoir rencontré le plan IL , en C , elle doit

Y y ij

356 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
continuer de se mouvoir sur la même direction DC , c'est-à-dire, sur la *ligne d'incidence*, prolongée au-dessous du plan vers Y , comme si elle n'avoit rien trouvé sur son chemin ; & partant $us, (\Sigma) = DG(S)$.

Au contraire, $p = -2x$, ou $x - 2x = -x$ naît de la supposition d'un plan qui tient à un corps d'une masse infinie, & qui par conséquent doit être regardé physiquement comme inébranlable, & d'une résistance infinie. Car $-x$ est la même force que $+x$, mais seulement en sens contraire. D'où il suit que $p = -2x$, fait recouvrer à la sphere par son ressort après le choc, autant de mouvement en arriere, de C vers G , qu'elle en avoit en avant, de G vers C , avant le choc, & qu'elle doit se réfléchir par un angle, VCI , égal à celui d'incidence, DCI , dont le sinus d'inclinaison $\Sigma = S$. (*Art. VII.*)

Ainsi l'on voit que les deux cas $p = 0$, & $p = -2x$ représentent des cas extrêmes dans la nature, la résistance nulle, & la résistance infinie, & que le résultat algébrique de la formule l'indique parfaitement, quoiqu'en apparence l'expression $-2x$ ne dénote que le fini.

XLVI. *Corol.* 19. Il suit encore de $\Sigma = S$, dans $p = 0$, que la sphere ne sçauroit changer de direction tant qu'elle continuera de se mouvoir dans le même milieu, ou, ce qui est ici tout-à-fait synonyme, dans des milieux de même résistance : & par conséquent, lorsque les milieux seront différens, le changement de direction n'arrivera qu'au moment du passage de l'un à l'autre, & à la rencontre de la surface ou du plan qui les sépare. Car après que la sphere a une fois pénétré & percé ce plan, elle n'a plus à se mouvoir que dans le même milieu ; elle y trouvera toujours de tous côtés la même résistance.

XLVII. *Remarque* 6. On voit donc que l'effet dont il s'agit, peut être également représenté par ces trois suppositions ; sçavoir, d'un *plan mobile* rencontré obliquement par la sphere ; d'un *plan pénétrable*, tel que seroit une lame de verre, ou une toile bien tendue ; & enfin d'un *nouveau milieu*, d'un fluide, par exemple, plus ou moins facile à divi-

fer, qui est véritablement le sujet de ce qu'on appelle *réfraction*. Je ne ferai donc point difficulté de substituer l'une de ces idées à l'autre, lorsque je croirai par là pouvoir me rendre plus clair dans mes explications.

D É F I N I T I O N.

1. Je me conformerai aussi à l'usage à l'égard du mot de *réfraction*, & j'appellerai ainsi désormais toutes les réflexions qui se feront au-dessous du plan IL , dans l'angle droit ICX , réservant le nom de réflexions en particulier pour toutes celles qui se feront au-dessus, dans l'angle droit ICT .

2. Du reste pour garder l'uniformité dont j'ai parlé dans les N^o . 2. & 3. des définitions de la première Partie de ces recherches (Art. III. pag. 13.) & par les mêmes raisons, j'appellerai angle d'inclinaison de la réfraction, ou angle du complément, ou angle rompu, celui que fait la ligne de réfraction, CM , ou CF , avec la perpendiculaire ou l'axe de réfraction CX , ainsi qu'en usent de célèbres Auteurs tant anciens que modernes.

3. L'angle de réfraction proprement dit, sera encore, selon ce même usage, celui que forme le rayon rompu, ou la ligne de réfraction, telle que CM , ou CF , avec la ligne ou rayon d'incidence, DCY , &c.

XLVIII. Corol. 20. $p \left\{ \begin{array}{l} = 0. \\ = -2x. \end{array} \right.$ donnant les deux cas extrêmes (Corol. 18.) $p = -x$ doit donner le cas moyen arithmétique entre ces deux extrêmes, puisque $\div 0. - x. - 2x$. Et c'est aussi ce qui résulte de $\Sigma = Cu = CR$ sinus total, qui vient par l'introduction de $p = -x$ dans la formule. D'où il suit que la sphere ayant rencontré le plan réfléchissant en C , continuera de se mouvoir sur l'horizontale CI , ou rasera le plan IL , dont la direction est moyenne entre celle de la réflexion parfaite CV , & celle de la réflexion nulle, CY (en prenant encore ici le terme de réflexion généralement) ou, si l'on veut, il n'y aura ni réflexion, ni réfraction, puisque, selon la définition.

Y y iij

358 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 ci-dessus, la réflexion doit se faire dans l'angle ICT , & la réfraction dans l'angle ICX , & que la ligne CIn est ni dans l'un ni dans l'autre, puisqu'elle en fait la distinction. La masse du plan mobile que ce cas suppose, est encore moyenne entre les deux extrêmes, par rapport à la masse du corps choquant rompu ou réfléchi. Car $p = 0$ est, comme nous avons vû, l'effet d'une masse infiniment plus petite que celle de la sphere, $p = -2x$, au contraire, l'effet d'une masse infiniment plus grande, & $p = -x$ l'effet d'une masse égale, qui tient, comme la sphere même, un milieu entre l'infini de part & d'autre, qui s'éloigne également de sa valeur. Ceci est évident encore par la théorie de l'art. XXXVIII. de deux corps égaux, dont l'un est en repos, & où le choquant va prendre la place du choqué. Car quoique la sphere, qui est poussée obliquement contre le plan IL , continue de se mouvoir sur CI , avec la vitesse z , qui n'a reçu aucune diminution par le choc, elle est néanmoins censée en repos, eu égard au plan, & à la partie de mouvement (x) qu'elle avoit de ce côté, & qui est détruit par la supposition de $p = -x$.

Donc en général, toutes les fois que l'obliquité de l'incidence sera telle, que le sinus de son angle avec le plan, ou sa proportionnelle, CX , (x) sera égale à la résistance du plan, la réflexion & la réfraction seront nulles.

XLIX. Corol. 21. On doit remarquer en général, 1°. que toutes les valeurs positives de p , depuis 0, jusqu'à l'infini, introduites dans la formule, donnent la réfraction, & la donnent au-dessous du rayon incident CY , entre ce rayon, & la perpendiculaire CX , dans l'angle YCX ; telle, par exemple, que CF , enforte que Σ est toujours plus petit que S . Ainsi

$$p = \left\{ \begin{array}{l} + x \\ + 2x \\ + \frac{n}{m}x \end{array} \right\} \text{ donne } \Sigma < S.$$

Car c'est le cas où le plan mobile choqué, ne seroit pas

seulement sans résistance, mais où il donneroit de plus à la sphere un nouveau degré de vitesse perpendiculaire; ce que l'on peut imaginer, en supposant que le plan même frapperoit la sphere vers CX , dans l'instant de la rencontre. Mais nous l'expliquerons bien-tôt par l'idée immédiate d'un nouveau milieu & d'un fluide.

2°. Que toutes les valeurs négatives de p , moindres que x ou 1; sçavoir, $-\frac{n}{m}x$, ou $-\frac{n}{m} < -1$, donnent encore la réfraction: mais au-dessus de CY , & entre cette ligne, & l'horizontale CI , dans l'angle $Y CZ$; comme, par exemple, CM ; enforte que Σ est toujours plus grand que S , en croissant depuis le sinus d'inclinaison de l'incidence, us , jusqu'au sinus total, CR . Car c'est l'effet d'une résistance du plan mobile, telle cependant qu'il reste encore à la sphere un peu de mouvement vers X , par exemple, une quantité CP , & qu'après l'instant du choc, $x - p : x :: CP : CX$.

3°. Que toutes les valeurs négatives de p , depuis 1 x jusqu'à $2x$; sçavoir, $p = -\frac{n}{m}x$ ($-\frac{n}{m} > 1 < 2$) jusqu'à $-2x$, donnent la réflexion, & la donnent au-dessus de l'horizontale CI , entr'elle & la ligne de réflexion parfaite, CV , dans l'angle ICV ; telle, par exemple, que CN . De maniere que Σ est toujours plus grand que S , en décroissant depuis le sinus total CR , jusqu'au sinus d'inclinaison de l'incidence, $Gd = GD = us = S$. Car la réfraction étant, pour ainsi dire, à sa fin, lorsque $p = -x$, ou $x - p = 0$; (*art. XLVIII.*) & la réflexion à son commencement; & ce cas résultant d'une masse ou d'une résistance du plan $= x$, qui donne l'horizontale CZ , comme celui de la réflexion parfaite, résulte d'une masse ou d'une résistance $= \infty$, qui donne la ligne CV , ou l'angle $V CZ = DCL$; il est clair qu'il n'y peut avoir que des cas moyens entre deux, & par conséquent, &c.

4°. Enfin, que toutes les valeurs négatives de p , depuis $2x$ jusqu'à ∞x ; sçavoir, $p = -\frac{n}{m}x$ ($-\frac{n}{m} \geq 2$) jusqu'à ∞ ,

donnent encore la réflexion : mais au-delà de la ligne CV , entr'elle, & l'axe ou perpendiculaire TC , dans l'angle VCT , telle, par exemple, que Cv , enforte que Σ est toujours plus petit que S , en décroissant depuis le sinus d'incidence Gd , jusqu'à 0.

L. *Remarque 7.* Comme il n'y a rien au-dessus d'une masse inébranlable, ou d'une résistance infinie, dont résulte $p = -2x$; il faut nécessairement supposer dans le dernier cas, quelque chose de différent, & une masse, ou une résistance plus qu'infinie; sçavoir une impulsion actuelle du plan du côté opposé au mouvement relatif de la sphere vers ce plan, dans l'instant du choc; ce qui arriveroit, si au lieu de le supposer en repos, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, & comme nous continuerons de le supposer dans la suite, on imaginoit qu'il se mût sur la direction XT , de X vers T . Ce qui donne une hypothese correspondante, quant à l'effet, à celle du tournoyement sur le centre, que nous avons admise dans la premiere Partie (*art. XXI.*) excepté les cas particuliers, où la sphere se réfléchiroit dans l'angle droit TCL , & pour lesquels le mouvement même du plan seroit insuffisant.

LI. *Corol. 22.* On peut déduire de l'article XLIX. qu'il y a plus de cas pour la réfraction que pour la réflexion, & que par là, toutes choses d'ailleurs égales, la réfraction doit être plus fréquente dans la nature que la réflexion.

Car il est évident que le nombre infini de valeurs assignables positives de p , est égal au nombre infini de ses valeurs assignables négatives. Mais nous avons vû dans l'article cité, N°. 1. que toutes les valeurs positives donnent la réfraction, & N°. 2. qu'une infinité de négatives renfermées entre de certaines limites, la donnent encore, tandis qu'il n'y a que les négatives au-delà ($N^\circ 3.$) qui donnent la réflexion. Donc, &c.

LII. *Remarque 8.* Les remarques 2. 3. & 4. (*art. XVII. XVIII. & XIX.*) de la premiere Partie, sur la maniere dont se soutiennent les forces, pendant l'action du ressort & le roulement de la sphere, & sur la courbe que décrit son centre pendant ce même temps, doivent être appliquées aux cas du plan

plan mobile avec les restrictions, & les changemens qu'exige cette hypothese. Par exemple, on voit bien que la résistance du plan n'étant plus infinie, la compression des fibres de la sphere sera moindre, & plus petite (*Fig. 10.*) que $OR=AP$, & par conséquent la courbe qui en résulte, moins courbe, pour ainsi dire, & plus allongée; & d'autant plus, que la dernière direction ou tangente gt , sera plus approchante de la première direction ou ligne d'incidence GT ; c'est-à-dire, selon que le plan LN résistera moins. Mais un des plus grands changemens que la mobilité du plan apporte à cette courbe, c'est que sa première branche, celle qui répond au temps de la compression du ressort, ne sçauroit être semblable à sa seconde branche, qui répond au temps de la restitution, & que celle-ci sera plus allongée & moins courbe que la première. Car dans les premiers instans du choc & de la rencontre du corps réfléchissant, sa résistance est presque égale à celle d'un corps inébranlable, parce qu'il n'a pas eu encore le temps de céder, & qu'il n'a acquis que très-peu de mouvement (*Art. XXXVIII.*) Ainsi toute la compression des fibres de la sphere doit porter sur le centre M , pour le faire descendre vers le plan, tandis que le point touchant R demeure presque immobile. Mais à mesure que le mouvement communiqué au plan augmente; & lorsqu'enfin il est parvenu à une certaine vitesse finie, au temps de la restitution du ressort, les fibres MR ou AQ , se déploient non-seulement vers A , mais aussi vers Q , & d'autant plus vers Q , que le plan LN cede davantage à leur explosion. Or le débandement qui se fait en ce sens, est autant d'ôté à l'espace qu'auroit eu à parcourir le centre vers le côté opposé, M , s'il avoit été chargé seul de toute l'extension & de tout le relevement des fibres comprimées. Donc la courbure de la seconde branche étant rapportée à un plan idéal, qui passe par le point de rencontre dans le premier instant du choc, sera moindre que celle de la première. Par la même raison il est clair que la courbure de cette ligne ira continuellement en décroissant depuis son origine jusqu'à sa fin. C'est ce que nous allons

362 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
encore voir, en examinant cette matiere plus immédiatement par rapport à la réfraction, & sur l'hypothese du fluide même qui en peut être le sujet.

Fig. 17. LIII. Soient (Fig. 17.) deux milieux ou deux fluides *DFL*, *OFL*, séparés par le plan ou surface commune *FL*, & tels par rapport au mouvement de la sphere *TRXB*, & à la vitesse avec laquelle elle se meut dans chacun d'eux, que leurs résistances soient entr'elles comme les lignes *AM*, *EN*, en sorte que $AM < EN$.

Soit maintenant la sphere *TRXB*, poussée obliquement contre la surface *FL*, selon la direction *DY*, qui fait avec ce plan l'angle d'incidence *DYL*, lequel a pour complément ou inclinaison $DCT = YCX$.

Il est évident par l'hypothese du nouveau milieu *FOL*, plus résistant que *FDL*, que le mouvement de la sphere sera plus retardé vers *O*, que vers *F*, & d'autant plus qu'elle s'enfoncera davantage, ou présentera de plus grands segmens à ce milieu. D'où il suit qu'elle décrira un chemin curviligne. Car en la supposant, par exemple, enfoncée dans *FLO*, jusqu'en *IH*, le segment *IXH* aura bien plus de peine à diviser le nouveau milieu de *C* vers *O*, que sa moitié *IX* de *X* vers *F*, non-seulement parce que tout le segment est plus grand que sa moitié, mais encore parce que cette moitié est posée plus obliquement par rapport au mouvement parallele vers *F*. Mais il est clair encore que la courbe décrite par la sphere ou par son centre, doit toujours diminuer de courbure. Car à mesure que la sphere avance dans *FLO*, & que le segment plongé devient plus grand, ses parties de *I* vers *R*, deviennent en même-temps plus obliques au mouvement perpendiculaire, & moins obliques au mouvement parallele. Donc ce que le mouvement perpendiculaire acquiert de retardement sur le parallele, ira toujours en diminuant, & par conséquent la courbe qui résulte de leur composition deviendra toujours moins courbe. Et comme cela continue ainsi jusqu'à l'immersion de la moitié *r x b*, il suit que toute la branche *CK* décrite par le centre

pendant ce temps, diminuera toujours de courbure de C vers K . Mais en cet état, je veux dire la sphere étant en $trxb$, & son centre K sur la surface FL ; je prends garde que la résistance perpendiculaire ne sçauroit plus augmenter, puisque la partie antérieure $rx b$, sur laquelle se fait cette résistance, acheve l'hémisphere, que la partie opposée, ou l'hémisphere postérieur n'y est pour rien, & au contraire, que la partie laterale xr , qui soutient la résistance parallele, & qui n'est parvenue encore qu'à être moitié de la perpendiculaire, augmente toujours, & cela jusqu'à ce que la sphere soit entierement submergée dans le nouveau milieu O , en $\vartheta \rho \xi \beta$, & qu'elle présente parallelement à la surface FL de ce milieu tout un hémisphere $\vartheta \rho \xi$. Donc la résistance perpendiculaire demeurant constante depuis le moment $trxb$, la parallele augmente encore jusqu'en $\vartheta \rho \xi \beta$, où elle lui devient égale. Donc le chemin du centre fera sur une courbe, dont la courbure ira encore en diminuant de K jusqu'en c . Ce qui fait toute la courbe décrite par la sphere dans son changement de milieu; puisque du point c , elle commence à se mouvoir sur la droite cG , tangente en ce point, pour ne plus changer de direction dans la suite, le rapport de ses mouvemens, parallele & perpendiculaire, ne pouvant plus varier. *Corol. 19. Art. LXVI.*

Si l'on rapporte la courbe CKc à l'axe CX prolongé vers O , qu'on prenne sur cet axe les coupées $CP(x)$ les appliquées $PS(y)$ paralleles à FL , & qu'on suppose les dx constans, on aura les dy variables & croissans, & les ddy décroissans jusqu'à 0; c'est-à-dire, jusqu'au point c , où le mobile commence à se mouvoir sur une droite cG . Ou, conformément à l'article (XIX.) de la premiere partie auquel celui-ci répond, faisant les dy constans, on aura les dx , & les ddx variables, & tous deux décroissans, jusqu'au point c , après lequel le rapport des dx aux dy ne change plus. Les dy exprimant donc les augmentations instantanées égales de la résistance parallele, les dx exprimeront les augmentations instantanées décroissantes de la résistance perpendiculaire, &

les dx les excès de ces augmentations sur celles de la résistance parallele. Et si l'on prend encore l'expression (dt) des instans, les dt seront variables dans les deux suppositions précédentes de dx ou dy constant, sçavoir, croissans dans le premier cas, & décroissans dans le second: mais les ddt iront toujours en diminuant dans l'un & dans l'autre cas, & les dt ne pourront être pris pour constans, sans que dx & dy ne soient variables.

Il est très-important de faire attention à ce changement continuel de rapport entre la résistance perpendiculaire & la parallele, depuis l'instant où la sphere a touché la surface du nouveau milieu, jusqu'à celui où elle s'y trouve entièrement plongée; pour ne pas tomber dans l'erreur que le chemin du centre C , ne commence à être curviligne, que lorsque la moitié de la sphere est plongée dans le nouveau milieu comme en $trxb$. Car quoique jusqu'à cet instant la sphere ait présenté parallelement au fluide la moitié du segment qu'elle lui présentait perpendiculairement, ce qui semble donner un rapport constant d'où doit résulter la ligne droite, l'obliquité & la position différente & changeante des parties de ce segment, eu égard aux deux résistances, produit entre elles une variation continuelle de rapport, d'où doit naître la courbe CK : ainsi qu'il a été remarqué ci-dessus.

Du reste il est clair, 1°. Que la courbe CKc aura toujours sa convexité tournée vers le point O , vers le milieu de la plus grande résistance. De sorte que si l'on élève deux perpendiculaires CV , cZ , l'une du point C , où commence la courbe, & sur le côté infiniment petit qui se confond avec la ligne d'incidence tangente en ce point, l'autre du point c , où la courbe finit, & sur le côté infiniment petit qui se confond avec la ligne de réfraction, tangente en ce point, elles concourront en V , & feront entr'elles un angle CVc , qui sera égal à l'angle de réfraction, & dont le complément CVZ à deux droits, du côté du milieu moins résistant, renfermera la développée de la courbe CKc .

2°. Que l'angle de réfraction GcQ , est la quantité dont

la réfraction cG , s'écarte plus de la perpendiculaire TO , que l'incidence DC , dans le cas donné du passage d'un milieu moins difficile à pénétrer dans un plus difficile, & que le sinus ni , de l'angle rompu $Gc\xi$ (Σ), est au sinus $vs=us$, de l'inclinaison d'incidence (S), en raison réciproque des forces de la sphere avant & après le passage, ou en raison directe des résistances, c'est-à-dire (*hyp.*) comme AM est à EN . Car le détour GcQ de la sphere, par rapport au chemin DC , qu'elle tenoit avant que d'entrer dans le nouveau milieu, est la somme de tous les détours infiniment petits qu'elle a soufferts pendant son entrée, comme la résistance actuelle qu'elle éprouve à se mouvoir dans ce milieu, lorsqu'elle y est tout-à-fait plongée, est la somme de la résistance initiale, & de tous les accroissemens successifs qu'elle a éprouvés en s'y plongeant. Mais les résistances totales avant & après le passage ou le choc, sont entr'elles réciproquement comme les forces avant & après le choc, & les forces réciproquement comme les sinus Σ & S , (*Coroll. 2. & 7. Art. X. & XV.*) Donc ces sinus (vs, ni) sont entre eux comme les lignes AM, EN .

3°. Enfin l'inverse du cas précédent est évidente, c'est-à-dire, que si au lieu de supposer, comme nous avons fait dans cet exemple, que la sphere quitte un milieu de moindre résistance, pour entrer dans un milieu de plus grande résistance, on suppose le contraire, tout le contraire aussi arrivera. La courbure du chemin décrit par le centre, sera concave vers le nouveau milieu, la ligne de réfraction se rapprochera de la perpendiculaire, & le rapport des sinus des inclinaisons de l'incidence & de la réfraction, seront en raison renversée des précédens, mais toujours entr'eux comme les lignes AM, EN , proportionnelles aux résistances; & la sphere passera exactement par le même chemin en retournant qu'en allant.

Pour le démontrer sur la même figure, il n'y a qu'à supposer que la sphere va du milieu OFL , dans le milieu DFL , que Gc est la ligne d'incidence ou de l'immersion, CD la ligne de réfraction ou de l'émerision, &c.

LIV. Remarque 2. S'il n'y a pas lieu de croire que les

366 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
parties solides & grossieres des corps soient le sujet immé-
diat de la réflexion de la lumiere , (*Rem. 5. Art. XXXIV.*
premiere Part.) * encore moins devra-t-on présumer que ces
mêmes parties soient la cause de sa réfraction. M. *Newton*
& le P. *Malebranche* le reconnoissent , & admettent l'un &
l'autre , quoique sous des aspects un peu différens , un fluide
subtil qui remplit les pores , & les interstices des parties so-
lides de tous les corps. Quel que soit ce fluide , ce milieu
sujet propre de la réfraction de la lumiere , ou plutôt ces
différens milieux en divers corps transparens appelés soli-
des , ou fluides , je leur applique tout ce qui vient d'être re-
marqué sur les milieux *OFL* , *DFL* , par rapport au passage
de la sphere *TRXB* , de l'un dans l'autre. Et cette sphere
je la prends pour un globule de lumiere transporté actuel-
lement du corps lumineux jusqu'en *FL* , conformément à l'i-
dée de M. *Newton* , ou pour un des petits tourbillons du P.
Malebranche , qui fait effort contre une file de ses sembla-
bles , & qui les pousse vers *FLO* , par les vibrations de pression.
Car comme nous l'avons déjà remarqué , (*Art. XXXIV.*)
cela revient au même. Mais nous retiendrons encore ici , &
dans la suite de ces recherches , l'hypothese de l'émission ac-
tuelle des globules lumineux , comme plus commode pour la
clarté des démonstrations , parce qu'elle réveille dans l'imagi-
nation du Lecteur ce qui se passe tous les jours sous ses yeux.

LV. *Corol. 23.* Il suit des articles précédens , qu'il y au-
ra toujours réfraction dans le passage du milieu plus résistant
(*FOL*) au moins résistant (*FLD*) , & dans le cas où le mo-
bile , la sphere , ou la lumiere , car c'est ici la même chose ,
s'approchera de la perpendiculaire (*TO*) en changeant de milieu.
Et au contraire , que dans le passage du milieu moins résistant
au plus résistant , il y aura réfraction seulement depuis l'incidence
perpendiculaire , jusqu'à celle dont l'obliquité est telle exclusivement
que la quantité du mouvement perpendiculaire (*x*) devient égale
à la résistance du nouveau milieu sur le premier ; après quoi la ré-
fraction manque tout à coup , & il n'y a que réflexion depuis
cette obliquité jusqu'au parallélisme. Ce qui est évident , & dé-

* Le P.
Fabri l'a-
voit déjà
pensé en
1667. *Sy-*
nops. Opt.
pr. 25.
V. Newt.
Opt. l. 2.
part. 3.
pr. 8. Et
Malebr.
Rech. de
la Ver.
Eclairc. sur
la Lum.
Edit. in 40.
1712. t. 2.
p. 352.

montré par les Corol. 20. & 21. (*Art. XLVIII. & XLIX.*)

LVI. *Rem.* 10. On voit aussi par le détail du passage de la sphere dans un nouveau milieu (*Art. LIII.*) que lorsqu'elle va du milieu moins résistant au plus résistant, le chemin du centre CKc devient toujours de plus en plus oblique à la surface FL , & approche d'elle & du parallélisme, jusqu'à ce que toute la sphere $\mathcal{P}\xi\beta$, soit plongée dans le nouveau milieu FOL ; après quoi le chemin cG demeure rectiligne (*Art. XLVI.*) & le sinus ni de son inclinaison est à celui de l'inclinaison d'incidence vs ou us , comme la résistance de FOL , à celle de FDL . Mais si par la destruction de la puissance x (p étant $=x$, qui est le cas de la résistance égale à l'effort perpendiculaire) ni devient $pc = rK$ confondu alors avec la tangente en K , la sphere continuera son chemin sur Kr prolongée, la même que LF . Car dans cette hypothese la sphere étant en $trxb$, & son centre en K sur LF , elle a éprouvé une résistance exactement $=x$, & toute celle qu'elle peut éprouver en ce sens, à cause de l'immersion de tout l'hémisphere rxb . D'où il suit qu'elle doit se plonger jusques-là, & non davantage. Ce qui donne physiquement le cas moyen entre la réfraction & la réflexion trouvé algébriquement par la formule, *Art. XLVIII.* Que si la résistance devenoit moindre ou plus grande que x , d'une quantité infiniment petite, il est clair que dans le premier cas la sphere s'enfonceroit totalement dans le nouveau milieu, & y suivroit une direction infiniment proche de $\mathcal{S}F$ ou LF , & au-dessous; & que dans le second son hémisphere rxb ne se plongeroit tout entier dans LOF qu'à une quantité infiniment petite près, que son centre K suivroit une direction au-dessus, & infiniment proche de KF ou LF , & que la sphere ne cesseroit de toucher LOF qu'à une distance infinie du point de rencontre X . Nous faisons abstraction des obstacles accidentels, de la pesanteur, du fluide qui s'amonceleroit devant r , &c.

LVII. *Corol.* 24. Il est encore évident par la même théorie, & dans les cas d'un excès fini quelconque de la résistance sur l'effort perpendiculaire x , que la sphere doit demeurer d'autant plus de temps à se dégager du nouveau milieu FOL , & par

conséquent le chemin CK du centre être d'autant plus long, que l'excès de la résistance sera plus petit. Car c'est un cas moyen entre cet excès $= 0$, où l'hémisphère rxb ne sort plus du milieu FOL après y être entré, & de cet excès $= \infty$ où il n'y entre point du tout, ce dernier étant le cas de la réflexion parfaite, & du corps solide & inébranlable.

LVIII. Rem. 11. Il n'est donc pas étonnant que la lumière ne se rompe point du tout, en frappant avec une certaine inclinaison la surface des corps diaphanes, dans lesquels elle ne sçauroit entrer sans s'écarter de la perpendiculaire, & qu'au contraire elle se rompe toujours après avoir frappé, sous quelque inclinaison que ce puisse être, la surface de ceux où elle s'en approche en y entrant. C'est ce que j'avois espéré rendre sensible, & que j'avois promis dans mon Memoire de 1719, sur la cause générale du froid en hyver, & de la chaleur en été *. C'est, dis-je, sur ces principes que j'ai avancé qu'il n'y avoit pas moins de rayons du soleil rompus, & qui passaient à travers l'atmosphère, lorsqu'ils tomboient sur sa surface plus obliquement que lorsqu'ils y tomboient moins obliquement, & qu'on n'avoit pas été fondé à compter en ce sens l'obliquité des rayons pour une des causes du froid en hyver. Car indépendamment de l'induction prise de la densité des milieux, & des réfractions astronomiques qui élèvent toujours les astres sur l'horison, on sçait aujourd'hui par des expériences faites en Angleterre * & en France ** avec beaucoup d'exactitude, que la lumière s'approche de la perpendiculaire, en passant du vuide ou de l'éther dans l'air.

LIX. Cor. 25. Comme dans l'immersion successive des parties de la sphere, la somme de tous les accroissemens de résistance, ou, dans un autre cas de facilité, que la sphere trouve en passant d'un milieu dans un autre, est égale à la résistance ou à la facilité finale (Art. LIII. N°. 2. p. 365.) & la somme des réfractions, ou des détours vers la perpendiculaire, ou vers la parallèle, pendant ce passage, égale à la réfraction & au détour total, ou à celui qu'elle souffriroit d'abord si elle étoit sans parties, & réduite à un point indivisible; de même dans le passage suc-

cessif.

* P. 109
& suiv.

* Par M.
Lowthorp
& Hauks-
bée. Voy.
Trans. Phil.
num. 257.
& Exper.
Physico-
Mechan.
d'Hauks-
bée, page
114. imp.
à Florence
en 1716.

** Par M.
Delisle
Astronome,
Mem. de
l'Académie
1719. P. 12.
730.

cessif d'une sphere à travers plusieurs milieux continuellement croissans, ou décroissans en résistance, en rareté, ou en densité, la somme des accroissemens, ou des décroissemens de résistance, des réfractions & des détours vers la perpendiculaire, ou vers la parallele, sera égale à la résistance, ou à la facilité, & à la réfraction finale; c'est-à-dire, à celle qu'elle eût éprouvée, si elle eût passé immédiatement du premier milieu qu'elle quitte, dans le dernier où elle va. Et comme dans le cas d'un seul nouveau milieu, la courbe décrite par le centre de la sphere est le résultat de tous les petits détours rectilignes arrivés pendant l'immersion successive de ses parties dans le nouveau milieu; de même dans le cas de plusieurs différens milieux de suite, la courbe totale décrite par le centre de la sphere, sera le résultat, & pour ainsi dire, l'intégrale de toutes les petites courbes décrites pendant son passage à travers tous les différens milieux.

C'est ainsi que la lumiere en venant de l'éther jusqu'à nous à travers les différentes couches de l'atmosphère, toujours d'autant plus denses qu'elles sont plus proches de nous, doit décrire une courbe résultante de toutes celles que décrit un de ses globules quelconques, pendant toutes les réfractions successives qu'il y souffre, & dont la somme est égale à la réfraction qu'il auroit d'abord soufferte, s'il eût passé immédiatement de l'éther dans la couche d'air la plus proche de la terre.

LX. Corol. 26. Tout mobile qui passe d'un milieu qui lui résiste moins, & où il se meut avec plus de facilité & de vitesse, dans un autre, qui lui résiste davantage, & où il se meut avec plus de difficulté & de lenteur, s'écarte de la perpendiculaire en y entrant. Et au contraire.

Cette proposition suit nécessairement du principe de l'art. X. & devient évidente par le détail de l'art. LIII. où l'on voit que le détour de la réfraction vers la parallele est toujours l'effet du plus de résistance de la part du nouveau milieu, & du moins de vitesse ou de facilité de la part du mobile qui passe dans ce milieu, comme le détour vers la perpendiculaire est l'effet du moins de résistance de la part du mi-

370 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
lieu, & du plus de vitesse ou de facilité de la part du mobile.

LXI. Corol. 27. *Donc la lumiere se meut avec plus de facilité, & trouve moins de résistance dans les milieux où elle s'approche de la perpendiculaire en se rompant, que dans ceux où elle s'en écarte.*

Car personne ne doute aujourd'hui que ce qui fait le sujet de la lumiere ne soit un être corporel, & qu'on ne doive raisonner de son mouvement ou de ses tendances au mouvement, comme on feroit à l'égard de tout autre mobile.

LXII. Rem. 12. Ces deux corollaires ne font que présenter sous d'autres termes ce que nous avons démontré de plus fondamental sur cette matiere; & ils sont une suite si nécessaire de la loi d'équilibre, qu'il n'y a, ce me semble, aucune sorte d'hypothese d'impulsion, ni d'attraction, qui puisse les infirmer le moins du monde. J'aurois crû même tout-à-fait inutile de les énoncer, si des auteurs célèbres du dernier siecle n'avoient adopté un sentiment tout différent. Aussi ces deux articles, de même que les experiences qui ont été faites de nos jours sur ce sujet*, peuvent-ils être regardés plutôt comme un hommage rendu à la mémoire des sçavans hommes qui les ont combattus, que comme un nouveau moyen de s'assurer d'une vérité, qui ne differe pas de nos connoissances les plus certaines sur les propriétés de la matiere & du mouvement.

Pour peu qu'on soit instruit de l'Histoire littéraire du temps de M. Descartes, on sçait la dispute qui s'émût entre lui & M. de Fermat sur la réfraction de la lumiere. Une grande partie du troisieme tome des Lettres de M. Descartes ne roule que sur ce sujet. L'on y trouve les objections, les réponses, & les répliques de part & d'autre. Ce sont en effet, comme le disoit M. Descartes lui-même*, *les pieces du petit procès de mathématique qu'il avoit contre M. de Fermat, & que celui-ci appelloit de son côté, sa petite guerre contre M. Descartes* *. M. Descartes frappé de l'évidence du principe, & sans s'embarrasser de ce qu'il y pouvoit avoir de douteux, ou de tout-à-fait caché dans la cause physique

* Hist. de
l'Académie,
1702. p. 12.
14. Mém.
1705. pag.
211.

* Let. 42.
P. 193.

* Let. 36.
P. 168.

du phénomène, disoit : les rayons de lumière s'approchent de la perpendiculaire en passant de l'air dans un milieu plus dense, dans l'eau, par exemple, ou dans le verre ; donc les rayons de lumière se meuvent avec plus de force & de facilité dans l'eau ou dans le verre, que dans l'air, & en général, dans les milieux plus denses, que dans les moins denses. *M. de Fermat* au contraire, argumentant de la densité visible de ces corps à leur prétendue résistance par rapport à la lumière, ou à la moindre facilité que la lumière devoit trouver à les traverser, soutenoit que le principe de dioptrique de *M. Descartes* étoit faux, puisque les rayons de lumière s'approchoient de la perpendiculaire en entrant de l'air dans l'eau ou dans le verre, & d'un milieu moins dense dans un plus dense, & qui, selon lui, leur résistoit davantage. C'est principalement sur ce point que roula la dispute, & que leurs amis ou leurs disciples se partagerent pendant la vie, & après la mort de l'un & de l'autre ; comme on peut voir par quelques-unes de leurs lettres sur ce sujet, qui ont été mises dans le même volume, avec celles de *M. Descartes*, & de *M. de Fermat*.

Entre tous les auteurs qui écrivirent dans ces temps-là sur cette matière, aucun, ce me semble, ne donna une explication physique plus ingénieuse de la réfraction, conformément au principe de *M. de Fermat*, que celle qu'on trouve dans le *P. Maignan* *, & qui a été adoptée depuis par un très-sçavant Géometre **. Mais elle est absolument dépendante de l'hypothèse, dont nous avons déjà fait sentir l'absurdité, (*Art. XXXIII. & XXXIV.*) que les parties de la lumière soient de figure cylindrique ou prismatique, & qu'elles se présentent toutes, & constamment, selon la même position à l'entrée du milieu réfringent. Je ne me souviens pas néanmoins que *M. de Fermat* en ait fait mention. Mais il parut extrêmement flaté du suffrage de *M. de la Chambre*, qui embrassa son opinion dans un traité sur la lumière, qu'il donna au public dans le temps de la plus grande chaleur de cette dispute. A en juger par les raisonnemens de cet Auteur, tous

* *Perspectiva horaria*, lib. 4. prop. 32. *Romæ*, 1648.

** *Barrow*, *Lect. Opt.* II. art. IV.

dans le goût de l'ancienne philosophie, & fondés la plupart sur je ne sçai quelle *antipathie naturelle*, qu'il imaginoit de la *lumiere avec la matiere* *, on ne croiroit pas qu'un esprit du caractère de M. de Fermat eût voulu s'en faire honneur. Cependant il souhaita dès-lors d'entrer en société avec M. de la *Chambre*, & il lui dit à cette occasion: * *J'ose vous assurer par avance, que si vous souffrez que je joigne un peu de ma géométrie à votre physique, nous ferons un travail à frais communs, qui nous mettra d'abord en défense contre M. Descartes & tous ses amis.* Mais les raisonnemens de M. de la *Chambre*, aussi-bien que ceux de M. de Fermat, furent réfutés avec tant de force par M^{rs}. Rohault & Clerfeliier, qu'il y a toute apparence que M. de Fermat lui-même se rendit de bonne foi, quelque peu de temps avant sa mort: *Il croise les armes* *, dit-il, *il cede la victoire, & le champ de bataille* **, pourvu qu'on lui laisse une vérité géométrique qu'il démontre sur cette matiere, & dont nous aurons bientôt lieu de parler. Mais malgré cet aveu, & l'évidence du principe cartésien, l'opinion de M. de Fermat a eu de célèbres sectateurs après sa mort.

Ce qu'il y a ici de surprenant, c'est qu'on n'ait pas senti la prodigieuse différence qu'il y avoit entre la clarté des démonstrations que M. Descartes & ses disciples donnoient de la proposition renfermée dans le Corol. 26. (*Art. LX.*) & l'objection de M. de Fermat toute fondée sur la densité apparente de certains corps, tels que l'eau ou le verre, par rapport aux rayons de lumiere. Ne suffisoit-il pas d'entrevoir que malgré la pesanteur, ou la dureté, ou la quantité de matiere propre de ces substances en comparaison de l'air, il n'étoit pas impossible qu'en vertu de quelque tissu de parties qui échape à notre vûe, elles présentassent aux rayons de lumiere un passage plus libre, plus direct, & moins interrompu, que ne faisoit l'air? Car enfin rien ne s'oppose dans notre esprit à la vérité du principe considéré en lui-même: mais nous voyons bien que nous sommes encore très-éloignés de connoître la structure particuliere & intrinsèque des corps. C'est, pour le dire ici en passant, une illusion dans

* La Lumiere, p. 354.

* Let. 50. p. 246.

* Let. 51. p. 256.

** Let. 54. p. 297.

laquelle tombent d'ordinaire ceux qui voudroient exclurre de la physique tout principe de pure spéculation , en faveur des expériences. Ils sont toujours prêts à renoncer à la lumière d'une vérité qui les frappe , pour la premiere obscurité qu'ils viendront à appercevoir dans quelqu'une des conséquences. Ce n'est pas que la voie des expériences ne soit excellente dans la physique , & en un sens préférable à celle du raisonnement. Il faut bien même que tôt ou tard & les expériences & le raisonnement concourent, & que la conséquence soit parfaitement d'accord avec le principe , & aussi clairement apperçûe. Mais il y a des matieres , & celle que nous traitons est peut-être de ce nombre , où l'esprit découvrir nécessairement beaucoup plus que les yeux , & où ce qu'on appelle l'expérience, sans être contraire aux vérités démontrées , ne pourra de long-temps les justifier d'une maniere visible & palpable. Cependant après tout ce que les expériences & le raisonnement nous ont appris aujourd'hui sur la lumière & la diaphanéité , on peut dire que la possibilité alléguée par les disciples de M. *Descartes* sur la perméabilité des milieux denses par rapport à la lumière , est devenue incontestable , & très-aisée à concevoir. Car dès que les parties solides des corps ne sont plus la cause immédiate de la réfraction , & qu'il faut avoir recours à un fluide répandu dans leurs pores, la lumière rentre à cet égard dans le cas de tout autre mobile , qui se détourne de son chemin à la rencontre d'un nouveau milieu. Ses globules ont à traverser ce nouveau fluide , qui peut résister plus ou moins à leur mouvement, & être dit à leur égard plus ou moins dense , selon sa densité particuliere , indépendamment de la densité totale de la matiere dont il remplit les interstices. Dans ce sens étroit & exact , la densité du milieu , & sa résistance par rapport à la lumière , sont univoques : mais en général, & selon la commune maniere d'entendre ces termes, ils peuvent être équivoqués ; puisque l'expérience nous apprend que le rayon rompu s'approche d'autant plus de la perpendiculaire , ou , ce qui revient ici au même , trouve d'autant moins de résis-

tance , que les corps transparens qu'elle pénètre sont plus péfans , plus solides , & en total plus denses. Et il n'y a nulle induction à tirer de cette densité des corps , contre la grandeur ou le nombre des pores dont ils sont semés , & qui donnent passage à la lumiere. Car outre que dans les corps qui nous paroissent les plus solides , la quantité de matiere propre est peut-être fort petite en comparaison des vuides & des interstices qu'elle y laisse , ces vuides & ces interstices peuvent y être répandus & configurés de tant de manieres , qu'on ne sçauroit s'assurer par-là qu'un corps soit plus ou moins perméable à la lumiere qu'un autre. C'est à la seule expérience à le décider. On peut même avancer , & M. Keili * l'a démontré , qu'il n'est pas impossible que les pores d'un corps , & le fluide qui remplit ces pores soient à très-peu-près en égale quantité dans des corps très-inégaux en solidité , & tels , par exemple , que sous le même volume l'un contienne dix mille ou cent milie fois plus de matiere propre que l'autre. Il n'est pas impossible par conséquent que les espaces vuides ou remplis de matiere subtile dans un pouce cubique de verre ou d'or , soient presque aussi grands que les espaces vuides ou remplis de matiere subtile dans un pouce cubique d'air. D'ailleurs entre tous les pores d'un corps , il n'y a vrai-semblablement que ceux d'une certaine grandeur , d'une certaine figure , & d'une certaine continuité , qui admettent le fluide *réfringent* , & qui laissent passer la lumiere. Ainsi la quantité , & la force du fluide *réfringent* dans le corps le plus solide & le plus dur , peuvent l'emporter sur la quantité , & la force du fluide *réfringent* dans le corps le plus léger & le plus rare. Mais la force de ce fluide pourroit encore se trouver plus grande ou plus petite , & agir plus ou moins sur la lumiere , indépendamment de sa quantité , ou de la grandeur des pores du milieu. Que les milieux diaphanes les plus denses & les plus pesans soient donc ceux où la lumiere se meut avec le plus de facilité & de vitesse , & où elle s'approche le plus de la perpendiculaire , c'est un fait dont nous pouvons ignorer la cause physique , & le détail , mais qui n'a rien en

* *Introd.*
ad veram
physicam ,
sect. V.
Theor. 2.

foi de contraire aux autres faits que nous sçavons sur la même matiere , & qui ne puisse être réduit aux mêmes principes.

LXIII. *Rem.* 13. Le différent tissu des parties solides & intégrantes des divers milieux, soit par la grandeur, soit par la figure, ou par la direction & l'arrangement de leurs pores, fournit une explication très-naturelle d'un phénomène de la réfraction de la lumiere, rapporté dans la plupart des auteurs modernes qui ont écrit sur ce sujet. C'est que la lumiere ne se rompt jamais, qu'elle ne se réfléchisse en partie. Par exemple, si un rayon de lumiere tombe obliquement de l'air sur la surface d'un verre plan ou convexe d'une certaine épaisseur, il passera en partie dans le verre en s'y rompant selon la loi de la réfraction, & retournera en partie dans l'air, en s'y réfléchissant selon la loi de la réflexion. Cette partie rompue dans le verre, après l'avoir traversé, venant à en sortir & à rencontrer la surface de l'air, se rompra encore de nouveau en partie à sa rencontre pour passer dans l'air, & se réfléchira en partie pour retourner dans le verre, & vers l'air supérieur, où la même chose arrivera, & ainsi de suite à l'infini.

Dès que nous avons ôté l'équivoque de la solidité, de la densité & de la fluidité des corps, en tant que diaphanes, en faisant voir qu'ils doivent tous être en partie solides, & en partie fluides, & présenter à la lumiere une certaine quantité de leur matiere propre que ses globules ne peuvent pénétrer, & en même temps un fluide qui remplit leurs pores, & que ses globules pénètrent, il n'est plus mal-aisé de concevoir comment la surface d'un nouveau milieu peut rompre & réfléchir en partie un rayon de lumiere. Car ce rayon venant à trouver de nouveaux passages & des pores autrement disposés, autrement configurés, & d'une grandeur différente, il faut nécessairement qu'il rencontre entre deux quelques parties solides proprement dites placées vis-à-vis la partie fluide des pores du milieu d'où il vient, & par conséquent qu'il s'y réfléchisse. Et il n'y a rien là de contraire à ce que nous avons dit (*Art. XXXIV. & LIV.*).

que vrai-semblablement la réflexion de la lumière, non plus que sa réfraction, ne se fait pas par le contact immédiat des particules solides des corps qu'elle frappe, mais par la rencontre d'un fluide subtil repandu dans leurs pores, &c. Car il faut concevoir, selon la même hypothèse, que les parties du corps diaphane qui réfléchissent la lumière, sont en cela dans le cas des corps opaques & polis; & par conséquent qu'elles sont composées de parties intégrantes, ou de molécules qui admettent dans leurs interstices, & sur leur superficie, ce fluide sujet propre de la réflexion de la lumière, sans préjudice au fluide *réfringent*, qui remplit les intervalles semés entre ces parties ou ces molécules.

Mais il semble qu'on pourroit tirer du phénomène dont il s'agit, une induction toute contraire à celle du Corol. 22. *Art. LI.* & dire, s'il n'y a jamais de réfraction sans réflexion, y ayant une infinité de cas où le rapport de résistance des milieux donne la réflexion sans réfraction (*Corol. 23. Art. LV. & Rem. 11. Art. LVIII.*) Donc la réflexion doit être en plus grande quantité, & plus fréquente dans la nature, que la refraction.

A quoi je réponds, que si la quantité des corps diaphanes étoit plus grande que celle des corps opaques, en raison, par exemple de 5 à 1, & que la quantité moyenne de la lumière rompue par les premiers, fût à la quantité moyenne de la lumière qu'ils réfléchissent en même temps, en raison de 2 à 1, la somme totale de la lumière rompue seroit plus grande d'un $\frac{1}{2}$ que celle de la lumière réfléchie; ainsi le phénomène n'empêche pas que l'induction du corol. 22. prise en ce sens, ne puisse subsister dans toute sa force. Cette induction se changera même en proposition incontestable, si l'on fait attention à l'étendue immense des esprces qui sont perméables à la lumière dans l'univers, en comparaison de ceux qui ne le sont pas; comme aussi à la vivacité de la partie rompue d'un rayon de lumière à la rencontre du verre ou de l'eau, en comparaison de sa partie réfléchie.

réfléchie. Ce dernier fait est quelquefois difficile à vérifier directement, parce que l'œil ne discerne pas toujours les différentes densités de la lumière, malgré l'extrême inégalité qu'il y peut avoir entr'elles, comme il a été observé, *Mem.* 1719. p. 115. Mais je m'en suis convaincu par des expériences dont je rapporterai le détail dans une autre occasion, s'il est nécessaire.

Ce n'est pas là cependant l'objet du Corollaire, son véritable sens le met encore plus à couvert de l'objection. Il n'est pas question, dis-je, de sçavoir si de tous les globules qui forment un rayon sensible, & qui tombent obliquement sur la surface d'un nouveau milieu, comme sur une grille, il y en a un plus grand nombre de rompus par la partie qui est perméable, que de réfléchis par celle qui ne l'est pas; il s'agit seulement de prouver qu'un globule étant donné, & ayant à frapper obliquement la surface d'un nouveau milieu; entre tous les rapports possibles de résistances de ce milieu, & de celui d'où vient le globule, la somme infinie des rapports qui donnent la réfraction est plus grande que la somme infinie des rapports qui donnent la réflexion. Et c'est ce qui est évident par le détail de l'article qui précède ce Corollaire.

LXIV. Corol. 28. *Le temps employé par un mobile à passer d'un milieu dans un autre par le chemin de la réfraction, est plus long que le temps qu'il employeroit à y aller par une seule ligne droite.*

On voit d'abord en général, que le chemin de la réfraction n'est pas celui du temps le plus court, si l'on prend garde, que pour diminuer le temps, il faut raccourcir le chemin dans le milieu *le plus difficile*, où le mobile se meut avec moins de vitesse, & le prolonger dans le milieu *le plus facile*, où le mobile se meut avec plus de vitesse. Or il arrive tout le contraire au chemin de la réfraction, il devient plus oblique, & plus long dans le milieu le plus difficile, en s'y éloignant de la perpendiculaire (*art. LX.*) & plus direct, & plus court dans le milieu le plus facile, en s'y approchant de la perpendiculaire. Donc, &c.

Mém. 1723.

Bbb

Fig. 18.

Mais pour démontrer plus particulièrement la proposition dont il s'agit, soit M un mobile qui doit aller du point M au point G , en traversant deux milieux PH , PG , séparés par la ligne PL , également distante des points M , G . Soit supposé le milieu PH plus difficile à pénétrer que le milieu PG , en sorte que le mobile allant d'un mouvement uniforme dans chacun d'eux, sa vitesse (v) dans PH , soit plus petite que sa vitesse (V) dans PG . Si l'on mène MG , qui coupe obliquement PL , en Y , & que sur le côté YL , de l'angle obtus LYM , on prenne le point A , à une distance quelconque, AY , du point d'intersection, Y , & de manière, qu'ayant joint MA & AG , MA soit plus oblique, & AG moins oblique à PL , que n'est MY , ou GY ; je dis que le mobile emploiera plus de temps à parvenir du point M au point G , en passant par le point A , & parcourant les droites MA , AG , qu'en passant par le point Y , & parcourant la droite MG .

Car les temps étant égaux aux longueurs parcourues divisées par la vitesse, on a $\frac{MA}{v} + \frac{AG}{V} = T$, & $\frac{MY}{v} + \frac{YG}{V} = t$ (T , & t exprimant les sommes des temps employés à parcourir les chemins $MA + AG$, & $MY + YG$.) Il faut donc faire voir que $T > t$, ou, ce qui revient au même, que $\frac{MA}{v} + \frac{AG}{V} > \frac{MY}{v} + \frac{YG}{V}$, & réduisant, $MAV + AGV > MYV + YGV$.

Soient YM , & YG , prolongées également de part & d'autre, vers D , & vers O ; en sorte que la totale DO , soit égale à $MA + AG$. On aura encore $\frac{DY}{v} + \frac{YO}{V}$, ou, $DYV + YO V$, pour l'expression des temps. (9) par DO ; & il est évident que $\mathfrak{D} > t$; ou $DYV + YO V > MYV + YGV$, puisque, toutes choses étant d'ailleurs égales,

le chemin $\overline{DY} + \overline{YO}$, $= \overline{DO}$, est plus long que le chemin $\overline{MY} + \overline{YG} = \overline{MG}$. Si je prouve donc que $T > \vartheta$, à plus forte raison aurai-je prouvé que $T > r$. Mais, ayant fait $\overline{MA} - \overline{AG} = 2F$, on sçait que $\overline{DY} + F = \overline{MA}$, & $\overline{YO} - F = \overline{AG}$, à cause (*constr.*) de $2DY$, ou $2YO = \overline{DO} = \overline{MA} + \overline{AG}$. Mettant donc ces valeurs à la place de \overline{MA} , \overline{AG} , & comparant les sommes T , $(\overline{MAV} + \overline{AGv})$ & $\vartheta(\overline{DYV} + \overline{VOv})$; on trouvera d'un côté, $\overline{DY} + F \times V + \overline{YO} - F \times v$, & de l'autre seulement, $\overline{DY} \times V + \overline{YO} \times v$, ou, parce que $YO = DY$, $T = \overline{DY} \times \overline{V} + v + F \times \overline{V} - v$, & $\vartheta = \overline{DY} \times \overline{V} + v$, où il est clair que $T > \vartheta$ de toute la quantité $F \times \overline{V} - v$, laquelle ne sçauroit jamais être négative, ni égale à zéro, à cause que par hypothèse $V > v$. Donc $T > \vartheta > r$. Et parce que le point A n'est autre chose ici que le point *anaclastique*, ou de réfraction, & \overline{MAG} le chemin de la réfraction, conformément à l'art. LX. Donc, &c.

LXV. *Corol.* 29. Si l'on mene GLH perpendiculaire à LP , en sorte que LH soit égale à LG , la ligne HA sera celle de la réflexion, dans le cas où PL seroit changée en un plan inébranlable & impénétrable, & où le mobile M , acquerrait en A , une vitesse égale à celle avec laquelle il se meut dans le milieu PG , ou, pour rendre la chose plus aisée à imaginer, GA , & HA , devenant les lignes d'incidence, AM , devient ligne de réfraction, lorsque le mobile venant de G , passe du milieu PG , où sa vitesse est V , dans le milieu PH , où sa vitesse est v ; & la même AM , devient ligne de réflexion, lorsque le mobile venant de H , rencontre en A , sur le plan inébranlable PL , un obstacle quelconque, qui lui fait perdre une partie de son ressort, en raison de V à v , ou de MA à HA , ou des sinus d'inclinaison de l'angle d'incidence, & de celui de réfraction ou de réflexion.

380 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 xion, ou enfin en raison réciproque des forces, avant & après la rencontre du point *A*. Car par la construction de la figure, où les points *M*, *G*, *H*, sont supposés à égale distance du plan romphant, ou réfléchissant, la perpendiculaire *PM*, ou *LG*, ou *LH*, étant prise pour rayon, ou sinus total, les lignes *MA*, & *AG*, *AH*, deviennent les sécantes des angles d'inclinaison, que *Snellius* a trouvé, qui conservoient toujours le même rapport entr'elles, & que *M. Descartes* a fait voir être en raison des sinus de ces mêmes angles; ou enfin, qui sont réciproquement comme les vitesses; ou, ce qui est ici la même chose, comme les forces avant & après le choc, ainsi qu'il a été démontré ci-dessus, art. X. & LIII.

LXVI. Corol. 30. D'où il suit, que dans les cas des mêmes quantités, & du même rapport de forces, avant & après le choc, le temps de la réflexion est égal à celui de la réfraction, & qu'en général, tant dans la réflexion, que dans la réfraction, le chemin que suit le mobile n'est pas celui du temps le plus court.

LXVII. Corol. 31. Il suit encore qu'en général le chemin de la réflexion, non plus que celui de la réfraction, n'est pas le plus court en longueur. Puisque $GA + AM = HA + AM > GY + YM = HY + YM$, & qu'il n'y a que le cas particulier où le point *A* se confond avec *Y*, & où le rapport des vitesses avant & après le choc est le même, qui soit celui du chemin le plus court.

LXVIII. Remarque 14. La prétendue propriété du plus court temps dans le chemin de réfraction, fut imaginée par *M. de Fermat*, en faveur du principe qu'il soutenoit contre *M. Descartes*, que la lumière devoit s'approcher de la perpendiculaire, en passant d'un milieu moins dense, c'est-à-dire, moins résistant, dans un plus dense ou plus résistant. C'est-là cette vérité géométrique sur laquelle nous avons déjà remarqué que *M. de Fermat* se retrancha dans cette dispute, lorsqu'il vint à céder sur tout le reste. En effet, si l'on reçoit son principe, & qu'on suppose que la lumière emploie un temps à passer d'un milieu dans un autre, il faudra néces-

fairement avouer la conséquence, qu'elle y passe par le chemin de la plus courte durée.

Cette propriété assez brillante par elle-même, favorisant d'ailleurs un certain accord du mécanisme de la nature avec la simplicité des vûes qu'on a coutume de lui attribuer, & avec la théorie des causes finales, fut aussi adoptée avec éloge par M. *Leibnitz* grand protecteur de ces causes, & de leur emploi dans la Physique. Ce fut en 1682 * que parut un ouvrage de cet illustre Auteur, où il voulut réduire toute l'optique, la catoptrique, & la dioptrique, à ce principe unique, que la lumière va toujours d'un point à un autre, ou par le chemin le plus direct, ou par le plus court, ou par celui de la moindre durée. Il étoit aisé d'en faire voir la convenance avec la propagation ordinaire de la lumière, qui se fait toujours en ligne droite, & avec sa réflexion, qui se fait aussi par le chemin le plus court, quoique, à l'égard de la réflexion, le principe ne puisse avoir lieu, comme nous avons remarqué (*art. XV. & LXVII.*) que dans un seul cas particulier. Mais pour l'appliquer à la réfraction, M. *Leibnitz* fut obligé de supposer avec M. *de Fermat*, que la lumière s'approche de la perpendiculaire dans les milieux où elle se meut plus lentement, & qui lui résistent davantage. Je dis qu'il y fut obligé, parce que sans cela je n'imagine pas comment, après tout ce qui avoit été dit là-dessus par les Cartésiens, ce grand Géometre eût pû recevoir un principe si manifestement contraire aux loix de Statique. Il paroît en effet que tandis que M. *de Fermat* ne met en œuvre la propriété du plus court temps, que pour faire valoir le principe, M. *Leibnitz* n'a recours au principe, que pour maintenir la propriété, & établir la cause finale, qu'il érige elle-même en principe fondamental sur cette matière. M. *Leibnitz* démontre donc cette fameuse propriété, à l'aide de la supposition qu'elle renferme, & par son calcul *de maximis & minimis*, conjointement avec le calcul différentiel, dont il ne donna l'algorithme, que deux années après. Mais il fait plus encore : convaincu de la nécessité qu'il y avoit d'introduire les causes finales

* Dans les
Acta Erud.
1682. pag.
185. sous
le titre de
Unicum
opticæ, ca-
toptricæ &
dioptricæ
principium.

dans la Physique, & persuadé que cette maniere de philosopher étoit préférable en plusieurs rencontres à toute autre, il tâche de décréditer, comme pernicieuse, la maxime de M. *Descartes*, qui veut qu'on raisonne seulement sur la cause prochaine & mécanique de la structure particuliere des corps. On sçait de quelle maniere ce Philosophe s'en explique dans ses *principes*, & dans quelques autres de ses ouvrages. C'étoit assurément un des hommes du monde le plus capable de juger de l'étendue & des bornes de notre esprit. Mais il étoit persuadé que si nous sommes peu en état de découvrir ce qui se passe dans la nature par l'inspection de la nature même, & des loix du choc des corps, nous sommes apparemment encore moins à portée de la connoître par la fin que son Auteur s'est proposée en établissant ces loix. Peu s'en faut cependant que M. *Leibnitz* ne traite la sage retenue de M. *Descartes*, & de ses disciples, sur cette matiere, d'erreur plus que philosophique. *Itaque*, ajoute-t'il, après avoir rehaussé l'excellence de la propriété de la lumiere dans le chemin de la réfraction, errant valdè, *ne quid gravius dicam, qui causas finales cum Cartesio in Physica rejiciunt, cum præter admirationem divinæ sapientiæ pulcherrimum nobis principium præbeant inveniendi, &c.* Mais comme on vient de voir dans les Corollaires ci-dessus, l'exemple de la réfraction donné ici en preuve, porte absolument à faux, & justifie parfaitement la conduite de M. *Descartes*, & de ses disciples, à cet égard. En général on peut bien assurer qu'en matiere de physique, il n'y a pas de méthode plus incertaine, plus équivoque, & quelquefois plus téméraire, que celle qui s'appuie sur la raison des causes finales. Ce n'est pas qu'à tout prendre, la nature n'agisse toujours par la voie, & pour la fin la plus simple, & la plus uniforme qu'il soit possible. Mais nous ignorons souvent quelle est cette voie, ou cette fin; & cette ignorance nous expose à attribuer à la nature telle simplicité, ou telle uniformité, qui sont incompatibles avec des conditions préférables, & plus essentielles. Dans la question dont il s'agit, par exemple, si l'on fait aller la

lumière d'un milieu dans un autre, par le chemin de la plus courte durée, on remplit une vûe qui plaît à l'esprit, & qu'on donne d'autant plus volontiers à la nature, qu'elle paroît plus conforme à sa conduite ordinaire. Mais on ne s'appërçoit pas qu'en même temps, on fait prendre à la lumière, qui est assurément quelque chose de corporel, une route toute différente de celle que prennent les autres corps en pareille rencontre; puisqu'on la fait détourner vers le côté où elle trouve le plus de résistance, & moins de facilité à se mouvoir. Or y aura-t'il plus d'incongruité à faire mouvoir la lumière dans les circonstances de la réfraction, par un chemin qui n'est pas celui du plus court temps, qu'à la tirer de la loi générale des corps, dans la direction qu'ils sont obligés de suivre, en passant d'un milieu dans un autre ? Faudra-t'il préférer ce principe, que la nature agit toujours par le chemin le plus court, le plus facile, ou de moindre durée, à cet autre, que tous les êtres corporels tendent à l'équilibre, ou au mouvement, selon qu'ils sont également, ou inégalement pressés de ceux qui les environnent; & que quand ils se meuvent, ils sont toujours déterminés à aller vers le côté où se trouve la moindre résistance ? Ces deux principes seront également certains, si l'on veut : mais qui ne voit que le premier est sujet à mille équivoques, & à mille exceptions, & que le dernier n'a jamais dû souffrir d'exception, que par voie surnaturelle ? J'ajouterai encore cette réflexion, qu'en raisonnant des effets de la nature par la cause prochaine & immédiate qui a pû les produire, il n'y a rien de perdu pour la cause finale ; l'on se trouveroit tout prêt à la recevoir, si elle venoit à nous être révélée. C'est qu'une recherche purement mécanique, laisse à l'esprit toute sa liberté, & pour ainsi dire, toute sa froideur. Mais quand on s'est voué à la cause finale, & qu'elle doit devenir le fondement d'une explication physique, il faut dès lors trouver dans la nature de quoi justifier le dessein qu'on lui attribue : & plus il est noble ce dessein, & analogue aux phénomènes connus, ou même à des vérités d'un

genre supérieur, plus il est propre à échauffer l'esprit, à frapper l'imagination, & à disposer d'autant l'un & l'autre à l'erreur, si l'erreur est nécessaire pour soutenir la fin dont on a fait choix.

Tant de raisons contre la propriété prétendue de la lumière dans la réfraction, n'ont été pour moi que suffisantes, quand il s'est agi de prendre parti là-dessus contre *M. Leibnitz*. Une autorité si grande, & à si juste titre, se trouve encore ici soutenue de celle de *M. Huguens*. Ce fameux Géometre, dans son *Traité de la Lumière*, qui fut imprimé en 1690, & qui est le dernier Livre qu'il ait donné au public, se déclare ouvertement pour la propriété des réfractions, & soutient en propres termes * contre l'opinion de *M. Descartes*, que la lumière passe plus lentement à travers le verre & l'eau, qu'à travers l'air. C'est ce qu'il déduit de son système des ondes d'une manière très-ingénieuse, si toutefois on peut appeller ingénieux un raisonnement, qui aboutit à faire détourner un corps qui se meut, vers le côté où il trouve le plus de difficulté à se mouvoir. Ce système cependant, quoique d'ailleurs peut être assez peu conforme à la nature, ne conduit point nécessairement à une conséquence si extraordinaire; & il seroit aisé de faire voir, qu'en changeant peu de chose aux circonstances & aux suppositions gratuites, sur lesquelles *M. Huguens* a imaginé sa démonstration, & construit ses figures, le système des ondes se trouveroit, en ce point d'accord avec les autres systèmes de la lumière, & avec la statique.

A l'égard de *M. le Marquis de l'Hospital* qui a aussi terminé dans son Livre des *infinitement petits* *, le passage d'un milieu dans un autre par le temps le plus court, j'ignore ce qu'il pensoit de l'application qu'on en pouvoit faire à la réfraction, & au principe de *M. de Fermat*, parce qu'il en a détaché la question, & qu'il l'a réduite, comme on sçait, en Problème, indépendamment de la réfraction, & sous l'hypothèse d'un Voyageur qui doit aller d'un lieu à un autre, en traversant deux campagnes différentes. Et
vrai-

Fig. 16.

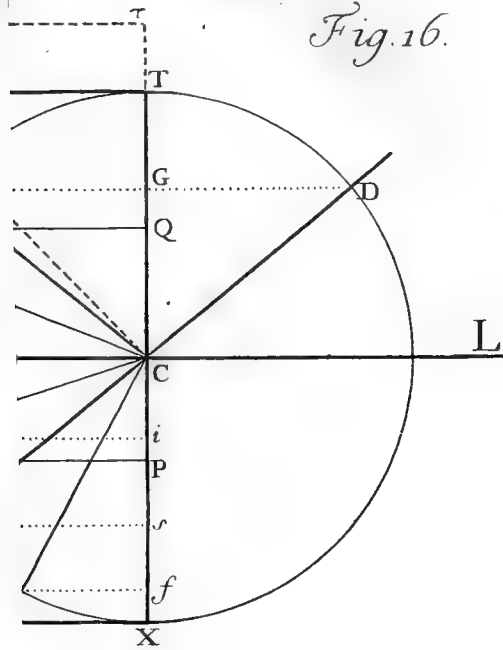


Fig. 14.

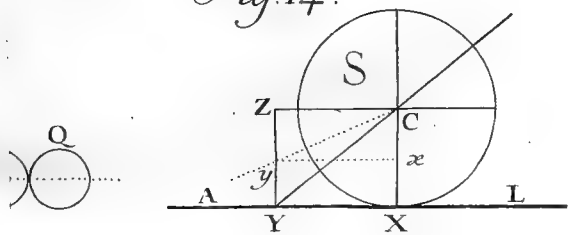


Fig 16

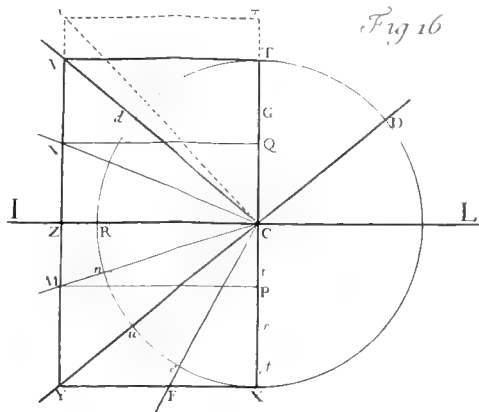
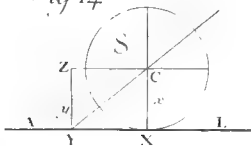


Fig 17



1915



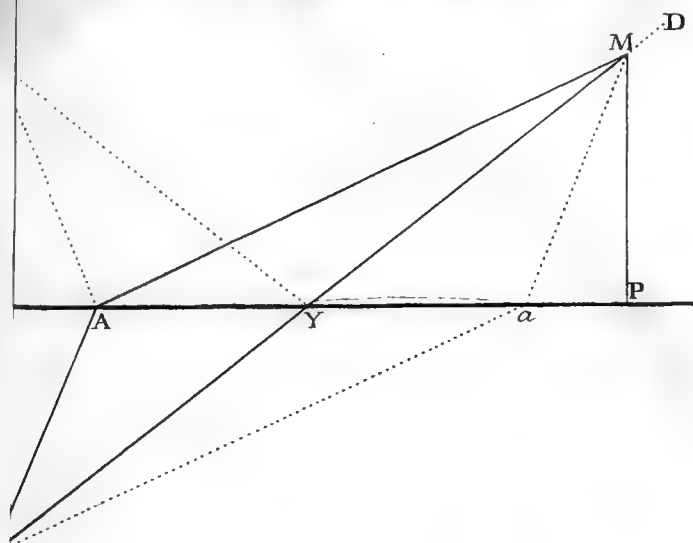


Fig. 17.

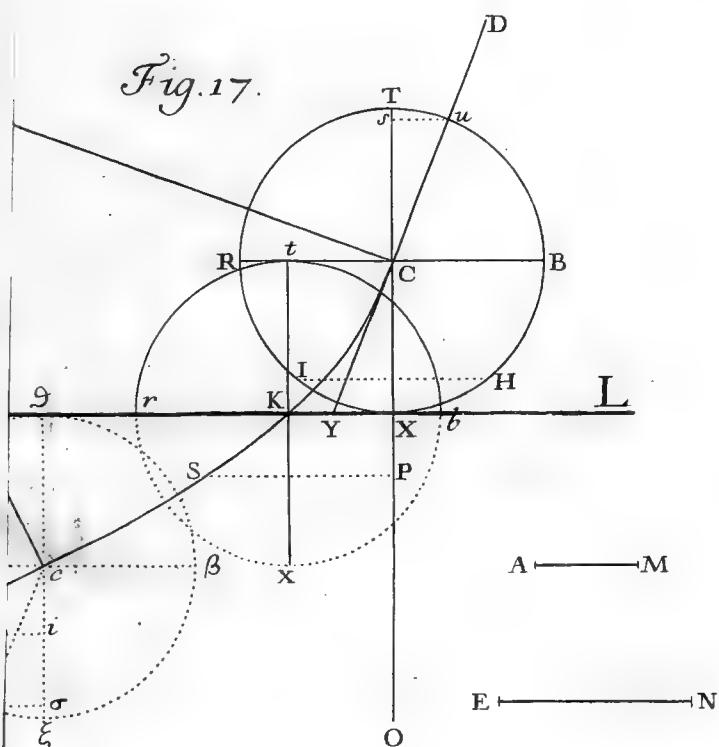


Fig 18

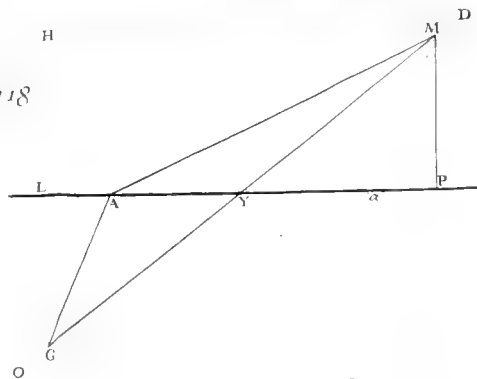
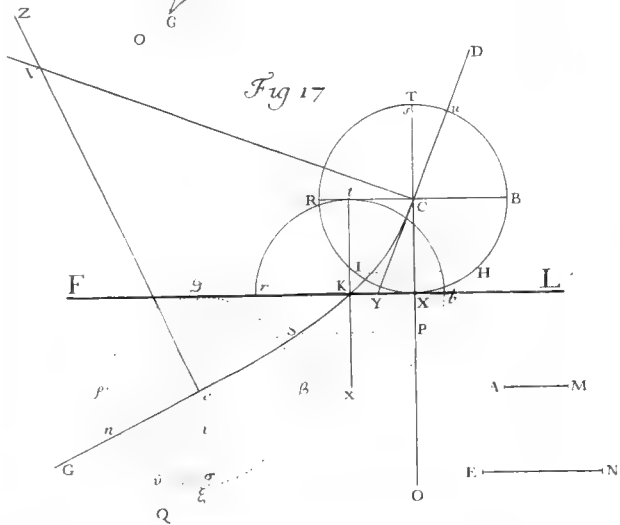


Fig 17



vraisemblablement il ne l'a traitée que pour faire briller le calcul qui étoit son principal objet. Il n'est pas mal-aisé cependant de s'appercevoir, en lisant le problème de *M. de l'Hôpital*, qu'il est applicable à la réfraction, tant par la nature du sujet, & par la construction de la figure qu'il y emploie, que parce qu'il est précédé de deux autres, qui sont visiblement des questions de dioptrique & de catoptrique. Mais on peut bien ne pas prendre garde à quel principe de réfraction il appartient, à cause qu'il n'y en est fait aucune mention, & que tout cela est couvert par des expressions générales. Ce qui est arrivé de là, & qui est assez singulier, c'est que des lecteurs, d'ailleurs très-intelligens, ayant perdu le souvenir du principe de *M. de Fermat*, ou n'y faisant plus attention, & retenant celui de *M. Descartes*, qui l'a enfin emporté, n'ont pas laissé que de prendre toujours la proposition démontrée dans *M. de l'Hôpital*, pour une propriété de la réfraction. D'ailleurs si l'on construit l'équation constitutive du problème, on trouve deux racines qui paroissent donner le point de réfraction en deux endroits différens sur le plan PL , qui separe les deux milieux. De sorte que si l'on est dans le préjugé, que la réfraction doit toujours se faire par le chemin du plus court temps, on peut bien croire encore confusément, que cette propriété a lieu dans les deux hypothèses; c'est-à-dire, soit que le rayon lumineux, qui vient du point M , s'approche de la perpendiculaire dans le milieu PG , ou dans le milieu PH , & qu'il se rompe en l'un ou en l'autre des deux points, en A , ou en a , par exemple; pourvû que ce soit toujours dans le rapport donné direct, ou réciproque des vitesses, d'où résulte celui des sinus. Or il y a en effet deux points sur le plan PL , qui donnent ce rapport, & tels qu'ayant mené aM , & aG , du second, on a un chemin de réfraction MaG , semblable au premier chemin MAG , & seulement posé en sens contraire. Et ce double point de réfraction sur le plan rompent, n'auroit rien dans le fonds de plus extraordinaire que le double point d'oscillation, qu'on trouve sur la verge du pen-

386 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dule , par rapport au petit poids qu'on a coutûme d'y ajouter , pour en avancer ou retarder les vibrations. Ce n'est donc qu'en y regardant de plus près , qu'on s'apperçoit , que le rapport constant des sinus , & l'analogie des vitesses , eu égard aux résistances , réciproque dans le premier cas , & directe dans le second , ne sçauroit donner le chemin du plus court temps , que dans ce second cas , tout-à-fait relatif au principe de réfraction de M. de Fermat , & absolument incompatible avec les loix connues de la nature.

Je donnerai la continuation de cette seconde partie , dans les mémoires de l'année prochaine ; sur les variations accidentelles de la refraction en général , sur les différens degrés de réfrangibilité de la lumiere , sur ses couleurs , &c.





MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ

Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie l'ouvrage qui suit, pour entretenir l'union intime qui doit être entre-elles; comme ne faisant qu'un seul corps, aux termes des statuts accordés par le Roi au mois de Février 1706.

ARACHIDNOIDES AMERICANA.

*Arachidna quadrifolia villosa fl. luteo. nov. plant. Americ.
gén. Plum. 49. Pistache du Terre. 2. 121.
Manobi. Labat. 4. 59.*

Par M. NISSOLLE.

LA racine de cette plante est blanche, droite, & longue de plus d'un demi-pied, piquant en fond; accompagnée vers le milieu de plusieurs fibres traçantes, & quelque peu chevelues, de différentes longueurs; car il y en a quelques-unes qui n'ont que deux ou trois pouces de long, & il s'y en trouve qui en ont bien quatre ou cinq, & même quelquefois davantage. Elle est épaisse en son collet d'environ six ou sept lignes, & en diminuant insensiblement, elle va finir par une pointe très-déliée. Cette racine pousse plusieurs tiges de huit à dix pouces de long, tout-à-fait couchées sur terre; il n'y a que celle du milieu qui soit tant soit peu relevée. Toutes ces tiges sont rougeâtres velues, quarrées, & noïeuses, divisées en quelques branches; les feuilles dont elles sont garnies, ont un pouce & demi de long sur un pouce de large, attachées immédiatement & sans pédicule à des queues de près d'un pouce & demi de

Cccij

long, toujours au nombre de quatre, & opposées deux à deux; elles sont d'une figure presque ovale, d'un vert gai par dessus, & blanchâtres par dessous, relevées d'une petite nervure au milieu, accompagnée en sa longueur de petits filamens qui s'étendent obliquement jusques aux bords, médiocrement épaisses, & pliées légèrement en goutiere.

Les queues qui les soutiennent sortent des nœuds des tiges, accompagnées de deux feuilles, qui les embrassent aussi bien que la tige. Elles sont longues de huit à neuf lignes, mais n'en ont que quatre ou cinq de largeur à leur naissance, & en s'étrecissant peu à peu, elles se terminent en une pointe très-fine.

Les fleurs sortent des aisselles de ces queues, & du milieu des feuilles qui les embrassent; elles sont legumineuses, d'un jaune tirant un peu sur le rouge, soutenues par un pédicule d'environ sept ou huit lignes de longueur; l'étendard ou feuille supérieure en a six, sur sept ou huit de largeur; ses aîles ou feuilles latérales en ont quatre, sur une de large; il y a entre deux une petite ouverture par où l'on découvre la base de la fleur appelée ordinairement *Carina*. Elle est composée de deux feuilles, entre lesquelles est placé le pistil qui est tant soit peu relevé en haut, & qui sort du fond du calice, lequel est formé en espece de cornet dentelé.

Ce pistile, lorsque les fleurs commencent à passer, se fiche dans la terre, & y devient un fruit long & oblong, blanc-sale, tirant quelquefois sur le rougeâtre. Ce fruit est une espece de gouffe membraneuse, sillonnée en sa longueur, garnie entre les sillons de plusieurs petites lignes, tantôt transversales, tantôt obliques, suspendu dans la terre par une petite queue de sept à huit lignes de long. La longueur de ces gouffes varie souvent; il y en a d'un pouce & demi de long, & j'en ai vû plusieurs qui n'avoient pas plus de huit à neuf lignes. Leur grosseur est assez irréguliere, les deux extrémités étant communément renflées, & le milieu comme creusé en goutiere; le bout par où elles sont atta-

chées à la queue est ordinairement plus gros que le bout opposé qui se termine souvent en une espece de pointe émoussée & relevée en façon de bec crochu. Chaque gouffe est composée de deux coffes, dont les cavités, qui sont inégales, & garnies en dedans d'une petite pellicule blanche, luisante, & très-déliée, renferment un ou deux noyaux ronds & oblongs, divisés en deux parties, & couverts d'une petite peau rougeâtre, semblable à peu près à celle qui couvre les amandes ou les noisettes, qui noircit quand le fruit vieillit ou devient sec.

Ces noyaux, lorsque chaque gouffe n'en renferme qu'un seul, sont assez réguliers, & ne ressemblent pas mal aux noyaux du gland: mais lorsqu'il y en a deux, ils sont échan-crés obliquement, l'un à la tête, l'autre à la queue, aux endroits par où ils se touchent. La substance de ces noyaux est blanche & oléagineuse, & le goût en est fade & insipide, tirant sur le sauvage, ayant quelque rapport avec le goût des pois chiches verts.

J'ai donné la description de l'*Arachidnoides*, & j'en ai fait dessiner la figure d'après les plantes de cette espece qui ont été cultivées dans le jardin Royal de cette Ville: mais comme on n'a pas pu les y conserver long temps, je n'ai pas eu occasion d'en examiner les vertus & les usages.

Le R. P. du Tertre de l'Ordre des FF. Prêcheurs, & Missionnaire aux Isles de l'Amerique, a donné dans le second Volume de l'Histoire qu'il a faite de ces Isles, une figure peu correcte, & une description très-imparfaite de cette plante, qu'on appelle, à ce qu'il dit *pistache*, à cause de la forme & du goût de ses fruits.

Le R. P. Labat Religieux du même Ordre, & Missionnaire dans les mêmes Missions, qui a mis au jour depuis peu un ouvrage intitulé, *Nouveau Voyage aux Isles de l'Amerique*, parle aussi de ces mêmes pistaches, qu'il dit qu'on appelle autrement *manobi*. Et après avoir refuté ce que le Pere du Tertre avoit avancé touchant leur usage, il en donne une description un peu plus étendue: mais cette des-

cription manque aussi d'exactitude, de même que la figure que ce Pere en a fait graver, & qu'il a empruntée du Pere du Tertre. En effet, à suivre cette figure, on croiroit que tous les fruits sont suspendus aux fibres de la racine, & qu'il n'y en a point aux tiges, au lieu qu'il est certain qu'ils viennent tous aux tiges de la plante, & qu'il n'y en a aucun d'attaché à la racine. C'est ainsi que je l'ai constamment observé sur les plantes de cette espece que j'ai cultivées, c'est ainsi que le rapporte le R. P. Plumier Religieux de l'Ordre des Minimes, un des plus habiles botanistes du siècle, qui a fait plusieurs voyages, & qui a demeuré très-long-temps dans les Indes Occidentales, pour y dessiner & décrire les plantes qui y croissent, & qui a donné plusieurs excellens ouvrages sur cette matiere. Je suis pourtant surpris de ce que cet illustre botaniste a donné le nom d'*arachidna* à la plante que je viens de décrire, puisqu'elle ne sçauroit être rapportée à aucune des especes d'*arachidna* dont les anciens Auteurs de Botanique ont parlé.

Nous n'en connoissons que deux especes; sçavoir, *l'arachidna*, aut *potius aracoides* Honorii Belli. J. B. 2. 323. que M. Tournefort appelle dans ses institutions, *Vicia siliquas supràque terram edens*, 377. Et *l'arachidna* Theoph. Papas Peruanorum Clus. 79. que Casp. Bauh. appelle, *Solanum tuberosum esculentum*.

Ces deux plantes portent régulièrement leurs fleurs & leurs fruits comme les autres plantes; toute la différence qu'il y a, c'est, que *l'arachidna* de J. B. outre les fleurs & les fruits ordinaires, porte encore des siliques dans la terre, suspendues aux fibres de la racine; & celle de Clus. y porte des grosses tubérosités. De sorte que le P. Plumier auroit, ce me semble, mieux fait de nommer cette plante *arachidnoïdes*; c'est-à-dire, plante qui a quelque léger rapport avec *l'arachidna*.



EXPLICATION DES FIGURES.

- A. La plante entière.
- B. La fleur.
- C. Le pistil.
- D. D. Fruits de différente grosseur.
- E. E. Cofse qui renferme deux noyaux. Un tiré de la cofse.
- F. Un noyau lorsqu'il se trouve seul.

Il y a quelque tems que je cultive des plantes que j'ai fait dessiner , & dont j'aurois déjà donné les descriptions & les figures , si je ne les avois réservées pour un ouvrage particulier. J'en avois ramassé les semences dans les criblures du bled qu'on nous apportoit des Isles de l'Archipel , lorsque ceux qui commandoient dans cette Province furent dans l'obligation d'envoyer chercher des grains dans ce pays-là pour fournir à la subsistance de nos babitans qui s'en trouvoient dépourvûs. Dès qu'il en fut arrivé dans cette Ville , j'allai dans les greniers où l'on les avoit déposés ; j'en faisois cribler , & j'emportoïs les criblures que je semois ensuite : & comme je m'apperçûs que ces semences me fournissoient beaucoup de plantes curieuses , parmi lesquelles il s'en trouvoit plusieurs nouvelles , je crûs devoir continuer cette manœuvre ; de sorte que lorsqu'on eut cessé de nous apporter de ces grains , j'eus recours à Marseille , d'où je me faisois envoyer des criblures du bled de Levant , & de celui des côtes de Barbarie. Voici les noms des plantes nouvelles que j'en ai recueillies.

- Brassica græca raphani fol.*
- Carduus græcus erysimi fol. fl. luteo.*
- Climenum græcum latifol. fl. vexillo violaceo labialibus petalis albis.*
- Jacea centauroides Africana repens fl. ianthino...*
- Eadem fl. ianthino dilutiori...*

Melilotus græca capsulis reticulatis.

Panicum vulgare græcum, spica laxiori, sem. umbilicato.

Hesperis Africana hieracii fol. hirsuto fl. minimo purpurascense.

Phaseolus peregrinus fl. roseo sem. tomentoso.

Turritis bursæ pastoris fol. fl. albo.

Rapistrum græcum raphani fol. fl. luteo.

Stachis or. salviæ fol. fl. obsoletè lutescente maculis spadicis variegato.

Sinapi græcum raphani fol.

Rapistrum Africanum fol. multifidis, capsulis fulcatis.

F I N.

FAUTES A CORRIGER.

Dans les Mémoires de 1722.

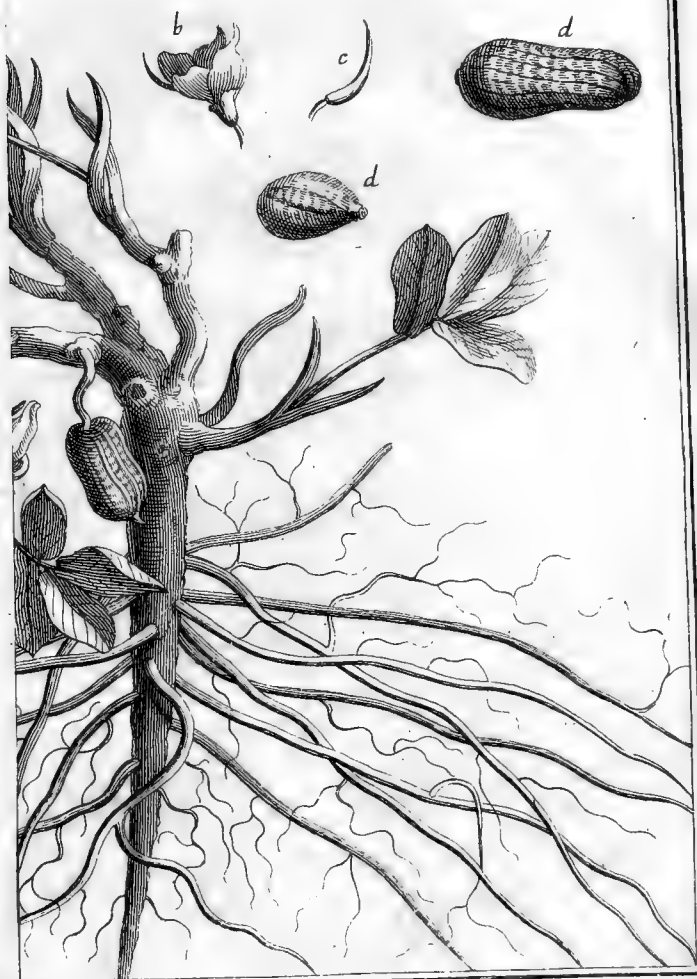
Page 29. ligne 8. & 9. effacez, laquelle deviendra à son tour l'expression directe de l'angle de réfraction.

Ibid. l. 27. *lis.* de direction par rapport au plan.

Page 37. l. pénult. $pp \pm xp - yy : \text{lis. } pp \pm 2xp + yy.$

Page 44. l. 3. $-yy \times 1 \pm \frac{ss}{\Sigma\Sigma} : \text{lis. } yy \times 1 - \frac{ss}{\Sigma\Sigma}.$





Arachidnoides Americana.

Mem de l'Acad 172 Pl 13 pag 392

